1. Să se determine suma S a soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 4x^2 = 5x$.

   a) $S = 0$; b) $S = 6$; c) $S = 4$; d) $S = \sqrt{2}$; e) $S = 5$; f) $S = 2$.

   Soluţie. Din relaţiile lui Viete rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

2. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k+1}{10^k}$.

   a) $L = \infty$; b) $L = \frac{10}{9}$; c) $L = \frac{10}{81}$; d) $L = \frac{1000}{9}$; e) $L = \frac{100}{81}$; f) $L = \frac{9}{10}$.

   Soluţie. Avem $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)(\frac{1}{10})^k$. Fie $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^{k+1}$. Pentru $x \neq 1$ avem suma unei progresii geometrice de raţie x deci $f(x) = \frac{x^{n+2} - x}{x-1}$. Derivând obţinem $f'(x) = \sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}$. Pentru $x = \frac{1}{10}$, rezultă $S_n = \frac{\frac{n+1}{10^{n+2}} - \frac{n+2}{10^{n+1}} + 1}{(\frac{9}{10})^2}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{10^{n+2}} = 0$, deducem $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{100}{81}$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă ecuaţia $m(x+1) = e^{|x|}$ are exact două soluţii reale şi distincte.

   a) $m \in (1, \infty)$; b) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (1, \infty)$; c) $m \in \left(-\infty, -e^2\right] \cup [1, \infty)$;
   d) $m \in \left(-\infty, -e^2\right) \cup (0, 1)$; e) nu există m;
   f) nici una dintre celelalte afirmaţii nu este adevărată.

   Soluţie. Cum $x = -1$ nu este soluţie, ecuaţia se scrie $m = \frac{e^{|x|}}{x+1}$. Funcţia $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x+1} - m$ se scrie desfăşurat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1} - m, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{e^{x}}{x+1} - m, & x \in [0, \infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{-x}(x+2)}{(x+1)^2}, & x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{e^{x}\cdot x}{(x+1)^2}, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

   Pentru şirul lui Rolle se consideră valorile $\{-\infty, -2, -1, 0, \infty\} \subset \bar{\mathbb{R}}$,

$m\backslash x$	$-\infty$	-2	-1	0	∞	
$f(x)$	$-\infty$	$-m-e^2$	$-\infty\|\infty$	$1-m$	∞	Discuţie
$m \in (-\infty, -e^2)$	$-$	$+$	$-\|+$	$+$	$+$	$x_1 \neq x_2$
$m = -e^2$	$-$	0	$-\|+$	$+$	$+$	$x_1 = x_2 = -2$
$m \in (-e^2, 1)$	$-$	$-$	$-\|+$	$+$	$+$	nu are rădăcini
$m = 1$	$-$	$-$	$-\|+$	0	$+$	$x_1 = x_2 = 0$
$m \in (1, \infty)$	$-$	$-$	$-\|+$	$-$	$+$	$x_1 \neq x_2$

   Deci $m \in (-\infty, -e^2) \cup (1, \infty)$.

4. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$.

   a) -4; b) 2; c) 3; d) ∞; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = 3$.

5. Să se calculeze $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}\, dx$.

   a) $\ell = 2$; b) $\ell = \infty$; c) $\ell = 1$; d) limita nu există; e) $\ell = 0$; f) $\ell = -3$.

Soluţie. Fie $I_n = \int_0^2 \frac{|x-n|}{x+n}dx$, pentru $n \geq 2$ avem

$$I_n = \int_0^2 \frac{n-x}{n+x}dx = \int_0^2 \left(\frac{2n}{x+n} - 1\right)dx = 2n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - 2 = \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n} - 2 = 4\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n/2} - 2.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 4\ln e - 2 = 4 - 2 = 2$.

6. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $B = \frac{1}{2}\left(A^2 + A\right)$.

   a) $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; b) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)$; c) $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; d) $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; e) $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$; f) $B = \frac{1}{2}A$.

   Soluţie. Obţinem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$; $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.

7. Să se determine n natural dacă $C_n^4 = \frac{5}{6}n\,(n-3)$.

   a) $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 4$; d) $n = 6$; e) $n = 12$; f) nu există n.

   Soluţie. Avem $n \geq 4$ şi $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{5n(n-3)}{6} \Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 20$, deci $n = 6$.

8. Să se determine două numere reale strict pozitive x şi y astfel încât

$$x + y = xy = x^2 - y^2.$$

   a) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; b) $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; c) $x = 0, y = 0$;
   d) $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, y = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; e) $x = 1, y = 0$; f) $x = \frac{1}{2}, y = -1$.

   Soluţie. Din $\begin{cases} x, y > 0, & x + y = xy = (x-y)(x+y) \\ x + y = (x-y)(x+y) \end{cases}$ rezultă $x - y = 1$. Din $x + y = xy$, prin înlocuirea lui $x = y + 1$, obţinem

$$y + 1 + y = (y+1)y \Leftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}.$$

   Dar $y > 0$, deci $y = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ şi $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

9. Câte numere complexe distincte z verifică relaţia $z \cdot \bar{z} = 1$?
   a) 3; b) două; c) nici unul; d) 1; e) 4; f) o infinitate.

   Soluţie. Avem $z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Deci $z = \cos\alpha + i\sin\alpha; \alpha \in [0, 2\pi)$ şi deci o infinitate de soluţii.

10. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă inecuaţia $e^{2x} + me^x + m - 1 > 0$ este verificată pentru orice x real.

    a) nu există m; b) $m \in (1, \infty)$; c) $m = 1$; d) $m \in (-\infty, 1]$; e) $m \in [-1, 1]$; f) $m \in [1, \infty)$.

    Soluţie. Notăm $e^x = y$, iar condiţia devine $y^2 + my + m - 1 > 0, \forall y > 0$. Descompunem $y^2 + my + m - 1 = (y-1)(y+1) + m(y+1) = (y+1)(y-1+m) > 0, \forall y > 0$. Dacă $y \to 0$, se obţine condiţia necesară (care este şi suficientă) $m \geq 1$.

11. Să se determine câtul împărţirii polinomului $f = X^3 + X^2 + 2X - 3$ la $g = X^2 + 2X - 3$.

    a) $X + 1$; b) $X - 1$; c) $X + 2$; d) X^2; e) $X + 3$; f) $X + 4$.

    Soluţie. Aplicând teorema împărţirii cu rest obţinem $X^3 + X^2 + 2X - 3 = (X^2 + 2X + 3)(X - 1) + X$, deci câtul este $X - 1$.

12. Să se calculeze $f'(1)$ pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

    a) 2; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{2}$; e) $\frac{1}{2}$; f) -3.

    Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2 + 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2+1)^2}$. Deci $f'(1) = \frac{1}{2}$.

13. Să se calculeze $E = 0,02 \cdot \dfrac{314}{3,14} \cdot \sqrt{\dfrac{9}{4}}$.

a) $E = 30$; b) $E = \pi$; c) $E = 3$; d) $E = \sqrt{3}$; e) $E = 1$; f) $E = 300$.

Soluţie. $E = \dfrac{2}{100} \cdot \dfrac{314}{314} \cdot 100 \cdot \dfrac{3}{2} = 3$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$.

a) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$; b) $x_{1,2} = \pm 1$; c) $x = 2$; d) $x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}$; e) $x = 0$; f) $x_{1,2} = \pm i$.

Soluţie. Avem $\sqrt{x^2+1} = 1$. Prin ridicare la pătrat, egalitatea devine $x^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0$, deci $x = 0$.

15. Să se calculeze suma primilor 20 de termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), $n \geq 1$, ştiind că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.

a) 100; b) 50; c) nu se poate calcula; d) 0; e) 20; f) 2000.

Soluţie. Din $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$, rezultă $a_1 + 5r + a_1 + 8r + a_1 + 11r + a_1 + 14r = 20$, deci $2a_1 + 19r = 10$. Prin urmare $S_{20} = \dfrac{(a_1 + a_{20})20}{2} = (2a_1 + 19r)10 = 100$.

16. Se consideră mulţimea $M = \{x^2 + x + 1 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Atunci

a) $M = \left(\frac{3}{4}, \infty\right)$; b) $M = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$; c) $M = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$; d) $M = \left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$; e) $M = \mathbb{R}$; f) $M = \varnothing$.

Soluţie. Mulţimea valorilor funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$ este $\left[-\frac{\triangle}{4a}, \infty\right)$. În cazul nostru $\operatorname{Im} f = \left[\frac{3}{4}, \infty\right)$.

17. Să se determine elementul neutru pentru legea de compoziţie

$$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$$

definită pe mulţimea $\mathbb{R}$.

a) -2; b) 1; c) 0; d) 3; e) nu există; f) -4.

Soluţie. Din $x \circ e = x$ şi $e \circ x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $xe + 3x + 3e + 6 = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x+3)(e+2) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = -2$.

18. Să se calculeze aria mulţimii

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq xe^{x+1}\}.$$

a) $\ln 2$; b) e^2; c) $2e$; d) $e + 1$; e) e; f) $2\ln 2$.

Soluţie. Folosind integrarea prin părţi rezultă aria

$$A = \int_0^1 xe^{x+1}dx = xe^{x+1}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{x+1}dx = e^2 - e^2 + e = e.$$