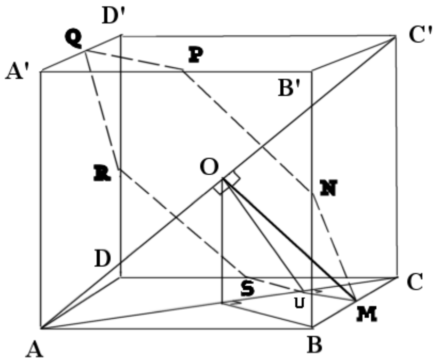
1. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ se secţionează cu planul mediator al diagonalei AC'. Să se specifice forma secţiunii obţinute.

   a) triunghi; b) hexagon; c) trapez; d) pătrat; e) octogon; f) pentagon.

   Soluţie. Fie O mijlocul diagonalei AC' a cubului $ABCDA'B'C'D'$, fie π planul perpendicular pe AC' care trece prin punctul O şi fie a lungimea laturii cubului (vezi figura).

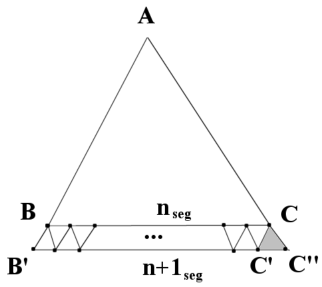


   Ducem din O perpendiculara pe AC' în planul ACC'. Aceasta intersectează diagonala AC a bazei în punctul U. Avem $\Delta C'AC \sim UAO$ (triunghiuri dreptunghice cu vârful $C'AC$ comun), deci $\frac{AO}{AC} = \frac{AU}{AC'} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}/2}{a\sqrt{2}} = \frac{AU}{a\sqrt{3}}$, deci $AU = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \Rightarrow \frac{CU}{CA} = \frac{1}{4}$. Fie $UM \perp AC, M \in BC$. Atunci $\Delta CUM \sim \Delta CBA$ (triunghiuri dreptunghice cu vârful ACB comun), deci $\frac{CU}{CB} = \frac{CM}{CA} \Leftrightarrow a\sqrt{2}/4a = \frac{CM}{a\sqrt{2}} \Rightarrow CM = a/2$, deci M este mijlocul muchiei AB a cubului. Pe de altă parte, se observă că MU este perpendicular pe planul ACC' ($MU \perp AC$ din construcţie şi $MU \perp CC'$ deoarece CC' este perpendicular pe planul ABC, deci $CC' \perp CM \Rightarrow CM \perp CC'$). De asemenea, $OU \perp AC'$ (din construcţie), deci folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă $MO \perp AC'$, deci $M \in \pi$. Analog se arată că mijloacele N, P, Q, R, S ale muchiilor $BB', B'A', A'D', D'D, DC$ respectiv, aparţin planului π. Atunci şi segmentele care unesc aceste puncte, MN, NP, PQ, QR, RS, SM, care au lungime egală cu $a/\sqrt{2}$ sunt incluse în acest plan, deci şi hexagonul $MNPQRS$ determinat de acestea. Laturile opuse ale acestui hexagon sunt paralele între ele (fiind paralele cu diagonale omologe ale feţelor opuse ale cubului), deci hexagonul este regulat. Prin urmare π intersectează cubul după hexagonul regulat $MNPQRS$.

2. Un triunghi echilateral este descompus în N triunghiuri echilaterale disjuncte în modul următor: fiecare latură a triunghiului dat este împărţită în n părţi egale ($n > 7$) şi prin punctele de diviziune se duc drepte paralele cu laturile triunghiului. Să se determine N.

   a) 2^n; b) 5^{n-3}; c) n^3; d) n^2; e) $n\,(n+1)$; f) 3^{n-1}.

   Soluţie. Paralelele duse la baza triunghiului echilateral prin cele $n-1$ puncte de pe latura AB a triunghiului împart triunghiul în n benzi care conţin respectiv $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$ triunghiuri mici. În total triunghiul dat conţine $N = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k \; - n = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$ triunghiuri mici. Putem verifica acest lucru prin inducţie: pentru $n = 1$ avem $n^2 = 1$, deci un singur triunghi, iar dacă pentru laturi divizate în câte n segmente egale avem $N = n^2$, atunci triunghiul cu $n+1$ segmente egale va avea în plus o bandă inferioară cu $2n+1$ triunghiuri mici (vezi figura).

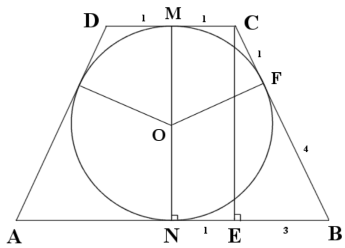


Deci noul triunghi (omologul celui vechi cu numărul de diviziuni incrementat) va avea $N' = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$, c.c.t.d.

3. Un trapez isoscel, circumscris unui cerc, are lungimile bazelor de 8 şi 2. Să se calculeze aria trapezului.

   a) 28; b) 16; c) 12; d) 20; e) 15; f) 10.

   Soluţie. Înalţimea trapezului este $CE = \sqrt{CB^2 - BE^2}$ (vezi figura).



Dar $CB = CF + FB = CM + BN = \frac{CD}{2} + \frac{BA}{2} = 1 + 4 = 5$, unde am folosit faptul că tangentele duse dintr-un punct exterior la un cerc sunt de aceeaşi lungime. Pe de altă parte, $BE = BN - EN = BN - CM = \frac{BA}{2} - \frac{CD}{2} = 4 - 1 = 3$. Deci $CE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, iar aria trapezului este $\mathcal{A} = \frac{AB+CD}{2} \cdot CE = \frac{5+1}{2} \cdot 4 = 12$.

4. Să se calculeze $\sin 2x$ dacă $\operatorname{tg} x = 3$.

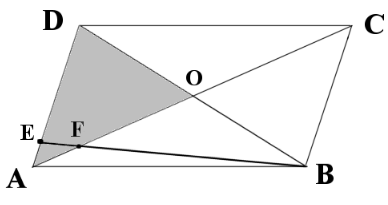
   a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\frac{5}{7}$; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Avem $\sin 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{2 \cdot 3}{1+9} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

5. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul E astfel încât $AE = \dfrac{1}{2000}AD$. Fie F punctul de intersecţie al dreptei BE cu diagonala AC. Să se calculeze raportul $\dfrac{AF}{AC}$.

   a) $\frac{1}{1999}$; b) $\frac{1}{2000}$; c) $\frac{1}{1998}$; d) $\frac{1}{2001}$; e) alt răspuns; f) $\frac{1}{2002}$.

   Soluţie. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor AD şi BC ale paralelogramului (vezi figura).



Aplicând teorema Menelaus pentru secanta BE şi triunghiul AOD, rezultă

$$\frac{FA}{FO} \cdot \frac{BO}{BD} \cdot \frac{ED}{EA} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FO} = \frac{BD}{BO} \cdot \frac{EA}{DE} = \frac{2}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2000}AD}{AD - \frac{1}{2000}AD} = \frac{2}{1999}.$$

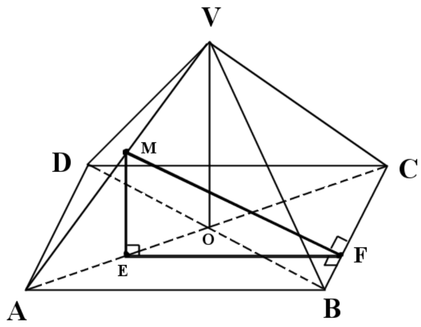
Prin urmare, avem

$$\frac{AF}{AF+FO}=\frac{2}{2+1999}=\frac{2}{2001}\ \Rightarrow\ \frac{AF}{FO}=\frac{2}{2001}\ \Rightarrow\ \frac{AF}{AC}=\frac{AF}{2AO}=\frac{1}{2001}.$$

6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu toate muchiile de lungime 4. Să se calculeze distanţa de la mijlocul M al muchiei laterale VA la muchia BC a bazei.

a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{7}{3}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{11}$; e) $\sqrt{11}$; f) $\sqrt{14}$.

Soluţie. Fie $\{O\}=AC\cap BD$, E proiecţia lui M pe planul bazei ($E\in AC$) şi fie F proiecţia lui E pe BC ($E\in BC$). Folosind teorema celor trei perpendiculare, rezultă $MF\perp BC$ (vezi figura).



Dar $ME=\frac{VO}{2}$ (din $\Delta AME\sim\Delta AVO$) iar $EF=\frac{3}{4}\cdot AB$ (din $\Delta EFC\sim\Delta ABC$ şi $AE=EO\Rightarrow CE=\frac{3}{4}\cdot AC$). Pe de altă parte, în triunghiul dreptunghic VOC avem

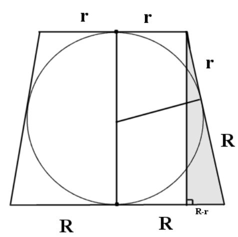
$$VO=\sqrt{VC^2-OC^2}=\sqrt{VC^2-\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}.$$

Deci $ME=\frac{VO}{2}=\sqrt{2}$, iar $EF=\frac{3}{4}\cdot AB=3$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MEF, rezultă $MF=\sqrt{ME^2+EF^2}=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}$.

7. Aria unei sfere înscrise într-un trunchi de con cu razele bazelor R şi r este

a) $4\pi Rr$; b) πRr; c) $\pi\left(R^2-r^2\right)$; d) $2\pi Rr$;
e) nu se poate calcula; f) $\pi\left(R^2+r^2\right)$.

Soluţie. O secţiune prin axa de simetrie a trunchiului de con are forma unui trapez circumscris unui cerc mare al sferei (vezi figura).

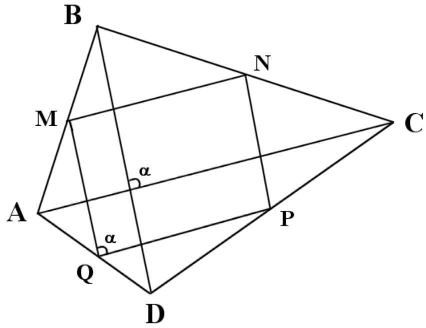


Fie ρ raza sferei. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul haşurat, obţinem înălţimea $h=2\rho$ a trapezului, $h=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=\sqrt{4Rr}=2\sqrt{Rr}$. Deci $\rho=\sqrt{Rr}$, iar aria sferei este $\mathcal{A}=4\pi\rho^2=4\pi Rr$.

8. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi M,N,P,Q respectiv mijloacele laturilor AB,BC,CD,DA. Să se determine raportul $r=\dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{MNPQ}}$.

a) $r=\frac{4}{3}$; b) $r=\frac{3}{2}$; c) $r=4$; d) $r=\sqrt{2}$; e) $r=3$; f) $r=2$.

Soluţie. Se observă că MN este linie mijlocie în ΔBAC (vezi desenul), deci $\Delta BMN\sim\Delta BAC$, cu raportul de asemănare $\frac{MN}{AC}=\frac{1}{2}$, deci $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta BMN}}{\mathcal{A}_{\Delta BAC}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.



Analog obţinem $\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta DQP}}{\mathcal{A}_{\Delta ADC}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta CNP}}{\mathcal{A}_{\Delta CBD}} = \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta AMQ}}{\mathcal{A}_{\Delta ABD}} = \dfrac{1}{4}$. Deci

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} &= \mathcal{A}_{MNPQ} + (\mathcal{A}_{BMN} + \mathcal{A}_{DQP}) + (\mathcal{A}_{CNP} + \mathcal{A}_{MNQ}) = \\ &= \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ADC}) + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{CBD} + \mathcal{A}_{ABD}) = \\ &= \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{4}(\mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{ABCD}) = \mathcal{A}_{MNPQ} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{ABCD},\end{aligned}$$

deci $\mathcal{A}_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MNPQ}}{\mathcal{A}_{\Delta ABCD}} = \dfrac{1}{2}$. *Altă rezolvare.* Avem $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$, unde α este unghiul format de diagonalele patrulaterului. Dar α are aceeaşi mărime cu unghiul format de laturile paralelogramului $MNPQ$ (laturile paralelogramului sunt paralele cu diagonalele şi sunt egale respectiv cu $1/2$ din lungimile acestora, fiind linii mijlocii în triunghiurile $\Delta ABC, \Delta ADC, \Delta CBD, \Delta ABD$). Aria paralelogramului $MNPQ$ este

$$\mathcal{A}_{MNPQ} = QM \cdot QP \cdot \sin\alpha = \frac{BD}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{4} = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}.$$

9. Să se calculeze produsul $P = \sin 30° \cos 45° \operatorname{tg} 60°$.

   a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; b) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; c) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

   Soluţie. Avem $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

10. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, lungimile laturilor satisfac relaţiile $b = c + 1$, $a < 5$. Atunci

    a) $0 < c < 3$; b) $c = \pi$; c) $c = 3,1$; d) $c = 3$; e) $c > 4$; f) $c = 2\sqrt{3}$.

    Soluţie. Din teorema lui Pitagora, obţinem $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Folosind condiţiile din ipoteză, rezultă

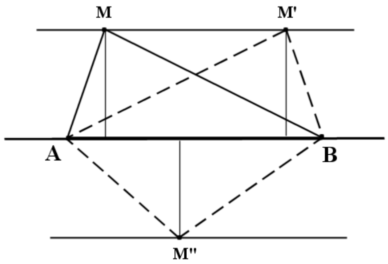
    $$a < 5 \Leftrightarrow \sqrt{(c+1)^2 + c^2} < 5 \Rightarrow c^2 + c - 2 < 0 \Leftrightarrow (c-1)(c+2) < 0 \Leftrightarrow c \in (-2, 1).$$

    Dar $c > 0$, deci $c \in (0, 1)$, prin urmare $0 < c < 3$.

11. Fie A şi B două puncte distincte fixate într-un plan. Să se determine mulţimea punctelor M din plan pentru care aria triunghiului MAB este constantă.

    a) un punct; b) reuniunea a două drepte concurente;
    c) o dreaptă paralelă cu AB;
    d) reuniunea a două drepte paralele; e) o dreaptă perpendiculară pe AB;
    f) un cerc trecând prin A şi B.

    Soluţie. Aria triunghiului este $\mathcal{A} = \frac{AB \cdot d(M, AB)}{2}$, deci $\mathcal{A}$ şi AB constante conduc la $d(M, AB) = \frac{2\mathcal{A}}{AB}$ =const. Prin urmare M descrie o pereche de drepte paralele cu dreapta AB, aflate la distanţa $\frac{2\mathcal{A}}{AB}$ de această dreaptă (vezi desenul).



12. Să se determine $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \sqrt{3} \sin x$.

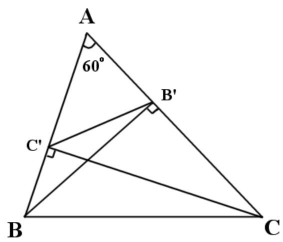
a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{\pi}{5}$; c) $\frac{\pi}{6}$; d) alt răspuns; e) nu există; f) $\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Se observă că $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0$. Împărţind ecuaţia prin $\cos x \neq 0$, obţinem $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, deci $x = \frac{\pi}{6} \in (0, \frac{\pi}{2})$.

13. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctele C' şi B' sunt picioarele înălţimilor duse din vârfurile C şi B. Se dă $m(\hat{A}) = 60°$ şi $BC = a$. Să se calculeze $B'C'$.

a) $\frac{a}{2}$; b) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; c) $\frac{a}{3}$; d) nu se poate calcula; e) $\frac{a}{4}$; f) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Se observă că $\widehat{BC'C} = \widehat{BB'C} = 90°$, deci $BCB'C'$ este patrulater inscriptibil (diagonalele formează unghiuri congruente cu laturi opuse), deci suma unghiurilor opuse ale patrulaterului este de $180°$ (vezi figura).



Prin urmare $\widehat{AC'B'} = 180° - \widehat{C'B'C} = \widehat{ABC}$ şi analog se obţine $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$. Deci $\Delta AB'C' \sim \Delta ABC$ (au unghiurile respectiv egale). Pe de altă parte, din triunghiul dreptunghic $AC'C$ avem $AC' = AC \cos \hat{A}$, deci raportul de asemănare al triunghiurilor $\Delta AC'B'$ şi ΔABC este dat de raportul laturilor omologe $\frac{AC'}{AC} = \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$, şi deci $\frac{B'C'}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'C' = a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$.

14. Volumul unui cub de diagonală d este

a) $\frac{d^3\sqrt{3}}{9}$; b) $2d^3$; c) $\frac{d^3\sqrt{2}}{9}$; d) $3d^3$; e) d^3; f) $\frac{d^3\sqrt{3}}{12}$.

Soluţie. Dacă a este latura cubului, atunci $d = a\sqrt{3}$, deci $a = d/\sqrt{3}$, iar volumul este $V = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$.

15. Un tetraedru are volumul V şi aria totală A. Să se calculeze raza sferei înscrise în tetraedru.

a) $\frac{V}{A}$; b) $\frac{2V}{A}$; c) $\frac{3V}{A}$; d) $\frac{V}{3A}$; e) $\frac{V}{2A}$; f) $\frac{2V}{3A}$.

Soluţie. Fie r raza sferei înscrise în tetraedru. Unind centrul sferei cu vârfurile fiecărei feţe a tetraedrului, se obţin patru tetraedre - fiecare de volum $\frac{\sigma \cdot r}{3}$, unde σ este aria unei feţe. Suma celor patru volume este $\mathcal{V}$, deci $r = \frac{3\mathcal{V}}{\mathcal{A}}$.

16. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Să se calculeze $\cos A$, dacă $a = \dfrac{7c}{3}$ şi $b = \dfrac{8c}{3}$.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $-\frac{1}{4}$; f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Soluţie. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul dat, obţinem

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(8c/3)^2 + c^2 - (7c/3)^2}{2 \cdot (8c/3) \cdot c} = \frac{64 + 9 - 49}{9} \cdot \frac{3}{16} = \frac{24}{9} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{2}.$$

17. Să se calculeze aria triunghiului ale cărui vârfuri au afixele

$$z_1 = 2 + i, \; z_2 = 2 - i, \; z_3 = i.$$

a) $\sqrt{2}$; b) 4; c) $\frac{1}{2}$; d) $2\sqrt{2}$; e) 3; f) 2.

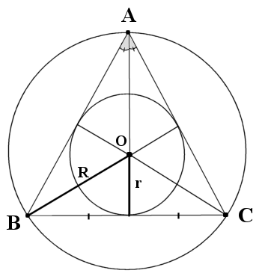
Soluţie. Coordonatele vârfurilor triunghiului asociat celor trei numere complexe, sunt $(2,1), (2,-1), (0,1)$, deci folosind formula ariei cu determinant, rezultă

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|-4| = 2.$$

18. Se dă o coroană circulară de raze R, r $(R > r)$. Cercul mic este înscris, iar cercul mare este circumscris aceluiaşi triunghi. Să se calculeze raportul R/r.

a) 8; b) problema nu are soluţie; c) $\sqrt{3}$; d) 2; e) $\sqrt{2}$; f) 3.

Soluţie. Dacă O este cercul centrului circumscris, acesta coincide din ipoteză cu centrul cercului înscris în triunghi (vezi figura).



Prin urmare în triunghi mediatoarele coincid respectiv cu bisectoarele, deci sunt şi mediane, şi înălţimi. Deci triunghiul este echilateral, iar înălţimea sa este împărţită de centrul său de greutate O în raportul $\frac{R}{r} = \frac{2}{1} = 2$.