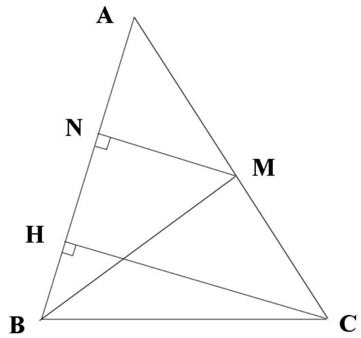
1. Într-un triunghi ascuţitunghic ABC, înălţimea CH are aceeaşi lungime cu mediana BM. Să se determine măsura unghiului $\widehat{MBA}$.

   a) 60^o; b) 45^o; c) 40^o; d) 30^o; e) $67^o30'$; f) $22^o30'$.

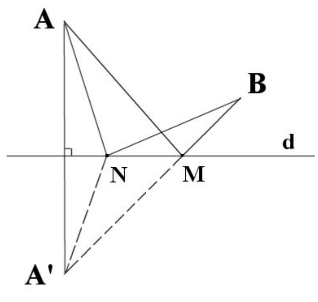
   Soluţie. Fie N proiecţia lui M pe AB. M este mijlocul lui AC, deci $MN = \frac{1}{2}CH$. Se observă că $MN||CH$ deoarece MN este linie mijlocie pentru $\triangle AHC$. Deci $MN = \frac{1}{2}BM$ şi deci $\sin(\widehat{MBA}) = \frac{MN}{BM} = \frac{MN}{CH} = \frac{1}{2}$ rezultă $\widehat{MBA} = 30°$.



2. În plan se consideră o dreaptă d şi două puncte distincte A, B situate de aceeaşi parte a lui d. Dacă pentru punctul $M \in d$ suma $AM+MB$ este minimă, atunci

   a) AM şi BM fac acelaşi unghi ascuţit cu d; b) $m(\widehat{AMB}) = 60^o$;
   c) $AM \equiv MB$; d) $AM \perp d$; e) $m(\widehat{AMB}) = 90^o$; f) $BM \perp d$.

   Soluţie. Fie A' simetricul lui A faţă de dreapta d şi fie M intersecţia lui $A'B$ cu d (vezi desenul). Dacă $N \in d$, atunci $NA = NA'$. Dar $MA = MA'$, deci folosind inegalitatea laturilor triunghiului în $\Delta A'NB$, avem $NA + NB = NA' + NB \geq A'B = AM + MB$, cu egalitate pentru $N = M$ (când triunghiul degenerează într-un segment). Înălţimea în triunghiul isoscel AMA' fiind şi bisectoare, rezultă că MA şi MA' fac acelaşi unghi ascuţit cu d, deci AM şi BM fac acelaşi unghi ascuţit cu d.



3. Să se determine perioada principală pentru funcţia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin\frac{2x}{3} + \cos\frac{x}{2}.$$

   a) 4π; b) 3π; c) 12π; d) 9π; e) 2π; f) 6π.

   Soluţie. Fie $T > 0$ o perioadă pentru f. Avem $f(x+T) = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$ şi deci $\sin(\frac{2x}{3} + \frac{2T}{3}) + \cos(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}) = \sin\frac{2x}{3} + \cos\frac{x}{2}$. Derivând de două ori, obţinem

$$\frac{4}{9}\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{2T}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}\right) = \frac{4}{9}\sin\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}.$$

Rezultă $\sin(\frac{2x}{3}+\frac{2T}{3})=\sin\frac{2x}{3}$ şi $\cos(\frac{x}{2}+\frac{T}{2})=\cos\frac{x}{2}$ şi apoi $\frac{2T}{3}=2k\pi, \frac{T}{2}=2h\pi, k,h\in\mathbb{Z}$. Avem $T=3\pi k=4h\pi \Leftrightarrow 3k=4h$. Minimul lui k este 4 (se obţine $h_0=3$) şi deci minimul lui T este 12π.

4. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x+\cos x=\sqrt{3}$.

   a) $\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; b) $\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; c) $\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$; d) $\mathbb{R}$;
   e) mulţimea vidă; f) $\frac{\pi}{6}$.

   Soluţie. Avem succesiv: $\sin x+\cos x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}}{2}>1$, şi prin urmare ecuaţia nu are soluţii. *Altfel.* Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem

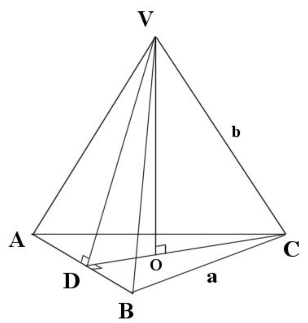
$$(\sin x+\cos x)^2=3\Rightarrow 1+2\sin x\cos x=3\Leftrightarrow\sin 2x=2>1,$$

   deci ecuaţia nu are soluţii.

5. Într-o piramidă triunghiulară regulată cu vârful V, lungimea laturii bazei este a şi a muchiei laterale b $(0<a<b\sqrt{3})$. Să se determine aria secţiunii duse printr-o muchie laterală şi prin înălţimea din V.

   a) $\frac{a}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$; b) $\sqrt{3b^4-a^4}$; c) $\frac{a}{3}\sqrt{3b^2-a^2}$; d) $\frac{a}{2}\sqrt{3b^2-a^2}$; e) $\frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; f) $\frac{ab}{2}$.

   Soluţie. Secţiunea este triunghiul VDC (vezi desenul) a cărui bază este segmentul CD, de lungime egală cu înălţimea triunghiului echilateral de latură $a=AB$, deci $CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. În triunghiul echilateral ABC avem $OC=\frac{2}{3}CD=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOC, obţinem înălţimea triunghiului VDC, $VO=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$. Aria triunghiului de secţiune VDC este deci $\frac{1}{2}\cdot DC\cdot VO=\frac{a}{4}\sqrt{3b^2-a^2}$.



6. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

   a) $\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$; b) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$; c) $\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4}$; d) $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$;
   e) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Avem $z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\dfrac{3+2\sqrt{3}i-1}{3+1}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

7. Să se calculeze $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

   a) $\frac{\pi}{6}+k\pi$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{5\pi}{6}$; d) $\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.

   Soluţie. Avem succesiv $\arcsin(\sin\frac{5\pi}{6})=\arcsin(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$.

8. Să se determine $x\in(0,\pi)$ dacă $(x-4)\sin 2x=0$.

   a) 4 şi $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{k\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$; e) $\frac{3\pi}{2}$; f) 0.

   Soluţie. Avem $(x-4)\sin 2x=0\Leftrightarrow x=4$ sau $2x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Dar $x\in(0,\pi)$, deci $x=\frac{\pi}{2}$.

9. Volumul trunchiului de con circular drept având razele bazelor 5 şi 2, iar generatoarea 5, este

   a) 26π; b) 50π; c) 14π; d) 42π; e) 5π; f) 52π.

   Soluţie. Avem $h=\sqrt{a^2-(R-r)^2}=\sqrt{25-9}=4$ şi deci $V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)=52\pi$.

10. Aria hexagonului convex regulat cu lungimea laturii $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ este

a) 2; b) 18; c) $6\sqrt{3}$; d) 6; e) $\frac{9}{8}$; f) $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Aria hexagonului de latură a este $S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Pentru $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$ rezultă $S = 6 \cdot \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}}{4} = 6$.

11. Un plan determină pe o sferă de rază R două calote sferice cu raportul ariilor $\frac{1}{3}$. Să se determine raza cercului de secţiune.

a) $R\sqrt{2}$; b) $\frac{R}{2}$; c) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{R}{3}$; e) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$; f) R.

Soluţie. Fie h înălţimea calotei mici. Avem $\frac{2\pi Rh}{2\pi R(2R-h)} = \frac{1}{3}$ şi deci $h = \frac{R}{2}$. Raza cercului de secţiune este $r = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

12. Să se calculeze raportul dintre aria cercului înscris şi aria cercului circumscris unui pătrat.

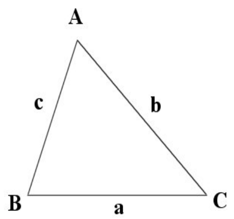
a) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; f) 2.

Soluţie. Dacă latura pătratului este a, atunci razele celor două cercuri sunt $\frac{a}{2}$ şi $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ iar raportul este $\frac{\pi(\frac{a}{2})^2}{\pi(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{2}$.

13. Dacă într-un triunghi ABC avem $\sin A = \sin B + \sin C$, atunci

a) triunghiul este isoscel; b) $m(\hat{A}) = 105^o$; c) triunghiul este dreptunghic;
d) triunghiul este echilateral; e) nu există un astfel de triunghi; f) $m(\hat{A}) = 75^o$.

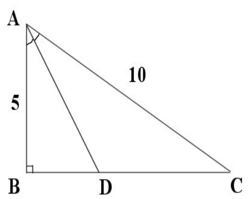
Soluţie. Fie a, b, c laturile triunghiului (vezi desenul). Din teorema sinusului $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, rezultă egalitatea $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C}$, deci relaţia din enunţ devine $a = b + c$, ceea ce contrazice inegalitatea triunghiului $a < b + c$. Deci nu există un astfel de triunghi.



14. Fie un triunghi ABC cu $AB = 5, AC = 10$ şi $m(\widehat{BAC}) = 60^o$.
Să se calculeze lungimea bisectoarei din A.

a) 3; *b*) 4; c) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$; d) $5\sqrt{3}$; e) 6; f) $\frac{14}{3}$.

Soluţie. Notând cu l_a lungimea bisectoarei AD din dusă din A şi $b = AC$, $c = AB$, are loc relaţia $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. Obţinem $l_a = \frac{2\cdot5\cdot10}{15}\cos 30° = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

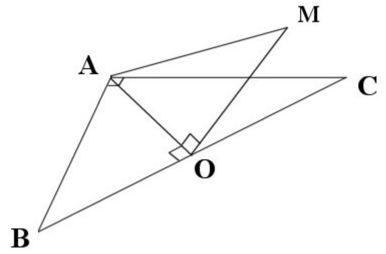


Altfel. Aplicăm teorema cosinusului în ΔABC şi obţinem $BC = \sqrt{5^2 + 10^2 - 2\cdot5\cdot10\cdot\cos 60°} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$. Dar numerele $5, 10, 5\sqrt{3}$ sunt pitagoreice, deci ΔABC este dreptunghic cu $\hat{B} = 90°$. Atunci, deoarece AD este bisectoare în triunghiul dreptunghic ABD (vezi desenul), avem $\widehat{BAD} = 30°$, deci $AD = \frac{AB}{\cos\widehat{BAD}} = \frac{5}{\sqrt{3}/2} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

15. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel ABC $(AB \equiv AC)$. Atunci mulţimea tuturor punctelor M din spaţiu pentru care are loc relaţia $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ este

a) sfera de diametru BC; b) reuniunea a două plane; c) ipotenuza $[BC]$; d) dreapta BC; e) un plan; f) mulţimea vidă.

Soluţie. Fie O mijlocul lui BC. Din teorema medianei, avem $MO^2 = \frac{MB^2+MC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$. Relaţia $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ se scrie $2MO^2 + \frac{BC^2}{2} = 2MA^2$. Folsind $\frac{BC}{2} = AO$, rezultă $MA^2 - MO^2 = \frac{BC^2}{4} = AO^2$, deci $MA^2 = MO^2 + AO^2$, care implică $MO \perp AO$.



Dar $AO \perp BC$, deci $AO \perp (MBC)$ şi locul geometric al punctului M este planul perpendicular în O pe AO.