1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine numerele reale a şi b dacă $AB = BA$.

   a) $a = 2,\ b = 0$; b) $a = 1,\ b = 1$; c) $a = -2,\ b = 0$; d) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$; e) $a = 2,\ b = 2$; f) $a \in \mathbb{R},\ b = 0$.

   Soluţie. Avem $AB = BA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b+4 = 2a+b$, adică $a = 2, b \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuaţia $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

   a) 0; b) $\ln 3$; c) 1; d) 0 şi 1; e) -1; f) nu are soluţii.

   Soluţie. Notăm $3^x = y$ şi avem $y > 0$ si $y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y \in \{1, 3\}$. Atunci $y = 1 \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, sau $y = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$. În concluzie $x \in \{0, 1\}$.

3. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$.

   a) 1; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{2}\ln 2$; e) -1; f) $\ln 2$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt[3]{x} = x$.

   a) 1; b) 0; c) 0, 1, i; d) 0, 1; e) 1, -1; f) 0, 1, -1.

   Soluţie. Prin ridicare la cub obţinem $\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow x = x^3 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$.

5. Să se calculeze $C_6^4 + A_5^2$.

   a) 35; b) 102; c) 10; d) 15; e) 20; f) 25.

   Soluţie. Cum $C_6^4 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$ si $A_5^2 = 5\cdot 4 = 20$, rezultă $C_6^4 + A_5^2 = 35$.

6. Să se determine abscisele punctelor de extrem local ale funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad f(x) = x^3 - 3x$.

   a) 0, -1; b) 0, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; c) 0; d) 1, -1; e) $\sqrt{3}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 3x^2 - 3$ şi deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Deoarece semnul lui f' se schimbă în $x_1 = -1, x_2 = 1$, rezultă că abscisele căutate sunt -1 şi 1.

7. Să se aşeze în ordine crescătoare numerele 1, $\ln 2$, $\ln 3$, π.

   a) $\ln 2,\ 1,\ \ln 3,\ \pi$; b) $1,\ \ln 2,\ \pi,\ \ln 3$; c) $\ln 2,\ \ln 3,\ 1,\ \pi$;
   d) $1,\ \ln 3,\ \pi,\ \ln 2$; e) $1,\ \ln 2,\ \ln 3,\ \pi$; f) $1,\ \pi,\ \ln 2,\ \ln 3$.

   Soluţie. Avem $2 < e < 3 < e^\pi$ şi deci logaritmând şirul de inegalităţi $\ln 2 < 1 < \ln 3 < \pi$.

8. Să se determine m real dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + m, & x \le 1 \\ m^2 x + 2, & x > 1 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$.

   a) 2; b) nu există; c) 0 şi 1; d) -1; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Funcţia f este continuă pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Continuitatea în $x = 1$ are loc d.n.d. $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 2 + m = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = m^2 + 2 = f(1) \Leftrightarrow m^2 + 2 = 2 + m \Rightarrow m \in \{0, 1\}$.

9. Să se calculeze $\sqrt{a^2 - b^2}$ pentru $a = 242,5$ şi $b = 46,5$.

   a) 196; b) $\sqrt{46640}$; c) 240,75; d) 283; e) 238; f) 238,25.

   Soluţie. Avem $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(242.5 - 46.5)(242.5 + 46.5)} = \sqrt{196 \cdot 289} = \sqrt{14^2 \cdot 17^2} = 238$.

10. Să se determine m real dacă ecuaţia $x^2-(m+3)x+m^2=0$ are două soluţii reale şi distincte.

a) $m\in(-\infty,3)$; b) $m\in\mathbb{R}$; c) $m=-3$;
d) $m\in(3,\infty)$; e) $m\in(-\infty,-1)$; f) $m\in(-1,3)$.

Soluţie. Condiţia este $\triangle>0$ adică

$$(m+3)^2-4m^2>0\Leftrightarrow(m+3-2m)(3+m+2m)>0\Leftrightarrow m\in(-1,3).$$

11. Fie funcţia $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\quad f(x)=x\cdot\ln(x+1)$. Să se calculeze $f(1)+f'(0)$.

a) 0; b) $\ln 2$; c) 1; d) $1+\ln 2$; e) ∞; f) $\ln 3$.

Soluţie. Cum $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, rezultă $f'(0)+f(1)=\ln 1+0+\ln 2=\ln 2$.

12. Să se determine m real dacă $m\cdot\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}e^{mx^2+\ln x}dx=1$.

a) $\ln 2$; b) 2; c) 4; d) $\ln\frac{1}{2}$; e) 1; f) 3.

Soluţie. Produsul din membrul stâng al relaţiei fiind nenul, rezultă în particular $m\neq 0$. De asemenea, varabila $x\in[1,\sqrt{2}]$ din integrala definită este strict pozitivă. Deoarece $e^{\ln x}=x$, folosind schimbarea de variabilă $y=mx^2$ (definită de o bijecţie pentru pentru $x>0$), rezultă

$$I=m\int_1^{\sqrt{2}}e^{mx^2}xdx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}e^{mx^2}(mx^2)'dx=\frac{1}{2}e^{mx^2}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\left(e^{2m}-e^m\right),$$

deci, ţinând cont de faptul că $e^m>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$, obţinem

$$\frac{1}{2}(e^{2m}-e^m)=1\Leftrightarrow(e^m)^2-e^m-2=0\Leftrightarrow e^m\in\{-1,2\}\cap(0,\infty)=\{2\}\Leftrightarrow e^m=2\Leftrightarrow m=\ln 2.$$

13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^2}+\frac{2^2}{n^3+2^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^2}\right).$$

a) nu există; b) 2; c) 1; d) 0; e) ∞; f) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Avem $\frac{k^2}{n^3+n^2}\leq\frac{k^2}{n^3+k^2}\leq\frac{k^2}{n^3+1}$ şi deci sumând pentru $k\in\{1,\cdots,n\}$, rezultă

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}=\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+n^2}\leq\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3+k^2}\leq\frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+n^2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3+1)}=\frac{1}{3},$$

deci conform criteriului cleştelui, obţinem $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{k^2}{n^3+k^2}=\frac{1}{3}$.

14. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=0$.

a) $-\frac{1}{2}$, 1; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 1; e) $\frac{1}{2}$, 1; f) $-\frac{1}{2}$, 0.

Soluţie. Avem

$$\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+1&2x+1&2x+1\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=(2x+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\x&1-x&0\\x&0&1-x\end{vmatrix}=(2x+1)(1-x)^2.$$

Deci ecuaţia se rescrie $(x-1)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$.

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}$.

a) $\frac{5}{3}$; b) $-\infty$; c) $\frac{4}{5}$; d) 0; e) $\frac{4}{3}$; f) $-\frac{3}{2}$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-4x^2-3x+18}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x+2)}=\dfrac{4}{5}$.

16. Să se calculeze valoarea expresiei $E=\dfrac{x_2+x_3}{x_1}+\dfrac{x_1+x_3}{x_2}+\dfrac{x_1+x_2}{x_3}$, unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt soluţiile ecuaţiei $x^3-6x^2+x+2=0$.

a) -3; b) -1; c) -6; d) 3; e) 0; f) 1.

Soluţie. Observăm că rădăcinile sunt nenule. Folosim relaţiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1\\ x_1x_2x_3=-2\end{cases}$.

Rezultă $x_2+x_3=6-x_1$ şi $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{1}{2}$. Atunci

$$\begin{aligned} E &= \tfrac{x_2+x_3}{x_1}+\tfrac{x_1+x_3}{x_2}+\tfrac{x_1+x_2}{x_3}=\tfrac{6-x_1}{x_1}+\tfrac{6-x_2}{x_2}+\tfrac{6-x_3}{x_3}=\\ &=6\left(\tfrac{1}{x_1}+\tfrac{1}{x_2}+\tfrac{1}{x_3}\right)-3=6\left(-\tfrac{1}{2}\right)-3=-6.\end{aligned}$$

17. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a integralei $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ pentru a, b reale.

a) $\frac{8}{45}$; b) $\frac{1}{45}$; c) $\frac{4}{5}$; d) 1; e) 8; f) $\frac{5}{4}$.

Soluţie.

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{-1}^{1}(x^4-2bx^3+(b^2-2a)x^2+2abx+a^2)dx=\frac{2}{5}+\frac{2(b^2-2a)}{3}+2a^2=\\ &=2a^2-\tfrac{4a}{3}+\tfrac{2}{5}+\tfrac{2b^2}{3}=2\left(a-\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{2b^2}{3}+\tfrac{8}{45}\geq\tfrac{8}{45},\end{aligned}$$

şi deci minimul căutat este $\frac{8}{45}$.

18. Se consideră funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $\quad f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\searrow 0}f^{(n)}(x).$$

a) 2; b) 0; c) e; d) 1; e) $\frac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}}$; f) nu există.

Soluţie. Determinăm $\lim\limits_{x\searrow 0}f^{(n)}(x)$. Prin derivare, se observă că are loc egalitatea $4xf''(x)+2f'(x)=f(x)$, deci iterând obţinem $2f^{(n-1)}(x)+4[xf^{(n)}(x)+(n-2)f^{(n-1)}(x)]=f^{(n-2)}(x)$. Pentru $x\searrow 0$, aceasta conduce la $(4n-6)\lim\limits_{x\searrow 0}f^{(n-1)}(x)=\lim\limits_{x\searrow 0}f^{(n-2)}(x)$, de unde obţinem $\lim\limits_{x\searrow 0}f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2^{n-1}(2n-1)!!}$ şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{x\searrow 0}f^{(n)}(x))=0$.