1. Fie s suma pătratelor lungimilor laturilor unui paralelogram şi d suma pătratelor lungimilor diagonalelor sale. Atunci

   a) $s = 2d$; b) $s < d$; c) $s = 4d$; d) $s > d$; e) $s = 3d$; f) $s = d$.

   Soluţie. Fie $ABCD$ paralelogramul din enunţ, iar O punctul de intersecţie al diagonalelor. Atunci, O fiind mijlocul diagonalei BD, folosind teorema medianei în $\triangle ABD$ pentru mediana OA rezultă

   $$OA^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow$$
   $$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2) = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2.$$

   Prin urmare $s = d$.

   Altfel. Aplicăm teorema cosinusului în triunghiurile ΔABC şi ΔBCD. Obţinem

   $$AB^2 + BC^2 = AC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \hat{B}$$

   şi respectiv

   $$BC^2 + CD^2 = BD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \hat{C}.$$

   Dar $\hat{B} = \pi - \hat{C}$, deci $\cos \hat{C} = -\cos \hat{B}$, iar $AB = CD$ şi $BC = DA$, deci a doua egalitate devine

   $$CD^2 + DA^2 = BD^2 + 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos \hat{C}.$$

   Adunând această egalitate cu prima (termen cu termen), obţinem

   $$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2,$$

   deci $s = d$.

2. Într-un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$) se cunoaşte cateta $AB = 3$ şi $\hat{C} = 60^0$. Calculaţi perimetrul triunghiului.

   a) $4 - \sqrt{3}$; b) $4\sqrt{3}$; c) $1 + \sqrt{3}$; d) $3(1 + \sqrt{3})$; e) $3(4 - \sqrt{3})$; f) 10.

   Soluţie. Avem $AC = 3\operatorname{ctg} 60° = \sqrt{3}$ şi $BC = \frac{AB}{\sin 60°} = 2\sqrt{3}$, deci perimetrul este $3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3(1 + \sqrt{3})$. *Observaţie.* Precizarea din enunţ $\hat{A} = 90°$ nu este esenţială. Triunghiul fiind dreptunghic, singura alternativa $\hat{B} = 90°$ conduce la acelaşi rezultat.

3. Unghiurile exterioare ale unui triunghi au măsurile α, β, γ. Dacă $\alpha + \beta = 3\gamma$, atunci triunghiul este

   a) echilateral; b) cu laturile în progresie aritmetică; c) isoscel; d) cu un unghi de 120^0; e) ascuţitunghic; f) dreptunghic.

   Soluţie. Fie A, B, C măsurile interioare ale unghiurilor triunghiului. Atunci $\gamma = A + B, \beta = A + C, \alpha = B + C$. Sumând cele trei egalităţi termen cu termen, obţinem $\alpha + \beta + \gamma = 2(A + B + C) = 360°$. Folosind relaţia din enunţ $\alpha + \beta = 3\gamma$, rezultă $4\gamma = 360° \Rightarrow \gamma = 90°$, deci triunghiul este dreptunghic.

4. Dacă $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ şi $\sin\, \alpha = \frac{1}{3}$, atunci tg α este

   a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$; d) $\sqrt{3}$; e) $-\sqrt{3}$; f) $\sqrt{2}$.

   Soluţie. Cum $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos \alpha < 0$. Avem $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ si $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

5. Prin secţionarea unei piramide patrulatere regulate cu un plan paralel cu baza se obţine un trunchi de piramidă în care raportul dintre lungimile laturilor bazei mici şi bazei mari este $\frac{3}{5}$. Ştiind că volumul piramidei este 125, volumul trunchiului de piramidă este

   a) 105; b) 98; c) $48\sqrt{2}$; d) 96; e) 102; f) 100.

   Soluţie. Notăm volumul piramidei mari (al piramidei iniţiale care este secţionată) cu V_M, iar volumul piramidei mici (piramida rezultată prin secţionare) cu V_m. Cele două piramide sunt asemenea şi raportul volumelor este $\frac{V_m}{V_M} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$. Dacă $V_M = 125$, rezultă $V_m = 27$, deci volumul trunchiului de piramidă este $V_M - V_m = 98$.

6. Să se determine suma lungimilor bazelor unui trapez, ştiind că linia sa mijlocie are lungimea 15.

a) 18; b) 20; c) 16; d) 30; e) 15; f) 24.

Soluţie. Avem $m = \frac{b+B}{2} = 15$ (unde $m =$linia mijlocie, $b =$baza mică, $B =$baza mare), deci $b+B = 30$.

7. Dacă $\sin^2 15^0 + \cos^2 15^0 = (y+1)(y-2)$, $y > 0$, atunci y este egal cu

a) $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; b) $\frac{1}{7}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{13}$; e) $\sin 15^0$; f) $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Soluţie. Avem $(y+1)(y-2) = 1 \Leftrightarrow y^2 - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$. Cum $y > 0$, rezultă $y = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

8. Un con şi un cilindru au acelaşi volum. Ştiind că înălţimile lor sunt egale, calculaţi raportul dintre raza conului şi raza cilindrului.

a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{5}{4}$; c) $\sqrt{3}$; d) $\frac{3}{2}$; e) $\sqrt{5}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. Avem $R_1 =$raza conului, $R_2 =$raza cilindrului $\Rightarrow V_1 = \frac{\pi R_1^2 h}{3} = \pi R_2^2 h \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = 3 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \sqrt{3}$.

9. Aflaţi aria unui trapez isoscel având baza mică 6, baza mare 8 şi diagonalele perpendiculare.

a) $14\sqrt{2}$; b) 25; c) 49; d) 36; e) 64; f) $12\sqrt{3}$.

Soluţie. Fie M si N mijloacele bazelor mici şi respectiv mari (AD *si* BC) ale trapezului isoscel $ABCD$. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor, atunci M, O, N sunt coliniare, iar triunghiurile AOD şi BOC sunt triunghiuri dreptunghice isoscele cu vârful unghiului drept in O. Avem $OM = \frac{AD}{2} = 3, ON = \frac{BC}{2} = 4$. Deci $MN = 7$. Cum MN este înălţime, rezultă

$$S = \frac{(AB+DC)}{2} MN = 7 \cdot 7 = 49.$$

10. Valoarea expresiei $E = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$ este

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) 1.

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} 2E\sin\tfrac{\pi}{7} &= 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{2\pi}{7} + 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{4\pi}{7} + 2\sin\tfrac{\pi}{7}\cos\tfrac{6\pi}{7} = \\ &= \sin\tfrac{3\pi}{7} - \sin\tfrac{\pi}{7} + \sin\tfrac{5\pi}{7} - \sin\tfrac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\tfrac{5\pi}{7} = \\ &= -\sin\tfrac{\pi}{7} + \sin\pi = -\sin\tfrac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

Deci $2E\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow E = -\frac{1}{2}$.

11. Se consideră un patrulater convex $ABCD$ în care $AB \equiv CD$. Se cere locul geometric al punctelor M din planul patrulaterului ce satisfac relaţia $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$.

a) un cerc tangent la AB şi CD; b) o semidreaptă; c) o dreaptă; d) două drepte paralele; e) un singur punct; f) mulţimea vidă.

Soluţie. Fie E mijlocul lui AB, F mijlocul lui CD. Din teorema medianei pentru mediana ME în triunghiul MAB şi mediana MF în triunghiul MCD, avem

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4},\ MF^2 = \frac{MC^2 + MD^2}{2} - \frac{CD^2}{4}.$$

Dar $MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$ si $AB = DC$, deci $ME = MF$. Reciproc, pentru un punct M ales astfel încât $ME = MF$ se arată că are loc egalitatea din enunţ. Prin urmare locul geometric căutat este mediatoarea segmentului EF.

12. Fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD ale patrulaterului convex $ABCD$. Dacă $AO = 2OC$ şi $OB = 2OD$, să se calculeze raportul $\frac{\text{aria }(ABCD)}{\text{aria }(DOC)}$.

a) 5; b) 7; c) 8; d) 4; e) 9; f) 3.

Soluţie. Avem $\widehat{AOB} = \alpha$, $OC = x$, $OD = y$. Rezultă $m(\widehat{AOD}) = \pi - \alpha$ şi $S_{AOB} = \frac{2x2y\sin\alpha}{2} = 2xy\sin\alpha$, $S_{AOD} = S_{BOC} = xy\sin\alpha$, $S_{DOC} = \frac{xy\sin\alpha}{2}$. In final obţinem $S_{ABCD} = \frac{9}{2}xy\sin\alpha = 9S_{DOC}$, deci $\frac{S_{ABCD}}{S_{DOC}} = 9$.

13. Într-un cerc de rază R se înscrie un triunghi echilateral. Aria triunghiului este

a) $\frac{R^2\sqrt{3}}{6}$; b) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$; e) $3R^2\sqrt{3}$; f) $\frac{2R^2\sqrt{3}}{3}$.

Soluţie. Latura triunghiului echilateral înscris în cercul de rază R este $a = R\sqrt{3}$, deci rezultă aria triunghiului $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$. *Altfel.* Considerăm punctele A', B', C' pe cerc astfel încât $AA'BB'CC'$ să fie hexagon regulat. Dacă O este centrul cercului, atunci au loc congruenţele de triunghiuri (cazul LUL): $\Delta OAB \equiv \Delta A'AB$, $\Delta OBC \equiv \Delta B'BC$ şi $OCA \equiv \Delta C'CA$. Triunghiurile din ştânga partiţionează triunghiul dat, iar toate cele 6 triunghiuri - hexagonul. Deci aria triunghiului dat ΔABC este jumătate din aria hexagonului $AA'BB'CC'$. O altă partiţie a hexagonului este realizată de triunghiurile echilaterale congruente $\Delta OAA', \Delta OA'B, \Delta OBB', \Delta OB'C, \Delta OCC', \Delta OC'A$, care au toate laturile egale cu R, deci aria $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. Atunci aria hexagonului este $6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$ şi prin urmare aria triunghiului ΔABC este $\frac{1}{2} \cdot \frac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

14. Fie O punctul de intersecţie al mediatoarelor unui triunghi oarecare. Atunci O este

a) ortocentrul; b) situat în exteriorul triunghiului; c) un vârf al triunghiului;
d) egal depărtat de laturile triunghiului; e) centrul de greutate; f) egal depărtat de vârfurile triunghiului.

Soluţie. Punctul O este egal depărtat de vârfurile triunghiului.

15. Raportul dintre măsura unui unghi înscris într-un cerc şi măsura arcului cuprins între laturile sale este

a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) 1; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{2}{3}$.

Soluţie. Fie $\widehat{MAN}$ acest unghi. Măsura sa este jumătate din măsura arcului de cerc MN opus vârfului A, care prin definiţie este măsura unghiului la centru $\widehat{MON}$ care subântinde acest arc. Prin urmare, raportul este $\frac{1}{2}$.

16. Volumul piramidei determinate de trei muchii concurente ale unui cub de latură a este

a) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$; b) $\frac{2a^3}{3}$; c) $\frac{a^3}{2}$; d) $a^3\sqrt{2}$; e) $\frac{a^3}{6}$; f) $\frac{a^3}{3}$.

Soluţie. Volumul este $V = \frac{\frac{a^2}{2}a}{3} = \frac{a^3}{6}$.

17. Dacă în triunghiul ABC avem $AB = \sqrt{13},\ BC = 3,\ \hat{C} = 60^0$, atunci

a) $AC = 2$; b) $AC = 3\sqrt{3}$; c) $AC = 4\sqrt{2}$; d) $AC = 3\sqrt{2}$; e) $AC = 4\sqrt{3}$;
f) $AC = 4$.

Soluţie. Din teorema cosinusului pentru unghiul $\widehat{C}$ în triunghiul ABC, obţinem $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 60°$, deci notând $AC = x > 0$, rezultă

$$13 = x^2 + 9 - 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 4\}.$$

Convine doar soluţia pozitivă, deci $AC = x = 4$.

18. Să se calculeze $z = \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^6$.

a) $z = -8\mathrm{i}$; b) $z = 2^3$; c) $z = 2^3(1+\mathrm{i})$; d) $z = 2^5\sqrt{2}(1+\mathrm{i})$; e) $z = 2^3(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$; f) $z = 2^3(1-\mathrm{i})$.

Soluţie. Scriem numărătorul şi numitorul fracţiei in forma trigonometrică:

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right),$$

deci folosind formula lui Moivre, rezultă

$$z = \frac{2^6(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)}{\sqrt{2}^6\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)} = \frac{8}{i} = -8i.$$

Altfel, algebric, folosim binomul lui Newton, avem $(1+i\sqrt{3})^3 = -8$, iar $(1-i)^2 = -2i$. Atunci $\left[\frac{(1+i\sqrt{3})}{1-i}\right]^6 = \frac{(-8)^2}{(-2i)^3} = \frac{64}{8i} = \frac{8}{i} = -8i$.