1. Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$.

   a) $L=-1$; b) $L=1$; c) $L=\infty$; d) $L=2$; e) $L=0$; f) nu există.

   Soluţie.

$$L = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2-n-1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = 0$$

2. Să se determine suma S a coeficienţilor polinomului $f=\left(8X^3-7\right)^4$.

   a) $S=0$; b) $S=3$; c) $S=1$; d) $S=2$; e) $S=2^{10}$; f) $S=-2$.

   Soluţie. Suma coeficienţilor polinomului $f=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ este $a_0+\ldots+a_n = f(1)$. În cazul de faţă $f(1)=(8-7)^4=1$.

3. Să se calculeze $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008}$.

   a) 0,3; b) 0,5; c) 0,1; d) $\frac{1}{3}$; e) −0,1; f) 0.

   Soluţie. Avem $\sqrt{0,09}-\sqrt[3]{0,008} = \sqrt{\frac{9}{100}}-\sqrt[3]{\frac{8}{1000}} = \frac{3}{10}-\frac{2}{10}=\frac{1}{10}=0,1\,.$

4. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x>0\\ 2x+a, & x\le 0\end{cases}$ este continuă dacă

   a) $a=1$; b) $a=2$; c) $a\in\mathbf{R}$; d) $a=0$; e) $a=-1$; f) $a=\frac{3}{2}$.

   Soluţie. Restrictiile funcţiei f la intervalele $(-\infty,0)$ şi $(0,\infty)$ sunt continue deoarece acestea sunt funcţii polinomiale. Pentru punctul $x=0$ avem condiţiile

$$f(0)=\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} f(x) \Leftrightarrow a=1,$$

   deci f continua d.n.d. $a=1$.

5. Să se determine $m\in\mathbb{R}$ dacă ecuaţia $|\ln x| = mx$ are trei soluţii reale şi distincte.

   a) $m\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$; b) $m>\frac{1}{e}$; c) $m=\frac{1}{e}$; d) $m<\frac{1}{e}$; e) $m=e$; f) $m>0$.

   Soluţie. Existenta logaritmului cere condiţia $x\in(0,\infty)$. Ecuaţia se rescrie sub forma $\frac{|\ln x|}{x}=m$, şi are soluţii d.n.d. $m\in \operatorname{Im} g$, unde $g(x)=\frac{|\ln x|}{x}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, deci

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{\ln x}{x}, & x\in(0,1]\\ \frac{\ln x}{x}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

   Funcţia g este compunere de funcţii continue, deci continuă. Folosind substituţia $x=e^t$, rezultă

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{t\to-\infty} -\frac{t}{e^t}=\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0,$$

   iar $g(1)=0$. Avem $g'_s(1)=-1\neq g'_d(1)=1$ şi

$$g'(x)=\begin{cases} \frac{-\ln x\cdot(1-\ln x)}{x^2}, & x\in(0,1)\\ \frac{\ln x\cdot(1-\ln x)}{x^2}, & x\in(1,+\infty).\end{cases}$$

   Se observă că $g'(x)=0\Leftrightarrow x=e$ iar $g(e)=\frac{1}{e}$. Avem deci tabelul de variaţie al funcţiei g.

x	0		1		e		∞
$g'(x)$	−	−	$-1\vert 1$	+	0	−	−
$g(x)$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

   Deci ecuaţia are $g(x)=m$ are 3 rădăcini distincte d.n.d. $m\in(0,\frac{1}{e})$.

6. Să se scrie în ordine crescătoare numerele: $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{5} - 2,\ c = 1$.

a) a, b, c; b) c, a, b; c) c, b, a; d) b, c, a; e) b, a, c; f) a, c, b.

Soluţie. Avem $a = \sqrt{3} - 1, b = \sqrt{5} - 2, c = 1$. Obţinem $a > 1.7 - 1 = 0.7$ şi $a < 1.8 - 1 = 0.8$ iar $b < 2.3 - 2 = 0.3$, deci $b < 0.3 < 0.7 < a < 0.8 < 1 = c$. Prin urmare cele trei numere scrise în ordine crescătoare sunt b, a, c.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$. Atunci $f'(1)$ este

a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$; f) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ şi deci

$$f'(1) = \frac{3}{3\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$$

8. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ să admită numai soluţia nulă (banală).

a) $m \neq -1$ şi $m \neq 2$; b) $m = 0$; c) $m = 2$; d) $m \in \mathbb{R}$; e) nu există; f) $m = -1$.

Soluţie. Sistemul este omogen, deci compatibil (admite soluţii). Pentru ca sistemul să aibă soluţie unică, este necesar şi suficient ca determinantul D al matricei coeficienţilor să fie nenul, $D = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Adunăm prima coloana la coloana a doua şi a treia, dezvoltăm D după linia a treia şi obţinem condiţia $(m + 1)(3 - m - 1) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

9. Să se calculeze limita $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$.

a) $L = \frac{2}{3}$; b) $L = \frac{4}{9}$; c) $L = \infty$; d) nu există; e) $L = -1$; f) $L = 0$.

Soluţie. Avem

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2 \left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)^2 \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}.$$

10. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sqrt[3]{x - 1} - x = -1$ este

a) $\{0\}$; b) $\{1,\ 2,\ 3\}$; c) $\varnothing$; d) $\{0,\ 1,\ 2\}$; e) $\{-1, 0, 1\}$; f) $\{1\}$.

Soluţie. Ecuaţia se scrie $\sqrt[3]{x - 1} = x - 1$. Prin ridicare la puterea a treia (putere impară), rezultă o ecuaţie echivalentă cu ecuaţia din enunţ

$$x - 1 = (x - 1)^3 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)x = 0,$$

deci $x \in \{0, 1, 2\}$.

11. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât polinomul $f = 6X^4 - 7X^3 + aX^2 + 3X + 2$ să se dividă prin polinomul $g = X^2 - X - 1$.

a) $a = -2$; b) $a = 2$; c) $a = -1$; d) $a = -7$; e) $a = 0$; f) $a = 1$.

Soluţie. Facând împărtirea, se obtine câtul $6x^2 - x + a - 7$ şi restul $(a + 7)(x + 1)$. Condiţia de divizibilitate revine la anularea restului, deci rezultă $a = -7$.

12. Funcţia $f : (0,\ 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$. Să se calculeze

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)\right)$.

a) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; b) $S_n = -\frac{8}{9} + 2(-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$; c) $S_n = 1 - \frac{1}{3^{n+2}}$;

d) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n \left(1 - \frac{3}{3^{n+2}}\right)$; e) $S_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$; f) $S_n = -\frac{8}{9} + (-1)^n(n + 1)! \left(1 - \frac{1}{3^{n+2}}\right)$.

Soluţie. Avem $f(x) = \frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$. Dar

$$\left(\frac{1}{ax + b}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax + b)^{n+1}} \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} - \frac{(-1)^k k!}{(x + 2)^{k+1}},$$

deci $f^{(k)}(1) = (-1)^k k \left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right)$. Dezvoltând suma şi reducând termenii egali, obţinem

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (f^{(k)}(1) - f^{(k+1)}(1)) = f^{(1)}(1) - f^{(n+1)}(1) = \\ &= -\tfrac{8}{9} - (-1)^{n+1}(n+1)! \left(1 - \tfrac{1}{3^{n+2}}\right) = -\tfrac{8}{9} + (-1)^n (n+1)! \left(1 - \tfrac{1}{3^{(n+2)}}\right). \end{aligned}$$

13. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Determinaţi $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $AB = BA$.

a) $a = b = 1$; b) $a \in \mathbb{R},\ b = 2$; c) $a = -1,\ b = 3$; d) $a = -2,\ b = 0$;
e) nu există; f) $a = 2,\ b \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Din $AB = BA$ deducem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b+4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deci $b + 4 = 2a + b$ adică $a = 2$ şi $b \in \mathbb{R}$.

14. Să se calculeze $\mathrm{i} + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^5$, $(\mathrm{i}^2 = -1)$.

a) 0; b) 3i; c) -1; d) i; e) $-$i; f) 2i.

Soluţie. Avem $i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$.

15. Să se determine mulţimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x-3)(3x-2) \geq 0\}$.

a) $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$; b) $A = \mathbb{R}$; c) $A = \varnothing$; d) $A = (-1, 1)$; e) $A = \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$;
f) $A = \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Soluţie. Inecuaţia $(2x-3)(3x-2) \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) \geq 0$ are soluţiile $x \in \left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

16. Numărul $x = C_6^4 + A_5^2 - P_4$ este

a) $x = 0$; b) $x = \frac{11}{2}$; c) $x = 11$; d) $x = 10$; e) $x = 15$; f) $x = 25$.

Soluţie. Avem $C_6^4 + A_5^2 - P_4 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + 5 \cdot 4 - 24 = 15 + 20 - 24 = 11$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\log_2 x + \log_2 2x = 3$.

a) $x = 0$; b) $x = -2$; c) nu are soluţii; d) $x = \pm 2$; e) $x = 1$; f) $x = 2$.

Soluţie. Obţinem $\log_2 x + \log_2 2x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot 2x = \log_2 2^3$ cu $x > 0$ deci $2x^2 = 2^3$, de unde rezultă $x = 2$.

18. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

a) $I = \mathrm{e}$; b) $I = -1$; c) $I = 1$; d) $I = 0$; e) $I = 2\mathrm{e}$; f) $I = -\mathrm{e}$.

Soluţie. Calculăm $I = \int_0^1 xe^x dx$. Integrând prin părţi $g'(x) = e^x, f(x) = x$, rezultă

$$I = e^x x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$