1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Să se calculeze $f'(1)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) 0; d) $\frac{1}{4}$; e) $-\frac{1}{2}$; f) 1.

   Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ şi deci $f'(1) = \frac{1}{2}$.

2. Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$ să admită soluţia $x_1 = \mathrm{i}$. **(4 pct.)**

   a) $m = -10,\ n = 3$; b) $m = 1,\ n = -1$; c) $m = -9,\ n = 3$; d) $m = 0,\ n = 0$; e) $m = -3,\ n = 10$; f) $m = 3,\ n = -10$.

   Soluţie. Înlocuind $x = i$ în ecuaţia $x^4 + 3x^3 + mx^2 + nx - 10 = 0$, obţinem $1 - 3i - m + ni - 10 = 0 \Leftrightarrow -(m+9) + i(n-3) = 0$, de unde prin identificare deducem $m + 9 = 0$ şi $n - 3 = 0$. Deci $m = -9$ şi $n = 3$.

3. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + m, & x \le 1 \\ \mathrm{e}^x - \mathrm{e}, & x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. **(4 pct.)**

   a) $m = 3$; b) $m = 1$; c) $m = 4$; d) $m = 0$; e) nu există; f) $m = 3/2$.

   Soluţie. Pe intervalele $(-\infty, 1)$ si $(1, \infty)$ funcţia este continuă, fiind sumă de funcţii elementare. Condiţia de continuitate în $x_0 = 1$ se scrie $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

4. Să se rezolve inecuaţia $\sqrt{x} < 1$. **(4 pct.)**

   a) [0,1); b) (0,1); c) [0,1]; d) $(-1, 1)$; e) nu are soluţii; f) $[0, \infty)$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă este $x \ge 0$, iar din $\sqrt{x} < 1$ rezultă $x < 1$. Prin urmare, avem $x \in [0, 1)$.

5. Dacă (a, b) este o soluţie a sistemului de ecuaţii $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$, atunci **(4 pct.)**

   a) $a^2 + b^2 = 1$; b) $a^2 + b^2 = 2$; c) $a^2 + b^2 < 0$; d) $a \ne b$; e) $a^2b^2 = 2$; f) $a^2 + b^2 = 3$.

   Soluţie. Din $a + b = 2$ si $ab = 1$ deducem $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 4 - 2 = 2$.

6. Să se calculeze termenul al zecelea al progresiei aritmetice cu primul termen $a_1 = 5$ şi raţia $r = 2$. **(4 pct.)**

   a) 10; b) 25; c) 23; d) 20; e) 30; f) 18.

   Soluţie. Din relaţia $a_n = a_1 + (n-1)r$ rezultă $a_{10} = a_1 + 9r = 5 + 18 = 23$.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$. **(4 pct.)**

   a) $2\ln 2$; b) $\frac{\ln 3}{4}$; c) $\frac{\ln 3}{2}$; d) $3\ln 2$; e) $\ln 2$; f) $\frac{\ln 2}{3}$.

   Soluţie. Avem $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\ln(x^3+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2$.

8. Soluţiile ecuaţiei $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ sunt **(4 pct.)**

   a) $x_1 = 3$; b) $x_1 = 0,\ x_2 = 1$; c) nu există; d) $x_1 = 0, x_2 = 3$; e) $x_1 = 1,\ x_2 = 3$; f) $x_1 = -1,\ x_2 = -3$.

   Soluţie. Notând $3^x = y$, rezultă $y > 0$ şi înlocuind în relaţie obţinem $y^2 - 4y + 3 = 0$. Soluţiile ecuaţiei sunt $y = 1$ şi $y = 3$. Din $3^x = 1$, obţinem $x = 0$ şi din $3^x = 3$ rezultă $x = 1$; deci $x \in \{0, 1\}$.

9. Expresia $E = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, are valoarea **(4 pct.)**

a) $3\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{3}$; c) 2; d) $2\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}$; f) 3.

Soluţie. Aducând la acelaşi numărător relaţia din enunţ obţinem: $E = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$.

10. Fie ecuaţia $x^2 - ax + 4 = 0$, unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Dacă soluţiile x_1 şi x_2 ale ecuaţiei verifică egalitatea $x_1 + x_2 = 5$, atunci **(4 pct.)**

a) $x_1 = x_2$; b) $a < 0$; c) $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$; d) $a = 0$; e) $a = 5$; f) $a = 4$.

Soluţie. Din relaţiile lui Viete $x_1 + x_2 = a$ deducem $a = 5$.

11. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})$. **(4 pct.)**

a) $-\dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) ∞; d) nu există; e) 1; f) -1.

Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

12. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy + 2ax + by$. Să se determine relaţia dintre a şi b astfel încât legea de compoziţie să fie comutativă. **(4 pct.)**

a) $a - b = 2$; b) $a = 2b$; c) nu există; d) $a = b$; e) $a = \dfrac{b}{2}$; f) $a + b = 1$.

Soluţie. Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x * y = y * x \Leftrightarrow xy + 2ax + by = yx + 2ay + bx \Leftrightarrow (2a - b)(x - y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = b \Leftrightarrow a = b/2$.

13. Se consideră funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\,dt$. Decideţi: **(6 pct.)**

a) f este impară; b) f are două puncte de extrem; c) graficul lui f admite o asimptotă oblică; d) graficul lui f admite o asimptotă orizontală; e) $f(0) = 0$; f) f este convexă.

Soluţie. Cum funcţia $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ este continuă, aplicăm teorema de medie pe intervalul $[x, x+1]$ şi avem $f(x) = (x + 1 - x)f'(\theta_x)$ unde $\theta_x \in (x, x + 1)$ şi deci $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{\theta_x\to+\infty} \dfrac{\theta_x^2}{\sqrt{\theta_x^4+\theta_x^2+1}} = 1$. Deci graficul funcţiei f admite asimptota orizontală $y = 1$.

14. Să se calculeze limita şirului $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}}$, unde $|x| > 1$. **(6 pct.)**

a) $\dfrac{x^3}{(x-1)^3}$; b) $\dfrac{x}{x-1}$; c) $\dfrac{1}{x}$; d) $\dfrac{1}{x-1}$; e) $\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$; f) ∞.

Soluţie. Pentru $x \neq 1$ avem $x + x^2 + \ldots + x^{n+1} = \frac{x^{n+2}-x}{x-1} = S(x)$ Derivând această relaţie de 2 ori, avem

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k = \frac{((n+2)x^{n+1}-1)(x-1) - x^{n+2} + x}{(x-1)^2} = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(x-1)^2}.$$

Derivând din nou în ambii membri, obţinem

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)x^{k-1} = \frac{x^{n+2}(n+1)n - 2(n+2)x^{n+1} + (n+2)(n+1)x^4 - 2}{(x-1)^3}.$$

Facând substituţia $x \to \frac{1}{x}$ şi ţinând seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{n^k}{x^n} = 0$, pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $|x| > 1$, avem

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2x^{k-1}} = -\frac{2}{2(\frac{1}{x}-1)^3} = \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

15. Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}$. **(6 pct.)**

a) ∞; b) 2; c) 1; d) nu există; e) -2; f) $-\infty$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x-2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$.

16. Să se calculeze valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4x^2+28x+85}+\sqrt{4x^2-28x+113}$. **(8 pct.)**

a) $14\sqrt{2}$; b) 20; c) $12\sqrt{3}$; d) 19; e) $9\sqrt{5}$; f) $8\sqrt{6}$.

Soluţie. Avem $f'(x)=\dfrac{8x+28}{2\sqrt{4x^2+28x+85}}+\dfrac{8x-28}{2\sqrt{4x^2-28x+113}}$. Deci

$$\begin{aligned}
&f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4x+14}{\sqrt{4x^2+28x+85}}+\frac{4x-14}{\sqrt{4x^2-28x+113}}=0\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow(2x+7)\sqrt{(2x-7)^2+64}=-(2x-7)\sqrt{(2x+7)^2+36)}\Rightarrow\\
&\Rightarrow(2x+7)^2(2x-7)^2+64(2x+7)^2=(2x-7)^2(2x+7)^2+36(2x-7)^2\Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 16(2x+7)^2=9(2x-7)^2\Leftrightarrow 4(2x+7)=\pm3(2x-7)\Leftrightarrow x\in\{-\tfrac{49}{2},-\tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

Pentru $x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\backslash\{-\frac{49}{2}\}$, avem $f'(x)<0$, deci funcţia f fiind strict descrescătoare în $x=-\frac{49}{2}$, această valoare nu convine ca abcisă de punct de minim. De asemenea, pentru $x>-\frac{1}{2}$ avem $f'(x)>0$, deci $x=-\frac{1}{2}$ este punct de minim. În final, obţinem $f(-\frac{1}{2})=14\sqrt{2}$.

17. Să se rezolve ecuaţia $\begin{vmatrix}2&x&0\\x&-1&x\\2&-5&4\end{vmatrix}=0$. **(8 pct.)**

a) $x_1=0,\ x_2=3$; b) $x_1=-5/2$; c) $x_1=3$; d) $x_1=0,\ x_2=4$; e) $x_1=0$; f) $x_1=1,\ x_2=4$.

Soluţie. Avem $\begin{vmatrix}2&x&0\\x&-1&x\\2&-5&4\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow x\in\{1,4\}$.

18. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=z^2+z+1$. Să se calculeze $f\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)$. **(8 pct.)**

a) -1; b) i; c) $1-\mathrm{i}$; d) $1+\mathrm{i}$; e) $\sqrt{3}$; f) 0.

Soluţie. Pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, rezultă $(2z+1)^2=(i\sqrt{3})^2\Leftrightarrow 4z^2+4z+1=-3\Leftrightarrow z^2+z+1=0$, deci $f(z)=z^2+z+1=0$.