Universitatea Politehnica din Bucureşti 2005
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
Varianta A

1. Să se afle câte soluţii are ecuaţia $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ în intervalul $[-\pi, 2\pi]$. **(4 pct.)**

   a) patru; b) o infinitate; c) două; d) trei; e) una; f) nici una.

   Soluţie. Se observă că $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, care nu satisfac ecuaţia $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$. Rezultă $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ cu soluţiile $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. În intervalul $[-\pi, 2\pi]$ avem pentru $k \in \{-1, 0, 1\}$ respectiv soluţiile $\{-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$.

2. Un triunghi isoscel are două unghiuri de mărime $\dfrac{\pi}{8}$ şi laturile egale de lungime 1. Atunci înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale are lungimea **(4 pct.)**

   a) $\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$; f) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

   Soluţie. Unghiul de la vârful triunghiului isoscel are măsura $\frac{3\pi}{4}$. Suplementul său este unghiul exterior ce se opune înălţimii (catetă într-un triunghi dreptunghic de ipotenuză 1) are mărimea $\frac{\pi}{4}$, deci înălţimea corespunzătoare uneia dintre laturile egale este de lungime $1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Care este ordinea crescătoare a următoarelor numere: $a = \sin 2$, $b = \sin\dfrac{2\pi}{3}$, $c = \sin 8$? **(4 pct.)**

   a) $c < b < a$; b) $a < b < c$; c) $b < c < a$; d) $b < a < c$; e) $a < c < b$; f) $c < a < b$.

   Soluţie. Avem $\sin 8 = \sin(8 - 2\pi)$ şi $\frac{\pi}{2} < 8 - 2\pi < 2 < \frac{2\pi}{3} < \pi$. În cadranul 2 funcţia sin este strict descrescătoare, deci $\sin 8 > \sin 2 > \sin\frac{2\pi}{3}$ şi deci $c > a > b$.

4. Dreapta care trece prin punctele $A(1, 2)$ şi $B(2, 5)$ are ecuaţia **(4 pct.)**

   a) $x - 3y = 1$; b) $2x - y = 0$; c) $x - 2y = 0$; d) $3x - y = 1$; e) $x + 3y = 1$; f) $3x + y = 1$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei AB este $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$, deci $x - 1 = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3(x-1) = y - 2$, prin urmare $3x - y = 1$.

5. Să se determine ecuaţia planului care trece prin punctul $A(3, -2, -7)$ şi este paralel cu planul $2x - 3z + 5 = 0$. **(4 pct.)**

   a) $2x - 3z - 10 = 0$; b) $x - 3z - 27 = 0$; c) $2x - 3z - 20 = 0$; d) $2x - z - 27 = 0$; e) $2x - 3z - 27 = 0$; f) $2x - 3z - 25 = 0$.

   Soluţie. Ecuaţia unui plan paralel cu planul dat este $2x - 3z + \alpha = 0, \alpha \in \mathbb{R}$. Cum planul trece prin $A(3, -2, -7)$, avem $6 + 21 + \alpha = 0$, deci $\alpha = -27$ şi planul cerut are ecuaţia $2x - 3z - 27 = 0$.

6. Un triunghi dreptunghic are ipotenuza de lungime 8 cm şi un unghi de $30°$. Calculaţi lungimea înălţimii corespunzătoare ipotenuzei. **(4 pct.)**

   a) $4\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $2\sqrt{3}$; e) 2; f) 4.

   Soluţie. Fie $\triangle ABC$, dreptunghic in B, $BD \perp AC (D \in AC)$ şi $m(\angle BAC) = 30°$. Rezultă $BC = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$ şi $BD = BC\sin 60° = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

7. Dacă $E = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\ \sin\dfrac{\pi}{6}$, să se determine valoarea $a = E^{12}$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $1 - \mathrm{i}$; c) i; d) -1; e) $-\mathrm{i}$; f) 0.

   Soluţie. Pentru $E = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$, avem

$$a = E^{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12} = \cos\frac{12\pi}{6} + i\sin\frac{12\pi}{6} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \Rightarrow a = 1.$$

8. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de lungime 4 şi laturile bazei de lungimi respectiv 2 şi 3. Atunci înălţimea paralelipipedului are lungimea **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{3}$; b) 4; c) 1; d) 2; e) $\sqrt{5}$; f) $\sqrt{2}$.

   Soluţie. Fie L, l, h si d respectiv lungimea, lăţimea, înăltimea şi diagonala paralelipipedului. Atunci $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$, deci $4^2 = 3^2 + 2^2 + h^2$; obţinem $h^2 = 16 - 4 - 9 = 3 \to h = \sqrt{3}$.

9. Dacă x este un unghi în $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ şi $\sin x = \frac{2}{3}$, să se determine $\operatorname{tg} x$. **(4 pct.)**

   a) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; c) $\dfrac{1}{2}$; d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; e) $\sqrt{5}$; f) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   Soluţie. Dacă $\sin x = \frac{2}{3}$ şi $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ şi deci $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

10. Aflaţi aria unui triunghi dreptunghic dacă ipotenuza are lungimea 25 cm iar perimetrul este de 60 cm. **(4 pct.)**

    a) 50 cm^2 ; b) 125 cm^2 ; c) 150 cm^2 ; d) 325 cm^2 ; e) 100 cm^2 ; f) 225 cm^2 .

    Soluţie. Fie a ipotenuza triunghiului, b,c catetele. Avem $a = 25$, si $p = a+b+c = 60$, unde am notat cu p perimetrul triunghiului. Atunci $b+c = 60-25 = 35$, iar prin ridicare la pătrat rezultă $b^2+c^2+2bc = 1225$. Conform teoremei lui Pitagora, avem $a^2 = b^2 + c^2$. Obţinem $2bc = 600$, iar aria este $\frac{bc}{2} = \frac{600}{4} = 150$.

11. Fie $A(2, 3)$, $B(4, -1)$. Să se afle coordonatele punctului M pentru care $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{0}$. **(4 pct.)**

    a) (2,2); b) (3,1); c) (1,2); d) (1,3); e) (1,1); f) (2,1).

    Soluţie. Fie $M(\alpha, \beta)$, atunci $\overline{MA} = (2-\alpha)\overline{i}+(3-\beta)\overline{j}$ şi $\overline{MB} = (4-\alpha)\overline{i}+(-1-\beta)\overline{j}$. Cum $\overline{MA}+\overline{MB} = \overline{0}$, avem $6 - 2\alpha = 0$ şi $2 - 2\beta = 0$, adică $\alpha = \frac{6}{2}$ şi $\beta = \frac{2}{2}$, deci obţinem $M(3, 1)$, mijlocul segmentului AB.

12. Pentru ce valoare $m \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ şi $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ sunt perpendiculari? **(4 pct.)**

    a) $m = 3$; b) $m = 5$; c) $m = -4$; d) $m = 4$; e) $m = 2$; f) $m = -3$.

    Soluţie. Vectorii $\vec{a}, \vec{b}$ sunt perpendiculari dacă $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, adică $4m + 3m - 28 = 0$. Rezultă $7m = 28$, deci $m = 4$.

13. Diagonala unei feţe a unui cub de volum 8 este **(6 pct.)**

    a) 2; b) $\sqrt{2}$; c) $\sqrt{3}$; d) 4; e) $2\sqrt{2}$; f) 1.

    Soluţie. Diagonala unei feţe este $d^2 = 2l^2$ unde l este latura cubului. Volumul cubului este deci $V = l^3 = 8$ deci $l = 2$. Avem $d^2 = 2 \cdot 4$ deci $d = 2\sqrt{2}$.

14. Care dintre următoarele puncte aparţin elipsei raportate la axe cu semiaxele $a = 2$ şi $b = 3$? **(6 pct.)**

    a) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; b) $(-1, 1)$; c) $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$; d) (1,0); e) (1,2); f) $\left(2\sqrt{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

    Soluţie. Ecuaţia elipsei de semiaxe $a = 2, b = 3$ este $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Punctul ce verifica aceasta ecuaţie este deci $(\sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}})$.

15. Volumul unui con circular drept de generatoare 5 şi rază 4 este: **(6 pct.)**

    a) $\dfrac{80\pi}{3}$; b) 20π; c) 16π; d) $\dfrac{8\pi}{3}$; e) 32π; f) 4π.

    Soluţie. Înălţimea conului este H iar volumul conului este $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$. Aflam înălţimea; avem $H^2 = G^2 - R^2$ unde G este generatoarea şi R este raza conului; obţinem $H^2 = 25 - 16 = 9$, deci $H = 3$ şi $V = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 16}{3} = 16\pi$.

16. Fie $z = (1 + \mathrm{i})^2$. Să se calculeze $\arg z$ $(0 \leq \arg z < 2\pi)$. **(8 pct.)**

    a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$; c) $\dfrac{2\pi}{5}$; d) $\dfrac{\pi}{3}$; e) $\frac{3\pi}{4}$; f) $\dfrac{\pi}{6}$.

    Soluţie. Avem $z = (i + 1)^2 = 2i = 2(cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$, deci $\arg z = \frac{\pi}{2}$.

17. Care este raza cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$? **(8 pct.)**

    a) 3; b) 2; c) $\sqrt{2}$; d) 1; e) -1; f) $\sqrt{3}$.

    Soluţie. Restrangând pătratele, ecuaţia cercului se rescrie $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$, deci $R = \sqrt{2}$.

18. Să se calculeze volumul piramidei ale cărei feţe sunt planele de coordonate şi planul de ecuaţie: $3x + 6y - 2z - 24 = 0$. **(8 pct.)**

a) 64; b) 100; c) 8; d) 32; e) 36; f) $\dfrac{16}{3}$.

Soluţie. Planul intersectează axele de coordonate în punctele $A(x_0, 0, 0), B(0, y_o, 0)$ şi $C(0, 0, z_0)$. Din ecuaţia planului obţinem $x_0 = 8, y_0 = 4$ si $z_0 = -12$, deci volumul cerut este $\frac{1}{6} \mid x_0 y_0 z_0 \mid = 64$.