1. Un pătrat are aria numeric egală cu 9. Să se determine lungimea diagonalei pătratului. **(4 pct.)**

   a) $\frac{9}{2}$; b) 6; c) $5\sqrt{2}$; d) $3\sqrt{2}$; e) $\frac{3}{2}$; f) 4.

   Soluţie. Dacă a este latura pătratului, atunci diagonala sa este $d = a\sqrt{2}$. Avem $Aria = 3^2 = 9$, de unde $a = 3$. Deci $d = 3\sqrt{2}$.

2. Dacă $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\operatorname{tg} x$ **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{2}$; d) $\frac{2}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; f) $-\sqrt{2}$.

   Soluţie. Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\cos x > 0$ si deci $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Obţinem $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

3. Un paralelipiped dreptunghic are lungimile laturilor bazei 3 şi 2, iar diagonala paralelipipedului are lungimea 5. Să se calculeze lungimea înălţimii paralelipipedului. **(4 pct.)**

   a) $2\sqrt{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) 1; d) 12; e) 2; f) 4.

   Soluţie. Dacă L, l, h şi d sunt lungimea, lăţimea, înălţimea şi respectiv, diagonala paralelipipedului dreptunghic, atunci $d^2 = L^2 + l^2 + h^2$. Obţinem $h^2 = 25 - 9 - 4 = 12$, de unde $h = 2\sqrt{3}$.

4. Să se determine măsura unghiului B al unui triunghi ABC dreptunghic în A, ştiind că $b + c = a\sqrt{2}$ **(4 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{15}$; b) $\frac{\pi}{6}$; c) $\frac{\pi}{12}$; d) $\frac{\pi}{3}$; e) $\frac{5\pi}{12}$; f) $\frac{\pi}{4}$.

   Soluţie. Folosind teorema sinusului $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$ şi proporţii derivate, obţinem $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b+c}{\sin \hat{B} + \sin \hat{C}}$. Folosind relaţia $b + c = a\sqrt{2}$, rezultă $\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \sqrt{2} \sin \hat{A}$. Dar $\sin \hat{A} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, deci $\sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \sqrt{2}$, de unde $2 \sin \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = \sqrt{2}$. Cum $\sin \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, rezultă $\cos \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 1$, de unde $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 0$, deci $\hat{B} = \hat{C}$. Prin urmare măsura unghiului $\hat{B}$ este $\frac{\pi}{4}$. *Altfel.* Folosind teorema lui Pitagora, obţinem sistemul

   $$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 \\ b + c = a\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 + c^2 = a^2 \\ b^2 + c^2 + 2bc = 2a^2 \end{cases} \tag{1}$$

   de unde rezultă

   $$a^2 = 2bc \Leftrightarrow \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\hat{B} = 1 \Leftrightarrow 2\hat{B} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{B} = \frac{\pi}{4}.$$

   Altfel. În sistemul (1) scădem din dublul primei ecuaţii pe cea de-a doua; rezultă $(b - c)^2$, deci $b = c$, triunghi dreptunghic isoscel, deci $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$.

5. Să se calculeze aria triunghiului având laturile 10, 10, 12. **(4 pct.)**

   a) 50; b) 48; c) $24\sqrt{2}$; d) 24; e) 42; f) 36.

   Soluţie. Aplicând formula lui Heron, rezultă $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul. Avem $p = 16, p - b = 6, p - c = 6, p - c = 4$ şi deci $A = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{8^2 \cdot 6^2} = 48$. *Altfel.* Triunghiul este isoscel, deci folosind teorema lui Pitagora, înălţimea corespunzătoare laturii mari este $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = 8$, deci aria este $A = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$.

6. Câte soluţii are ecuaţia $\sin 2x = 1$, situate în intervalul$(0, 3\pi)$? **(4 pct.)**

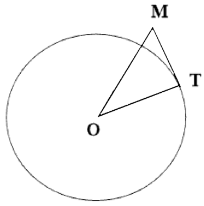
   a) Şase; b) Patru; c) Două; d) Trei; e) Una; f) O infinitate.

   Soluţie. Avem $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x \in \{(4k+1)\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\}$, de unde $x \in \{(4k+1)\frac{\pi}{4} | k \in \mathbb{Z}\}$. Soluţiile din intervalul $(0, 3\pi)$ sunt: $\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\}$.

7. Se consideră un cerc de centru O şi un punct M exterior cercului astfel încât $OM = 13$. Se cere raza cercului ştiind că lungimea unei tangente la cerc duse din M este 5. **(4 pct.)**

a) 6; b) 10; c) 13; d) 8; e) 12; f) $\sqrt{194}$.

Soluţie. Fie T punctul de tangenţă. Avem $OM = 13$ şi $MT = 5$.



Dacă R este raza cercului, atunci, aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMT ($\hat{T} = 90°$), rezultă $R^2 = OT^2 = OM^2 - MT^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, de unde $R = 12$.

8. Într-un cerc de diametru 8 se înscrie un triunghi echilateral. Să se calculeze lungimea laturii triunghiului. **(4 pct.)**

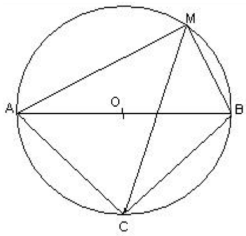
a) 4 ; b) $4\sqrt{2}$; c) $4\sqrt{3}$; d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; e) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; f) $2\sqrt{3}$.

Soluţie. Dacă R este raza cercului circumscris, iar a este latura triunghiului echilateral înscris, atunci $a = R\sqrt{3}$. Dar $R = 4$, deci $a = 4\sqrt{3}$.

9. Se consideră un cerc de diametru AB (orizontal) şi fie C mijlocul arcului inferior de semicerc. Dacă M este un punct situat pe semicercul superior, să se calculeze raportul $\frac{MA + MB}{MC}$ **(4 pct.)**

a) $\sqrt{3} + 1$; b) 2; c) $1 + \sqrt{2}$; d) 3; e) $\sqrt{3}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. Cum C este mijlocul arcului inferior de semicerc, rezultă măs $(\widehat{ABC})$ = măs $(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{4}$.



Folosind teorema sinusului avem $MA = 2R \sin B, MB = 2R \sin A, MC = 2R \sin \widehat{MAC} = 2R \sin \widehat{MBC}$. Deci

$$MC = \frac{2R \sin \widehat{MAC} + 2R \sin \widehat{MBC}}{2} = R(\sin \widehat{MAC} + \sin \widehat{MBC}) = R\left(\sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Atunci

$$\frac{MA + MB}{MC} = \frac{2R(\sin A + \sin B)}{R(\sin(A + \frac{\pi}{4}) + \sin(B + \frac{\pi}{4}))} = \frac{4 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \sin(\frac{A+B}{2} + \frac{\pi}{4}) \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

10. Să se calculeze aria triunghiului având vârfurile $A\,(-1, -3)$, $B\,(1, 5)$, $C\,(4, 1)$. **(4 pct.)**

a) 16; b) 32; c) 14; d) $12\sqrt{2}$; e) 10; f) $16\sqrt{2}$.

Soluţie. Avem $A = \frac{1}{2}|\triangle|$, unde $\triangle = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -32$, deci $A = \frac{1}{2}|-32| = 16$.

11. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ dacă vectorii $\vec{a} = \vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt perpendiculari **(4 pct.)**

a) -2; b) ± 2 ; c) 0; d) 2; e) $\pm\frac{1}{2}$; f) $-\frac{1}{2}$.

Soluţie. Condiţia de perpendicularitate a vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot 6 + m \cdot 3 = 0$, de unde $m = -2$.

12. Să se determine înălţimea unui con circular drept având raza bazei 1 şi aria totală 3π. **(4 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) 3; c) $\sqrt{3}$; d) $\pi\sqrt{3}$; e) $\pi\sqrt{2}$; f) $2\sqrt{2}$.

Soluţie. Aria totala a unui con circular drept este $A_t = \pi R(R+G)$, unde R este raza bazei şi G este generatoarea. Obţinem $3\pi = \pi(1+G)$, de unde $G = 2$. Atunci înălţimea h a conului drept dat este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = \sqrt{3}$.

13. Să se calculeze distanţa AB dacă $A\ (1, 2, 1)$, $B\ (2, 4, -1)$. **(6 pct.)**

a) 1; b) 3; c) $\sqrt{5}$; d) 4; e) 9; f) $2\sqrt{2}$.

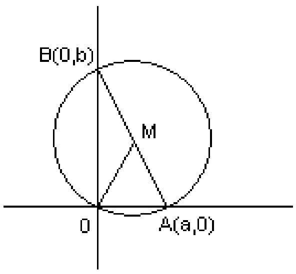
Soluţie. Distanţa dintre cele două puncte este

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

14. Să se scrie ecuaţia cercului circumscris triunghiului OAB având vârfurile $O\ (0, 0)$, $A\ (a, 0)$, $B\ (0, b)$, $a > 0$, $b > 0$. **(6 pct.)**

a) $x^2 + y^2 - ax - by = 0$; b) $x^2 + y^2 + ax + by = 0$; c) $x^2 + y^2 - ax = 0$; d) $x^2 + y^2 - by = 0$; e) $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$; f) $x^2 + y^2 - ax + by = 0$.

Soluţie. Avem $A \in Ox, B \in Oy$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în O. Atunci centrul cercului este mijlocul M al segmentului AB, iar raza este mediana OM corespunzătoare ipotenuzei. Avem $M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ şi $OM = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.



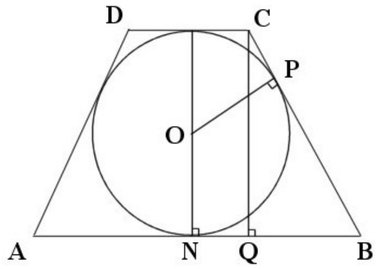
Cercul căutat are centrul în M şi de rază OM, deci are ecuaţia

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

15. Un trapez isoscel circumscris unui cerc are lungimile bazelor 8 şi 2. Să se calculeze aria trapezului. **(6 pct.)**

a) 18; b) 28; c) 15; d) 10; e) 12; f) 20.

Soluţie. Fie $ABCD$ trapezul isoscel din enunţ $(AB||CD, AD = BC)$, iar M, N respectiv mijloacele segmentelor CD şi AB (vezi desenul). Avem $MC = 1$, $NB = 4$ şi deci $BC = CP + PB = MC + NB = 5$. Dacă CQ $(Q \in AB)$ este înălţimea trapezului, atunci $CQ^2 = CB^2 - BQ^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ şi deci $CQ = 4$. Aria trapezului este deci $\frac{(AB+DC)\cdot CQ}{2} = 20$.



16. Se dau 4 puncte în spaţiu, necoplanare. Câte plane distincte care conţin câte trei din punctele date se pot considera? **(8 pct.)**

a) 5; b) 3; c) 4; d) 6; e) 2; f) 8.

Soluţie. Numărul planelor este $C_4^3 = 4$.

17. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1$, $z_2 = i$. Să se determine $a \quad (a > 0)$ dacă imaginile punctelor z_1, z_2 şi $z_3 = a\,(1+i)$ formează un triunghi echilateral. **(8 pct.)**

a) $\sqrt{3}$; b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$; c) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$; d) $\sqrt{3}+1$; e) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$; f) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Soluţie. Triunghiul este echilateral dacă $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_3 - z_2| \Leftrightarrow |i-1| = |(a-1)+ai| = |a + i(a-1)|$. Deci $\sqrt{2} = \sqrt{(a-1)^2 + a^2}$, de unde $2 = 2a^2 - 2a + 1$, adică $2a^2 - 2a - 1 = 0$. Obţinem $a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, şi cum $a > 0$, rezultă $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

18. Să se determine perechea (m, n) de numere reale, dacă punctele $(1,\ m,\ 3)$, $(2,\ 3,\ n)$, $(3,\ 0,\ 5)$ sunt colineare. **(8 pct.)**

a) $(-6, 4)$; b) $(6, 3)$; c) $(6, 2)$; d) $(6, -2)$; e) $(6, 4)$; f) $(0, 4)$.

Soluţie. Punctele $A(1, m, 3), B(2, 3, n), C(3, 0, 5)$ sunt colineare d.n.d. $\overline{AB}||\overline{AC}$, deci dacă vectorii $\overline{AB} = (2-1)\bar{i} + (3-m)\bar{j} + (n-3)\bar{k}$ şi $\overline{AC} = (3-1)\bar{i} + (0-m)\bar{j} + (5-3)\bar{k}$ au componentele proporţionale. Obţinem şirul de rapoarte egale

$$\frac{1}{2} = \frac{3-m}{-m} = \frac{n-3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - m = 0 \\ n - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ n = 4, \end{cases}$$

deci $(m, n) = (6, 4)$.