1. Să se calculeze $i + i^3 + i^5$. **(4 pct.)**

   a) 1; b) $-i$; c) 0; d) i; e) -1; f) $2i$.

   Soluţie. Folosind relaţiile $i^2 = -1$ şi $i^4 = 1$, rezultă $i + i^3 + i^5 = i - i + i = i$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{x^2 + 1}$. Să se calculeze $I = \displaystyle\int_0^3 f^{-1}(t)\, dt$, unde f^{-1} este inversa funcţiei bijective f. **(4 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}(5 - 4\ln 2)$; b) $\frac{3 + 4\ln 2}{2}$; c) $\frac{1}{2}(5 + 4\ln 2)$; d) $\ln 2$; e) $\frac{1}{2}(2 + \ln 2)$; f) $\frac{1}{2}(5 - \ln 2)$.

   Soluţie. Dacă $f^{-1}(t) = x$, rezultă $t = f(x)$, $dt = f'(x)dx$, iar $f(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$ şi $f(1) = 3 \Rightarrow f^{-1}(3) = 1$, deci efectuând schimbarea de variabilă $x = f^{-1}(t)$, şi apoi integrând prin părţi, integrala se rescrie

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 x f'(x)dx = x f(x)\,|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = f(1) - \int_0^1 \frac{x(x^2+1) + 4x}{x^2+1}dx = \\ &= 3 - \int_0^1 x dx - 2\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = 3 - \frac{1}{2} - 2\ln 2 = \frac{5}{2} - 2\ln 2 = \frac{1}{2}(5 - 4\ln 2). \end{aligned}$$

3. Să se determine parametrul real m dacă sistemul $x + y = m$, $x + my = 1$ este compatibil nedeterminat. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 0, 1; c) 1; d) -1; e) $m \in \mathbb{R}$; f) 0.

   Soluţie. Determinantul matricii coeficienţilor este $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$. El se anulează pentru $m = 1$, pentru care cele două ecuaţii sunt echivalente, deci sistem compatibil nedeterminat cu un grad de libertate.

4. Să se determine abscisele punctelor de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow R$, $f(x) = x^4 + 8x^3$. **(4 pct.)**

   a) 0; b) -1; c) -2; d) 1; e) -6; f) 0, -6.

   Soluţie. Avem $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 = 4x^2(x + 6)$, iar $f'(x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, -6\}$. Dar $f'(x) \le 0, \forall x \le -6$ şi $f'(x) \ge 0, \forall x \ge -6$, deci $x = -6$ este singurul punct de extrem.

5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}\right)$. **(4 pct.)**

   a) $\frac{5}{2}$; b) 2; c) 1; d) ∞; e) $\frac{3}{2}$; f) 0.

   Soluţie. Amplificând cu conjugata, obţinem succesiv

$$\lim_{n\to\infty}(n + 2 - \sqrt{n^2 + n + 3}) = 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{n^2 - n^2 - n - 3}{n + \sqrt{n^2 + n + 3}} = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \sqrt{1 + 1/n + 3/n^2}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

6. Să se calculeze aria mărginită de parabola $y = 2x - x^2$ şi axa Ox. **(4 pct.)**

   a) 2; b) 3; c) $-\frac{4}{3}$; d) -1; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

   Soluţie. Aria se află între axa Ox şi arcul de parabolă aflat deasupra acestei axe, deci corespunzător valorilor $x \in [0, 2]$. Obţinem aria $A = \displaystyle\int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

7. Pentru ce valori ale parametrului real m matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{pmatrix}$ admite inversă ? **(4 pct.)**

   a) $m = -2$; b) $m \neq \pm 2$; c) $m = 2$; d) $m \in \{-2, 2\}$; e) $m = 0$; f) $m = 4$.

   Soluţie. Matricea trebuie să aibă determinantul nenul, deci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

8. Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $\hat{2}x = \hat{0}$ în inelul $\mathbb{Z}_6$. **(4 pct.)**

a) 0; b) 2; c) 4; d) 6; e) 1; f) 3.

Soluţie. Verificând pe rând valorile din $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}\}$, se observă că $\hat{2}x = \hat{0}$ are doar soluţiile $\hat{0}$ şi $\hat{3}$, deci numărul de soluţii este 2.

9. Se cer asimptotele verticale ale graficului funcţiei reale $f : (0, \infty) \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$. **(4 pct.)**

a) $x = 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) $x = 0$, $x = 1$; e) Nu există; f) $x = 0$, $x = 2$.

Soluţie. Avem $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \searrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \nearrow 2} \frac{\ln x}{x-2} = -\infty$, deci $x = 0$ si $x = 2$ sunt asimptotele verticale ale funcţiei f.

10. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 4^{\sqrt{x}}$. **(4 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 1; d) 4; e) 0; f) -1.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq 0$. Ecuaţia se rescrie $2^{x+1} = 2^{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

11. Să se determine punctele critice ale funcţiei $f : R^\star \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. **(4 pct.)**

a) 2, -2; b) -1, 1; c) Nu există; d) 1; e) -1; f) 3.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f; obţinem $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pm 1\}$.

12. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2 - 3x + 2 = 0$. Să se calculeze $x_1 + x_2 + x_1x_2$. **(4 pct.)**

a) -2; b) 5; c) -5; d) 6; e) 2; f) 0.

Soluţie. Din relaţiile Viétè avem $S = x_1 + x_2 = 3$, $P = x_1x_2 = 2$, deci $x_1 + x_2 + x_1x_2 = S + P = 3 + 2 = 5$.

13. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 1; c) 4; d) 2; e) 0; f) $x \neq -1$.

Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $x \geq -1$. Notăm $\sqrt{x+1} = t \geq 0$ şi ecuaţia se rescrie $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \geq 0$, deci $\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

14. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1}$. **(6 pct.)**

a) 2; b) ∞; c) 1; d) $-\infty$; e) 3; f) 0.

Soluţie. Obţinem $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 2}{2x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6 + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \dfrac{6}{2} = 3$.

15. Să se determine $a^2 + b^2$ dacă $a + 2b = 1$ şi $2a + b = 2$. **(6 pct.)**

a) 3; b) 2; c) 0; d) 4; e) 1; f) -2.

Soluţie. Rezolvând sistemul liniar $\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$, obţinem $a = 1, b = 0$, deci $a^2 + b^2 = 1$.

16. Să se calculeze $f'(0)$ pentru $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. **(8 pct.)**

a) 2; b) -1; c) -2; d) 1; e) 4; f) 0.

Soluţie. Avem $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, deci $f'(0) = 1$.

17. Să se determine valorile parametrului real m dacă polinomul $X^2 - (m+3)X + 9$ are rădăcini duble. **(8 pct.)**

a) 0; b) 3, -9; c) -9; d) 3; e) 1; f) -3, 9.

Soluţie. Punem condiţia ca discriminantul ecuaţiei de gradul doi să se anuleze. Obţinem

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (m+3)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m + 3 \in \{\pm 6\} \Leftrightarrow m \in \{3, -9\}.$$

18. Fie F primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ care se anulează în punctul $x = 1$. Să se calculeze $F(2)$. **(8 pct.)**

a) 0; b) $\dfrac{20}{3}$; c) 8; d) $\dfrac{16}{3}$; e) 2; f) 1.

Soluţie. Integrăm funcţia f; obţinem $F(x) = \int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$; Condiţia $F(1) = 0$ se rescrie $\frac{4}{3} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$, deci $F(2) = \frac{8}{3} + 4 - \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$.