Universitatea Politehnica din Bucureşti 2007
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
Varianta A

1. Un paralelipiped dreptunghic are diagonala de lungime 4 şi laturile bazei de lungime 2 şi respectiv 3. Atunci înălţimea paralelipipedului are lungimea: **(4 pct.)**

   a) 1; b) $\sqrt{3}$; c) 3; d) $\sqrt{2}/2$; e) $\sqrt{2}$; f) $\sqrt{3}/2$.

   Soluţie. Notând cu d, h şi a, b respectiv lungimile diagonalei, înălţimii şi respectiv laturilor bazei, avem $d^2 = a^2 + b^2 + h^2$, deci $h = \sqrt{16-4-9} = \sqrt{3}$.

2. Dacă planele $(a+2)\,x + 3y + z + 2b - 1 = 0$ şi $6ax + (4-b)\,y - bz + a + 2 = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, sunt paralele, atunci: **(4 pct.)**

   a) $a = 0,\ b = 4$; b) $a = 0,\ b = 0$; c) $a = 1,\ b = 4$; d) $a = 1,\ b = 2$; e) $a = 2,\ b = 1$; f) $a = 1,\ b = -2$.

   Soluţie. Coeficienţii variabilelor x, y, z din ecuaţiile planelor trebuie să fie proporţionali, dar nu şi termenii liberi, deci $\dfrac{a+2}{6a} = \dfrac{3}{4-b} = \dfrac{1}{-b} \neq \dfrac{2b-1}{a+2}$. Obţinem $b = -2$, $a = 1$ iar ultimele fracţii diferă: $\dfrac{1}{-(-2)} \neq \dfrac{-5}{3}$.

3. Câte soluţii are ecuaţia $\sin 2x = 1$ în intervalul $(0,\ 2\pi)$? **(4 pct.)**

   a) Trei; b) Şase; c) Patru; d) Două; e) Una; f) Nici una.

   Soluţie. $2x \in \left\{ 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$, deci $x \in \left\{ k\pi + \dfrac{\pi}{4} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cap (0, 2\pi) = \left\{ \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \right\}$, deci două soluţii.

4. Dacă înălţimea unui tetraedru regulat este $\sqrt{2}$, atunci muchia tetraedrului are lungimea: **(4 pct.)**

   a) $\sqrt{2}/2$; b) $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{3}/2$; d) $\sqrt{2/3}$; e) $\sqrt{2}$; f) 3.

   Soluţie. Fie a muchia tetraedului regulat; atunci înălţimea este $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$.

5. Pentru ce valoare $m \in \mathbb{R}$, vectorii $\vec{a} = m\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ şi $\vec{b} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ sunt perpendiculari? **(4 pct.)**

   a) $m = 1$; b) $m = \sqrt{3}$; c) $m = -1$; d) $m = 0$; e) $m = -2$; f) $m = 4$.

   Soluţie. Produsul scalar al vectorilor trebuie să fie nul, $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \Leftrightarrow m\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

6. Dacă punctele $A\,(1, 2)$, $B\,(2, 4)$ şi $C\,(4, a)$, $a \in R$, sunt coliniare, atunci: **(4 pct.)**

   a) $a = 0$; b) $a = 2$; c) $a = 8$; d) $a = 4$; e) $a = 1$; f) $a = -5$.

   Soluţie. Determinantul coordonatelor celor trei puncte bordate cu 1 trebuie să se anuleze: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a - 8 = 0 \Leftrightarrow a = 8$.

7. Dacă $A\,(2, 1, -1)$, $B\,(5, -3, 0)$ şi $C\,(2, 1, 1)$, atunci aria triunghiului ABC este: **(4 pct.)**

   a) 5; b) 4; c) $\sqrt{26}$; d) 7; e) 2; f) 8.

   Soluţie. Lungimile celor trei laturi sunt
   $$AB = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}; \quad AC = \sqrt{0+0+2^2} = 2; \quad BC = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}.$$
   Se observă că $AB = BC$, deci $\triangle ABC$ este isoscel. Atunci înălţimea $BM = \sqrt{AB^2 - (AC/2)^2} = \sqrt{26-1} = 5$, deci aria triunghiului este $S = \dfrac{AC \cdot BM}{2} = \dfrac{2 \cdot 5}{2} = 5$.

8. Dacă $E\,(x) = \dfrac{\sin 2x - 2}{2} + \sin x + \cos^2 x$ atunci $E\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ este: **(4 pct.)**

   a) -1; b) $-1/2$; c) 1; d) 0; e) $1/2$; f) 2.

   Soluţie. $E\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) = \dfrac{0-2}{2} + 1 + 0 = 0$.

9. Volumul conului circular drept cu generatoarea de lungime 5 şi raza cercului de bază de lungime 4 este: **(4 pct.)**

   a) 16π; b) 16; c) 25π; d) 9π; e) 48; f) 9.

   Soluţie. Avem generatoarea $G = 5$, raza $R = 4$. Atunci înălţimea este $h = \sqrt{G^2 - R^2} = 3$, şi deci $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi 4^2 \cdot 3}{3} = 16\pi$.

10. Dacă $\operatorname{tg} x = 3$, atunci $\cos 2x$ este: **(4 pct.)**

    a) $3/5$; b) 0; c) $1/2$; d) $-4/5$; e) $-1/2$; f) $4/5$.

    Soluţie. $\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}$.

11. Se consideră triunghiul ABC cu laturile $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$. Atunci măsura unghiului $\hat{A}$ este: **(4 pct.)**

    a) $30°$; b) $105°$; c) $45°$; d) $60°$; e) $120°$; f) $90°$.

    Soluţie. Din teorema cosinusului, $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{2 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{\pi}{4}$.

12. Distanţa de la punctul $A\,(2, 3)$ la dreapta $3x - 4y - 4 = 0$ este: **(4 pct.)**

    a) 10; b) $\sqrt{2}$; c) 3; d) 2; e) $\sqrt{10}$; f) $2\sqrt{5}$.

    Soluţie. $d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{5} = 2$.

13. Ecuaţia planului care trece prin origine şi prin punctele $(1,\,1,\,2)$ şi $(2,\,0,\,4)$ este:

    a) $x + y + z - 4 = 0$; b) $x - 2z = 0$; c) $x - y = 0$; d) $2x - z = 0$; e) $2x + y + z - 8 = 0$; f) $x + y + 2z = 0$.

    Soluţie. Folosind ecuaţia planului determinat de trei puncte (necolineare) date, obţinem

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0.$$

14. Dacă în triunghiul ABC avem $m\left(\hat{A}\right) = 30°$, $b = 4$, $c = 2$, atunci aria triunghiului este: **(6 pct.)**

    a) 1; b) 2; c) $2\sqrt{3}$; d) $4\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{2}$; f) 4.

    Soluţie. $S_{ABC} = \frac{bc \sin A}{2} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sin 30° = 2$.

15. Dacă volumul şi aria totală a unui cub au aceeaşi valoare numerică, atunci latura cubului are valoarea: **(6 pct.)**

    a) 6; b) 1; c) 4; d) 2; e) 8; f) 9.

    Soluţie. Notând cu $l > 0$ latura cubului, avem $A_{tot} = V \Leftrightarrow 6l^2 = l^3 \Leftrightarrow l = 6$.

16. Raza cercului de ecuaţie $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$ este: **(8 pct.)**

    a) $\sqrt{5}$; b) $\sqrt{7}$; c) 5; d) 3; e) $\sqrt{10}$; f) $2\sqrt{3}$.

    Soluţie. Restrângând pătratele în ecuaţia cercului, obţinem

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 - 4 - 1 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 12 \Rightarrow r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

17. Argumentul redus al numărului complex $z = (1 - i)^2$ este: **(8 pct.)**

    a) 0; b) $\pi/2$; c) π; d) $\pi/6$; e) $3\pi/2$; f) $\pi/4$.

    Soluţie. $z = (1-i)^2 = -2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$, deci $\arg z = \frac{3\pi}{2}$.

18. Dacă $z = \cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}$, atunci z^{10} este: **(8 pct.)**

a) $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) -1; c) 1; d) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; f) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Aplicând formula lui Moivre, obţinem

$$z^{10} = \cos\frac{10\pi}{15} + i\sin\frac{10\pi}{15} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$