1. Să se determine abscisele punctelor de inflexiune ale funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)$. (**4 pct.**)
   a) $\{-1\}$; b) $\{-1,1\}$; c) $\{0\}$; d) nu există; e) $\{0,1\}$; f) $\{1\}$.

   Soluţie. $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; $f''(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, deci $f''(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-1,1\}$.

2. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+2\,\mathrm{arctg}\,x$. Dacă A este imaginea funcţiei f, iar F este primitiva lui f care se anulează în $x=0$, atunci: (**4 pct.**)
   a) $A=[-\pi,\pi)$, $F(1)=\pi+\ln 2$; b) $A=[-\pi,2\pi)$, $F(1)=\pi-\ln\sqrt{2}$; c) $A=[0,\pi]$, $F(1)=\pi+\ln 4$; d) $A=[0,\pi)$, $F(1)=\pi-\ln 2$; e) $A=(-\pi,\pi]$, $F(1)=\pi+\ln\sqrt{2}$; f) $A=[0,2\pi)$, $F(1)=\pi-2\ln 2$.

   Soluţie. Pentru a afla $A=\mathrm{Im}\,f$, observăm că

$$f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)|x|}+\frac{2}{1+x^2}=\begin{cases}\dfrac{4}{1+x^2}, & x>0\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

   Deci pe intervalul $(-\infty,0)$ funcţia f este constantă, $f(x)=f(-1)=0$, $\forall x<0$, iar pe intervalul $(0,\infty)$, f este strict crescătoare. De asemenea, $f(0)=0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\pi+\pi=2\pi$, deci $\mathrm{Im}\,f=[0,2\pi)$.

   Se observă că se cere $F(1)$, deci vom studia forma primitivelor lui f pentru $x\in(0,+\infty)$. În acest caz integrând prin părţi obţinem:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int f(x)dx=\int\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}dx+2\int\mathrm{arctg}\,x\,dx=\\&=x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-\underbrace{\int x\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'dx}_{I}+2x\,\mathrm{arctg}\,x-\underbrace{\int 2x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx}_{\ln(x^2+1)},\end{aligned}$$

   unde

$$I=\int x\left(\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'dx=\int x\cdot\frac{2x}{(1+x^2)|x|}=\int\frac{2x}{1+x^2}=\ln(x^2+1),$$

   deci

$$F(x)=x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\ln(x^2+1)+2x\,\mathrm{arctg}\,x+C,\ \forall x>0.$$

   Însă F este continuă pe $\mathbb{R}$, deci în $x=0$ avem $F(0)=\lim\limits_{x\searrow 0}F(x)=C$, iar condiţia din enunţ conduce la egalitatea $C=0$. Deci primitiva căutată are pentru $x>0$ forma

$$F(x)=x\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}-2\ln(x^2+1)+2x\,\mathrm{arctg}\,x,\ \forall x>0,$$

   şi prin urmare $F(1)=\dfrac{\pi}{2}-2\ln 2+\dfrac{2\pi}{4}=\pi-2\ln 2$.

3. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$. Să se determine primitiva funcţiei f care se anulează în $x=0$. (**4 pct.**)
   a) $\dfrac{x}{x^2+1}$; b) $\dfrac{1}{x^3+x}$; c) $2\,\mathrm{arctg}\,x$; d) $2\arcsin x$; e) x^2; f) $\ln(x^2+1)$.

   Soluţie. $F(x)=\displaystyle\int\frac{2}{x^2+1}dx=2\,\mathrm{arctg}\,x+C$; $F(0)=C=0$, deci $F(x)=2\,\mathrm{arctg}\,x$.

4. Fie legea de compoziţie definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \star y = x(1-y) + y(1-x)$. Să se determine elemetul neutru. (**4 pct.**)

a) 2; b) $-2e$; c) 0; d) 1; e) nu există; f) -1.

Soluţie. Se verifică uşor că legea este comutativă. Atunci

$$x * e = x \Leftrightarrow x\,(1-e) + e\,(1-x) = x \Leftrightarrow e\,(1-2x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $e = 0$.

5. Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. Să se calculeze $f(i)$. (**4 pct.**)

a) $1+i$; b) 0; c) i; d) $1-i$; e) $-i$; f) 1.

Soluţie. $f(i) = 1 + i - 1 - i + 1$.

6. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine matricea $B = \frac{1}{2}(3I_2 - A)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul al doilea. (**4 pct.**)

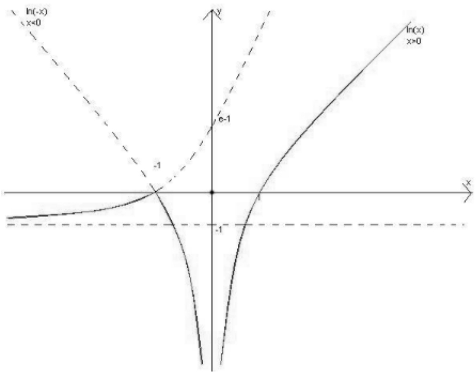
a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Soluţie. Obţtinem succesiv $B = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

7. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \min\left\{\ln|x|, e^{x+1} - 1\right\}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Dacă n este numărul punctelor de maxim local ale lui f şi k numărul asimptotelor graficului lui f, atunci: (**4 pct.**)

a) $n + k = 2$; b) $k - n = 2$; c) $n + k = 4$; d) toate celelalte afirmaţii sunt false; e) $n + k = 3$; f) $k - n = 1$.

Soluţie. Studiind graficele funcţiilor $\ln|x|$ şi $e^{x+1} - 1$, obţinem $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 1, & x \leq -1 \\ \ln(-x), & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln x, & x > 0. \end{cases}$



Funcţia f admite asimptota orizontală $y = -1$ la $-\infty$ asimptotă verticală bilaterală $x = 0$, deci $k = 2$. Pe de altă parte, punctele $(-1, 0)$ şi $(0, 0)$ sunt maxime locale, deci $n = 2$; rezultă $n + k = 2 + 2 = 4$.

8. Să se rezolve ecuaţia $3^{x^2} = 9^x$. (**4 pct.**)

a) $\{2\}$; b) $\{1\}$; c) $\{0\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0, 1\}$; f) $\{0, 2\}$.

Soluţie. $3^{x^2} = 9^x \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$.

9. Să se rezolve inecuaţia $\frac{x+1}{2} \leq \frac{2x}{3}$. (**4 pct.**)

a) $\varnothing$; b) $\mathbb{R}$; c) $(-\infty, 3]$; d) $(-\infty, 3)$; e) $[3, \infty)$; f) $(3, \infty)$.

Soluţie. Inecuaţia se rescrie $\frac{3x + 3 - 4x}{6} \leq 0 \Leftrightarrow -x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 3$. Rezultą $x \in [3, \infty)$.

10. Să se determine mulţimea valorilor parametrului real λ pentru care sistemul $\begin{cases} x+y=1 \\ x+\lambda y=2 \end{cases}$ este compatibil determinat. (**4 pct.**)

a) $(-\infty,1)$; b) $(1,\infty)$; c) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; d) $\{1\}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\varnothing$.

Soluţie. Condiţia $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0$ se rescrie $\lambda \neq 1$, deci $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

11. Fie şirul $a_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{2^{k-3}}$. Să se determine $\lim_{n\to\infty} a_n$. (**4 pct.**)

a) 9; b) 10; c) $8\sqrt{2}$; d) $\frac{15}{2}$; e) 7; f) 8.

Soluţie. Avem $a_n = \sum_{k=3}^{n} \frac{k}{2^{k-3}} = 4\sum_{k=3}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4S'\left(\frac{1}{2}\right)$, unde $S(x) = \sum_{k=3}^{n} x^k = x^3\frac{x^{n-2}-1}{x-1} = \frac{x^{n+1}-x^3}{x-1}$. Obţinem

$$S'(x) = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n-2x^3+3x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow S'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + \frac{1}{2}\right).$$

Prin urmare $S'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$, deci $a_n = 4S'\left(\frac{1}{2}\right) = 8 - \frac{n+2}{2^{n-3}}$ şi deci $\lim a_n = 8$.

12. Să se determine mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2$. (**4 pct.**)

a) $\left\{1, \frac{1}{2}\right\}$; b) $\{1,-1\}$; c) $\{3\}$; d) $\{1,2\}$; e) $\varnothing$; f) $\{1,3\}$.

Soluţie. Calculăm determinantul, $\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2x \\ 0 & x & 1-x \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^2-3x+3 = 2.$

Ecuaţia se rescrie $2x^2-3x+1=0$, deci $x \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

13. Să se calculeze $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^4-1}$. (**6 pct.**)

a) ∞; b) $\frac{1}{4}$; c) 1; d) 0; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

Soluţie. Simplificând fracţia prin x^2-1, limita se rescrie $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}$.

14. Să se determine numărul real m pentru care polinomul $f = X^2-4X+m$ are rădăcină dublă. (**6 pct.**)

a) -4; b) 0; c) 2; d) 1; e) -2; f) 4.

Soluţie. Anularea discriminantului ecuaţiei de gradul doi asociate $f=0$ conduce la $\Delta \equiv 16-4m = 0 \Leftrightarrow m=4$.

15. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3+x, & \text{dacă } x \leq 1 \\ mxe^{x-1}, & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$ să fie continuă pe $\mathbb{R}$. (**6 pct.**)

a) e^{-1}; b) 4; c) 2; d) 1; e) e; f) nu există.

Soluţie. $\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} x^3+x = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} mxe^{x-1} \Leftrightarrow m=2$.

16. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x^2)dx$. (**6 pct.**)

a) $\frac{5}{6}$; b) 5; c) $\frac{7}{12}$; d) 2; e) 6; f) $\frac{1}{5}$.

Soluţie. $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{12} = \frac{7}{12}$.

17. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$. Să se calculeze $f'(0)$. (**8 pct.**)

a) nu există; b) 0; c) 2; d) 3; e) 1; f) e.

Soluţie. $f'(x) = xe^x + e^x$, deci $f'(0) = 1$.

18. Să se rezolve ecuaţia $x^2 - 5x + 4 = 0$. (**8 pct.**)

a) $\{1\}$; b) $\{-1, -4\}$; c) $\{4, 5\}$; d) $\varnothing$; e) $\{0\}$; f) $\{1, 4\}$.

Soluţie. $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}\right\} = \{1, 4\}$.