Universitatea Politehnica din Bucureşti 2008
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
Varianta A

1. Fie vectorii $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j}$. Vectorul sumă $\bar{u} + \bar{v}$ este **(4 pct.)**
   a) $\frac{1}{2}\bar{i}$; b) $\bar{i}$; c) $\bar{j}$; d) $-2\bar{j}$; e) $2\bar{i}$; f) $\frac{3}{2}\bar{j}$.

   Soluţie. $\vec{u} + \vec{v} = (\vec{i} + \vec{i} + \vec{j} - \vec{j}) = 2\vec{i}$.

2. Dacă aria unui cerc este π, atunci lungimea cercului este **(4 pct.)**
   a) $\sqrt[3]{4}$; b) 100; c) 1000; d) 2π; e) $\sqrt{2}$; f) 10.

   Soluţie. $A = \pi R^2 = \pi$, deci $R = 1$, şi deci lungimea cercului este $= 2\pi$.

3. Determinaţi care dintre numerele complexe de mai jos verifică ecuaţia $z^2 = -1$ **(4 pct.)**
   a) i; b) $\sqrt[3]{7}\,\mathrm{i}$; c) 1; d) 0; e) $5\sqrt{3} + \sqrt{7}\,\mathrm{i}$; f) 10.

   Soluţie. Dintre numerele specificate doar $z = i$ satisface ecuaţia $z^2 = -1$.

4. Ordinea crescătoare a numerelor $a = \sin 0$, $b = \sin\frac{\pi}{4}$ şi $c = \sin\frac{\pi}{2}$ este **(4 pct.)**
   a) b, a, c; b) b, c, a; c) a, b, c; d) a, c, b; e) c, b, a; f) c, a, b.

   Soluţie. Funcţia sinus este strict crescătoare în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, deci $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin 0 < \sin\frac{\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{2}$, deci $a < b < c$. Pe altă cale, avem $a = 0, b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = 1$, deci $a < b < c$, iar ordinea este a, b, c.

5. Distanţa dintre punctele $A(12, 0)$ şi $B(0, 5)$ este **(4 pct.)**
   a) π; b) 13; c) 1; d) 5; e) 0; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. $||AB|| = \sqrt{(0-12)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$.

6. Dacă perimetrul unui pătrat este 4, atunci aria lui este **(4 pct.)**
   a) -4; b) $\sqrt{2}$; c) π; d) 10; e) 7; f) 1.

   Soluţie. Notând cu l latura pătratului şi cu A aria sa, avem $4l = 4 \Rightarrow l = 1 \Rightarrow A = 1$.

7. Numărul de soluţii ale ecuaţiei $\cos x = 2$ este **(4 pct.)**
   a) 2; b) 4; c) 5; d) 3; e) 0; f) 1.

   Soluţie. Deoarece $\cos x \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R}$, egalitatea $\cos x = 2$ nu poate avea loc, deci ecuaţia are 0 soluţii.

8. Aria triunghiului ale cărui vârfuri au coordonatele (1,1), (1,2) şi (2,1) este **(4 pct.)**
   a) 31; b) $\sqrt[3]{2}$; c) $\frac{4}{103}$; d) 100; e) 17; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Folosind formula ariei cu determinant, obţinem $A = |\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

9. Dacă aria unui romb este 6 iar lungimea unei diagonale este 3, atunci lungimea celeilalte diagonale este **(4 pct.)**
   a) 4; b) 17; c) $\sqrt[3]{2}$; d) 13; e) 7; f) 10.

   Soluţie. Aria rombului este semiprodusul diagonalelor, deci $d_2 = 2A/d_1 = 2 \cdot 6/3 = 4$.

10. Modulul numărului complex $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ este **(4 pct.)**
    a) 5; b) 2; c) 0; d) 20; e) -1; f) $\sqrt{5}$.

    Soluţie. Avem $\left|1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

11. Produsul numerelor complexe $1 + \mathrm{i}$ şi $1 - \mathrm{i}$ este **(4 pct.)**
    a) $-3\,\mathrm{i}$; b) $10\,\mathrm{i}$; c) $\sqrt{7}$; d) 2; e) $\sqrt[3]{5}$; f) 10.

    Soluţie. $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$.

12. Produsul scalar al vectorilor $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$ şi $\bar{v} = \bar{i} - 2\bar{j}$ este **(4 pct.)**

a) 5; b) $\sqrt{3}$; c) 3; d) 0; e) 100; f) -200.

Soluţie. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 0.$

13. Valoarea expresiei $\sin \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ este **(6 pct.)**

a) 100; b) $\sqrt{5}$; c) 11; d) 2; e) $\sqrt[4]{7}$; f) -3.

Soluţie. $\sin \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4} = 1 + 1 = 2.$

14. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(1,1)$ şi $B(2,2)$ este **(6 pct.)**

a) $y = 7x$; b) $y = -2x$; c) $x + 2y + 3 = 0$; d) $y = x$; e) $y = 2x + 1$; f) $y = 2x$.

Soluţie. Folosim ecuaţia dreptei prin două puncte: $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-1}{2-1} \Leftrightarrow y = x.$

15. Într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este 3, iar lungimea ipotenuzei este 5. Lungimea celeilalte catete este **(6 pct.)**

a) -2; b) 2; c) $\sqrt[3]{4}$; d) 4; e) π; f) 5.

Soluţie. Folosind teorema lui Pitagora, notând cu $c_1 = 3, c_2$ lungimile celor două catete ale triunghiului , şi cu $a = 5$ lungimea ipotenuzei triunghiului, rezultă $c_2^2 = a^2 - c_1^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c_2 = 4$.

16. Dacă $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\sin^2 x$ are valoarea **(8 pct.)**

a) $\frac{1}{7}$; b) -1; c) 2; d) $\sqrt{5}$; e) 0; f) $\frac{1}{4}$.

Soluţie. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

17. Punctul de intersecţie al dreptelor $y = x - 1$ şi $y = -x + 1$ are coordonatele **(8 pct.)**

a) (1,0); b) (3,5); c) (1,1); d) (4,7); e) (5,3); f) (0,0).

Soluţie. Rezolvând sistemul $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases}$, obţinem $x = 1, y = 0$, deci punctul de intersecţie este $(1,0)$.

18. Expresia $\dfrac{\sin 2x}{2 \sin x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, este egală cu **(8 pct.)**

a) $\cos x$; b) $\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}}$; c) 1; d) $1 + \operatorname{ctg} x$; e) $\sin x$; f) 0.

Soluţie. $\dfrac{\sin 2x}{2 \sin x} = \dfrac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x.$