1. Pentru ce valoare $a \in \mathbb{R}$ vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = (a+1)\,\vec{i} + a\vec{j}$ sunt perpendiculari? **(5 pct.)**

   a) $a = 0$; b) $a = \frac{1}{2}$; c) $a = -1$; d) $a = 5$; e) nu există o astfel de valoare; f) $a = -2,5$.

   Soluţie. Perpendicularitatea celor doi vectori revine la anularea produsului scalar:
$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow 3(a+1) + a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 3a + 3 = 0.$$
   Dar această ecuaţie nu are soluţii reale ($\Delta = 9 - 12 < 0$), deci nu există o astfel de valoare.

2. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A\,(1,2)$ şi $B\,(3,5)$ este **(5 pct.)**

   a) $3x + y + 2 = 0$; b) $2x - 3y + 1 = 0$; c) $2x - 3y + 2 = 0$; d) $3x - 2y + 1 = 0$; e) $x - 2y + 1 = 0$; f) $3x - 4y + 2 = 0$.

   Soluţie. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(x_A, y_A)$ şi $B(x_B, y_B)$ este:
$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{5-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0.$$

3. Fie vectorii $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$. Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = p\vec{a} + q\vec{b}$. **(5 pct.)**

   a) $p = -3,\ \ q = -2$; b) $p = 0,\ \ q = 0$; c) $p = 4,\ \ q = 2$; d) $p = 7,\ \ q = 1$; e) $p = 3,\ \ q = 3$; f) $p = 1,\ \ q = -2$.

   Soluţie. Înlocuind $\vec{a}, \vec{b}$ şi $\vec{u}$ în ultima egalitate, obţinem:
$$6\vec{i} + 2\vec{j} = p(\vec{i} + \vec{j}) + q(\vec{i} - \vec{j}) \Leftrightarrow (p + q - 6)\vec{i} + (p - q - 2)\vec{j} = 0.$$
   Vectorii $\vec{i}, \vec{j}$ fiind liniar independenţi, coeficienţii se anulează, deci $\begin{cases} p + q - 6 = 0 \\ p - q - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 4 \\ q = 2. \end{cases}$
   Altfel. Se observă că $\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, deci:
$$\vec{u} = 6\vec{i} + 2\vec{j} = 6 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + 2 \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}) = 3(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} - \vec{b} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \ \ \Rightarrow \ \ p = 4, q = 2.$$

4. Între lungimile laturilor unui triunghi ABC există relaţia $a^2 = b^2 + c^2$. Atunci, măsura unghiului $\hat{A}$ este **(5 pct.)**

   a) $90°$; b) $60°$; c) $120°$; d) $45°$; e) $210°$; f) $30°$.

   Soluţie. Relaţia indică faptul că triunghiul satisface Teorema lui Pitagora, unde a este lungimea ipotenuzei, deci $\hat{A} = 90°$.

5. Dacă $A = \{x \in [0, 2\pi]\,|\cos x = -2\}$, atunci **(5 pct.)**

   a) $A = \{\pi\}$; b) $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$; c) $A = \varnothing$; d) $A = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$; e) $A = \{0, 2\pi\}$; f) $A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$.

   Soluţie. Cum $\cos x \in [-1, 1] \not\ni -2, \forall x \in \mathbb{R}$, ecuaţia $\cos x = -2$ nu are soluţii în intervalul $[0, 2\pi]$, deci $A = \emptyset$.

6. Să se calculeze $\sin x + \cos x$ pentru $x = \frac{3\pi}{4}$. **(5 pct.)**

   a) -2; b) 1; c) 0; d) -1; e) 2; f) $-\sqrt{2}$.

   Soluţie. Folosind relaţiile $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ şi $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$, obţinem:
$$\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

7. Să se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = (\lambda - 1)\,\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = \lambda\vec{i} + \vec{j}$ sunt coliniari. **(5 pct.)**

   a) $\frac{1}{4}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0; d) 2; e) 1; f) 3.

   Soluţie. Componentele celor doi vectori trebuie să fie proporţionale, deci: $\frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{-3}{1} \Leftrightarrow \lambda - 1 = -3\lambda \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$.

8. Forma trigonometrică a numărului complex $z = \mathrm{i}$ este **(5 pct.)**

a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; c) $\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{4}$; d) $\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{3}$; e) $\cos\pi + \mathrm{i}\ \sin\pi$; f) $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\ \sin\frac{\pi}{2}$.

Soluţie. Modulul numărului complex $z = 1$ este $|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, iar argumentul său α este dat de

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{Re(z)}{|z|} = \dfrac{0}{1} = 0, \\ \sin\alpha = \dfrac{Im(z)}{|z|} = \dfrac{1}{1} = 1, \end{cases} \quad , \ \alpha \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

deci rezultă $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

9. Fie, într-un reper cartezian, punctele $M(0,3)$, $N(1,1)$, $P(-1,2)$. Centrul de greutate al triunghiului MNP este **(5 pct.)**

a) $(-1,2)$; b) $(0,2)$; c) $(1,1)$; d) $(2,2)$; e) $(2,0)$; f) $(0,6)$.

Soluţie. Media aritmetică a coordonatelor vârfurilor produce baricentrul: $G\left(\frac{0+1+(-1)}{3}, \frac{3+1+2}{3}\right) = (0,2)$.

10. Produsul $\cos 30^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ$ este egal cu **(5 pct.)**

a) -1; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) 1; e) $\sqrt{2}$; f) 0.

Soluţie. Avem: $\cos 30^\circ \cos 60^\circ \cos 90^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. *Altfel.* Deoarece $\cos 90^\circ = 0$, produsul este nul.

11. Ştiind că $\sin x = 1$, să se calculeze $\cos x$. **(5 pct.)**

a) $\frac{2}{3}$; b) -1; c) 1; d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; e) 0; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Egalitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ conduce la: $1 + \cos^2 x = 1$, deci $\cos x = 0$.

12. Perimetrul unui triunghi ABC este 24, iar lungimile laturilor sunt proporţionale cu numerele 3,4,5. Să se determine lungimile laturilor acestui triunghi. **(5 pct.)**

a) $\left\{\frac{11}{2}, 11, \frac{15}{2}\right\}$; b) $\{7,8,9\}$; c) $\{3,4,5\}$; d) $\{9,12,15\}$; e) $\{6,7,11\}$; f) $\{6,8,10\}$.

Soluţie. Notând cu a, b, c cele trei laturi, avem:

$$\begin{cases} a + b + c = 24 \\ \dfrac{a}{3} = \dfrac{b}{4} = \dfrac{c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5a/3 \\ b = 4a/3 \\ a + \dfrac{5a}{3} + \dfrac{4a}{3} = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \\ c = 10, \end{cases}$$

deci soluţia este formată din mulţimea $\{6,8,10\}$.

13. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $\sqrt{3}$. Latura triunghiului este **(5 pct.)**

a) 3; b) 5; c) 2; d) 1; e) $-\sqrt{3}$; f) $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Dacă l este latura triunghiului echilateral, atunci aria acestuia este: $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$. Având $A = \sqrt{3}$, rezultă $\sqrt{3} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow l^2 = 4 \Leftrightarrow l \in [\pm 2]$. Dar $l > 0$, deci $l = 2$.

14. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + \mathrm{i}$. **(5 pct.)**

a) $|z| = \sqrt{2}$; b) $|z| = 1 + \sqrt{2}$; c) $|z| = -1$; d) $|z| = 0$; e) $|z| = 1$; f) $|z| = \mathrm{i}$.

Soluţie. Avem $|z| = \sqrt{(Re\ z)^2 + (Im\ z)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

15. Unul din unghiurile unui trapez isoscel de înălţime $\sqrt{2}$ are măsura de 45°. Atunci, suma lungimilor laturilor neparalele este **(5 pct.)**

a) $2 + \sqrt{2}$; b) 4; c) 2; d) 1; e) $2\sqrt{2}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. Fiind ipotenuze în triunghiuri dreptunghice isoscele de catete $\sqrt{2}$, cele două laturi neparalele au fiecare lungimile $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, deci suma lungimilor lor este 4.

16. Dreptele $y = x$, $y = -x$ şi $2x + 3y = 0$ se taie în punctele **(5 pct.)**

a) $(-1,-1),(-1,2),(1,-1)$; b) $(0,-1),(1,0),(1,1)$; c) $(0,1),(-1,0)$; d) $(0,1),(1,0),(1,1)1$; e) $(2,2)$; f) $(0,0)$.

Soluţie. Punctul de intersecţie (dacă aceasta există) este soluţia sistemului: $\begin{cases} y = x, \ \ y = -x \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, deci dreptele se intersectează în punctul $(0,0)$.

17. În planul complex se dă un paralelogram $ABCD$. Ştiind că afixele punctelor A, B, C sunt, respectiv, $z_A = 1$, $z_B = -1$, $z_C = \mathrm{i}$ să se determine afixul punctului D. **(5 pct.)**

a) $z_D = 2 + \mathrm{i}$; b) $z_D = 1 + 3\mathrm{i}$; c) $z_D = 1 - \mathrm{i}$; d) $z_D = 1 + \mathrm{i}$; e) $z_D = 3 + 2\mathrm{i}$; f) $z_D = 0$.

Soluţie. Punctul de intersecţie al diagonalelor le înjumătăţeste pe acestea, deci afixul său este semisuma afixelor vârfurilor opuse. Rezultă:

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_B + z_D}{2} \Leftrightarrow \frac{1+i}{2} = \frac{-1+z_D}{2} \Leftrightarrow z_D = 2 + i.$$

18. Care este mulţimea valorilor pentru $\mathrm{tg}\, a$, dacă $\sin a = \frac{1}{2}$? **(5 pct.)**

a) $\{-1\}$; b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$; c) $\{1\}$; d) $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$; e) $\{0\}$; f) $\{2,3\}$.

Soluţie. Din formula $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, obţinem: $\frac{1}{4} + \cos^2 a = 1 \Leftrightarrow \cos a \in \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Atunci:

$$\mathrm{tg}\, a = \left\{\frac{\sin a}{\cos a}\right\} \in \left\{\frac{1/2}{\pm\sqrt{3}/2}\right\} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$