1. Calculaţi $\int_0^1 xe^{-x}dx$. **(6 pct.)**

   a) $e-1$; b) e; c) 1; d) $1-e$; e) $2e$; f) $1-\frac{2}{e}$.

   Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem

$$\int xe^{-x}dx = \int x(-e^{-x})'dx = -xe^{-x} - \int(-e^{-x})dx = -xe^{-x} - e^{-x} = -(x+1)e^{-x},$$

   deci $\int_0^1 xe^{-x}dx = -(x+1)e^{-x}|_0^1 = -(2e^{-1}-1) = 1-\frac{2}{e}$.

2. Într-o progresie aritmetică primii doi termeni sunt $a_1 = 1$ şi $a_2 = 6$. Să se calculeze a_3. **(6 pct.)**

   a) 9; b) 14; c) 8; d) 16; e) 12; f) 11.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Raţia progresiei aritmetice este $r = a_2 - a_1 = 5$, deci $a_3 = a_2 + r = 11$. ***Metoda 2.*** Are loc egalitatea $2a_k = a_{k-1} + a_{k+1}$, $\forall k \geq 2$. Pentru $k = 2$, obţinem $2a_2 = a_1 + a_3$, deci $a_3 = 2a_2 - a_1 = 11$.

3. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ este: **(6 pct.)**

   a) $\{0,1,4\}$; b) $\{1,7\}$; c) $\{4,5\}$; d) $\{-1,6\}$; e) $\{0,2\}$; f) $\{-2,3,5\}$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie: $x(x^2-5x+4) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1,4\}$.

4. Să se rezolve ecuaţia $\sqrt{2-x} = x$. **(6 pct.)**

   a) $x = 4$; b) $x = -1$; c) $x = -4$; d) $x = 1$; e) $x = 2$; f) $x = 6$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a radicalului este $2-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Pozitivitatea radicalului conduce la pozitivitatea membrului drept, deci $x \geq 0$. În concluzie soluţiile (dacă există), trebuie să satisfacă $x \in [0,2]$. Ridicând la pătrat ecuaţia, rezultă $2-x = x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2,1\}$. Dar $-2 \notin [0,2]$ şi $1 \in [0,2]$, deci ecuaţia admite unica soluţie $x = 1$.

5. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze $\det(A^2)$. **(6 pct.)**

   a) 4; b) 2; c) 3; d) 1; e) -1; f) 14.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Prin calcul direct, obţiem $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $\det A^2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. ***Metoda 2.*** Se observă că $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, deci $\det(A^2) = (\det A)^2 = 1^2 = 1$.

6. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$. Să se calculeze $f''(0)$. **(6 pct.)**

   a) -2; b) 3; c) $\frac{1}{2}$; d) $2e$; e) $\frac{1}{3}$; f) $1+e$.

   Soluţie. Avem $f''(x) = (x^2+e^x)'' = (2x+e^x)' = 2+e^x$, deci $f''(0) = 2+e^0 = 3$.

7. Să se rezolve ecuaţia $5^{x+1} = 125$. **(6 pct.)**

   a) $x = 6$; b) $x = 2$; c) $x = 3$; d) $x = 1$; e) $x = 4$; f) $x = 5$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $5^{x+1} = 5^3 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

8. Soluţia ecuaţiei $2x - 1 = 3$ este: **(6 pct.)**

   a) $x = 3$; b) $x = 1$; c) $x = -3$; d) $x = 0$; e) $x = -1$; f) $x = 2$.

   Soluţie. Obţinem $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$.

9. Calculaţi $S = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3$. **(6 pct.)**

   a) $S = 6$; b) $S = 12$; c) $S = 14$; d) $S = 10$; e) $S = 8$; f) $S = 16$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Folosind formula $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, obţinem $S = \frac{4!}{1!3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} = 4+6+4 = 14$.

   Metoda 2. Folosim egalitatea $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$ pentru $k = 4$. Obţinem $S = \sum_{k=0}^{4} C_4^k - C_4^0 - C_4^4 = 2^4 - 2 = 14$.

10. Suma soluţiilor ecuaţiei $x^2 - 7x + 12 = 0$ este: **(6 pct.)**

a) 5; b) 1; c) -6; d) 0; e) 6; f) 7.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Prima relaţie Viete conduce la $x_1 + x_2 = -\frac{-7}{1} = 7$. ***Metoda 2.*** Rezolvăm ecuaţia: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x \in \{3, 4\}$, deci $x_1 + x_2 = 3 + 4 = 7$.

11. Mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + x - 2 \leq 0$ este: **(6 pct.)**

a) $(1, \infty)$; b) $(-\infty, 2]$; c) $(0, 1)$; d) $(0, \infty)$; e) $[-2, 1]$; f) $[-3, -2)$.

Soluţie. Ecuaţia $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$ are soluţiile $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Deci mulţimea soluţiilor inecuaţiei $x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) \leq 0$ este intervalul $[x_1, x_2] = [-2, 1]$.

12. Să se calculeze determinantul $d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **(6 pct.)**

a) $d = 6$; b) $d = 12$; c) $d = 5$; d) $d = 14$; e) $d = -12$; f) $d = 18$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Aplicând regula lui Sarrus, rezultă $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 27 - (6 + 6 + 6) = 18$. ***Metoda 2.*** Adunăm ultimele două coloane la prima, dăm factor 6 din prima coloană, scădem prima linie din următoarele două, apoi dezvoltăm după prima coloană. Obţinem:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 = 18.$$

13. Determinaţi abscisele punctelor de extrem pentru funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$. **(6 pct.)**

a) $x \in \{-1, 1\}$; b) $x \in \{-3, 0\}$; c) $x \in \{0, 4\}$; d) $x = 5$; e) $x \in \{-2, 1\}$; f) $x \in \{2, 3\}$.

Soluţie. Pentru $f(x) = x^3 - 3x + 1$ extremele locale (dacă există) sunt conform Teoremei Fermat, printre rădăcinile ecuaţiei $f'(x) = 0$. Aceasta se rescrie: $3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. Dar $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0$, $f(-1) = 3 > 0$, $f(1) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty > 0$, deci f creşte, scade şi apoi creşte respectiv pe intervalele $(-\infty, -1)$, $[-1, 1]$ şi $(1, \infty)$. Rezultă că $x = -1$ este abscisă de maxim local, iar $x = 1$ este abscisă de minim local pentru f. Prin urmare abscisele căutate sunt $\{-1, 1\}$.

14. Rezolvaţi inecuaţia $3x + 1 > 2x$. **(6 pct.)**

a) $x \geq -3$; b) $x \in (-2, 0)$; c) $x > -1$; d) $x < 0$; e) $x < -3$; f) $x < -5$.

Soluţie. Inecuaţia see rescrie $3x + 1 > 2x \Leftrightarrow x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

15. Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ este: **(6 pct.)**

a) $x = 1, y = 1$; b) $x = -1, y = 0$; c) $x = 3, y = -3$; d) $x = 0, y = 1$; e) $x = -1, y = -1$; f) $x = 1, y = 2$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Scăzând cele două ecuaţii obţinem $4y = 4 \Rightarrow y = 1$, care înlocuită în prima ecuaţie conduce la $2x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 1$. Deci $x = y = 1$. ***Metoda 2.*** Determinantul matricei coeficienţilor este $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat. Aplicând regula lui Cramer, rezultă: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{-8} = 1$, iar $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{-8} = 1$, deci $x = y = 1$.