Universitatea Politehnica din Bucureşti 2016
Disciplina: Geometrie şi Trigonometrie
G2 * Varianta D

1. Aflaţi valoarea parametrului $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = -a\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt perpendiculari. **(6 pct.)**

   a) $a = 0$; b) $a = 1$; c) $a = 6$; d) $a = -3$; e) $a = 2$; f) $a = -6$.

   Soluţie. Perpendicularitatea celor doi vectori este echivalentă cu anularea produsului lor scalar:
   $$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{i} - 2\vec{j}, -a\vec{i} + 3\vec{j} \rangle = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot (-a) + (-2) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow a = -6.$$

2. Să se determine valoarea lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuaţie $mx + y = 1$ este paralelă cu dreapta $2x - y = 3$. **(6 pct.)**

   a) $m = -\frac{1}{2}$; b) $m = -1$; c) $m = \frac{1}{2}$; d) $m = 2$; e) $m = 1$; f) $m = -2$.

   Soluţie. Paralelismul celor două drepte revine la proporţionalitatea coefifienţilor celor două variabile din ecuaţiile acestora: $\frac{m}{2} = \frac{1}{-1} \Leftrightarrow m = -2$.

3. Să se calculeze produsul $P = \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \cos 30°$. **(6 pct.)**

   a) $\frac{3}{4}$; b) 0; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{4}{3}$; f) 1.

   Soluţie. Înlocuind factorii din produs, obţinem $P = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$.

4. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ ştiind că $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, unde $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{w} = 3\vec{i} - \vec{j}$. **(6 pct.)**

   a) $a = 3, b = -1$; b) $a = -2, b = -1$; c) $a = -1, b = 2$; d) $a = 2, b = 1$; e) $a = 0, b = 1$; f) $a = 1, b = 2$.

   Soluţie. Înlocuind $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ în prima egalitate şi apoi identificând coeficienţii vectorilor $\vec{i}$ şi respectiv $\vec{j}$, obţinem $3\vec{i} - \vec{j} = a(\vec{i} - \vec{j}) + b(\vec{i} + \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1. \end{cases}$

5. Fie S suma soluţiilor ecuaţiei $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 3$, care aparţin intervalului $[0, \frac{\pi}{2}]$. Atunci: **(6 pct.)**

   a) $S = \frac{\pi}{4}$; b) $S = \frac{\pi}{6}$; c) $S = \frac{\pi}{2}$; d) $S = 0$; e) $S = \frac{\pi}{3}$; f) $S = \pi$.

   Soluţie. ***Metoda 1.*** Deoarece $\cos x$, $\cos 2x$ şi $\cos 3x$ aparţin intervalului $[-1, 1]$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu egalitate d.n.d. $\cos x = 1$, $\cos 2x = 1$ şi $\cos 3x = 1$ simultan, deci ţinând cont de condiţia din ipoteză, rezultă $x \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cap \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cap \{2k\pi/3 | k \in \mathbb{Z}\} \cap [0, \pi] = \{0\}$. Deci soluţia căutată este $x = 0$. ***Metoda 2.*** Folosind formula $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, ecuaţia se rescrie
   $$(1 - \cos x) + (1 - \cos 2x) + (1 - \cos 3x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 x + \sin^2 \frac{3x}{2} = 0,$$
   sumă de pătrate care se anuleaza d.n.d. fiecare termen este nul. Deci se obţine sistemul de ecuaţii
   $$\begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0 \\ \sin x = 0 \\ \sin \frac{3x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \\ x \in \{2k\pi/3 | k \in \mathbb{Z}\} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$
   Singura valoare care satisface condiţia din ipoteză $x \in [0, \pi]$ este $x = 0$. ***Metoda 3.*** Notând $t = \cos x$ şi folosind egalităţile $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ şi $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, ecuaţia se rescrie
   $$t + (2t^2 - 1) + (4t^3 - 3t) = 3 \Leftrightarrow 4t^3 + 2t^2 - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)[2(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{2}] = 0.$$
   Dar al doilea factor este strict pozitiv (deci nenul), de unde rezultă $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1$, ecuaţie care în intervalul $[0, \pi]$ are unica soluţie $x = 0$.

6. Latura pătratului de arie $4\,\text{cm}^2$ are lungimea: **(6 pct.)**

   a) $2\sqrt{2}\,\text{cm}$; b) $2\,\text{cm}$; c) $\frac{1}{2}\,\text{cm}$; d) $1\,\text{cm}$; e) $\sqrt{2}\,\text{cm}$; f) $8\,\text{cm}$.

   Soluţie. Latura pătratului este $\sqrt{4\text{cm}^2} = 2\text{cm}$.

7. Aflaţi valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $P(1, m)$ aparţine dreptei $x + y = 2$. **(6 pct.)**

a) $m = 2$; b) $m = 0$; c) $m = 1$; d) $m = -2$; e) $m = \sqrt{2}$; f) $m = -1$.

Soluţie. Punctul P aparţine dreptei d.n.d. coordonatele sale satisfac ecuaţia acesteia, deci $1 + m = 2 \Rightarrow m = 1$.

8. Laturile triunghiului ABC au lungimile 1, 1, $\sqrt{2}$. Atunci raza R a cercului circumscris triunghiului este: **(6 pct.)**

a) $\frac{1}{2}$; b) $\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; d) 1; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\frac{1}{3}$.

Soluţie. Cele trei lungimi din enunţ sunt numere pitagoreice ($\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2$), deci triunghiul este dreptunghic, iar raza cercului circumscris este de lungime jumătate din cea a ipotenuzei, deci $\sqrt{2}/2$.

9. În triunghiul ascuţitunghic ABC se cunosc: $m(\hat{A}) = 45°$, $m(\hat{B}) = 60°$ şi $BC = 2$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $AC = 1$; b) $AC = 3$; c) $AC = \sqrt{6}$; d) $AC = 4$; e) $AC = \sqrt{2}$; f) $AC = 2$.

Soluţie. Aplicăm teorema sinusului în triunghiul ABC: $\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°} \Rightarrow AC = \frac{2 \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}/2}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{6}$.

10. În triunghiul ABC se dau $AB = AC = 5$ şi $BC = 6$. Atunci înălţimea dusă din A are lungimea: **(6 pct.)**

a) 1; b) 8; c) 4; d) 5; e) 3; f) 2.

Soluţie. Triunghiul ABC este isoscel, deci mediana AD corespunzătoare laturii BC ($D \in BC$, $BD = DC$) este şi înălţime, deci $\widehat{ADC} = 90°$. Observăm că $DC = \frac{BC}{2} = 3$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul drepunghic ADC, rezultă $AD^2 = \sqrt{AC^2 - DC^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

11. Fie $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ şi $C(1, 0)$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(6 pct.)**

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\frac{1}{3}$; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\frac{2}{3}$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Aplicăm formula ariei triunghiului: $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}$. ***Metoda 2.*** Triunghiul reprezintă jumătate din pătratul $OABC$ de arie 1, deci aria sa este $\frac{1}{2}$.

12. Se dau vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Atunci vectorul $\vec{u} + \vec{v}$ este: **(6 pct.)**

a) $\vec{i} + \vec{j}$; b) $3\vec{i} + 5\vec{j}$; c) $5\vec{i} + 3\vec{j}$; d) $2\vec{i} - \vec{j}$; e) $3\vec{i} + 4\vec{j}$; f) $\vec{i} - \vec{j}$.

Soluţie. Adunând coeficienţii corespunzători vectorilor $\vec{i}$ respectiv $\vec{j}$, obţinem: $\vec{u} + \vec{v} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) = (2 + 1)\vec{i} + (3 + 2)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$.

13. Se consideră triunghiul ABC în care $AC = 3$, $BC = 4$ iar $m(\hat{C}) = \frac{\pi}{3}$. Atunci: **(6 pct.)**

a) $AB = \sqrt{2}$; b) $AB = 13$; c) $AB = \sqrt{13}$; d) $AB = 1$; e) $AB = 5$; f) $AB = \sqrt{15}$.

Soluţie. Aplicăm în triunghiul ABC teorema cosinusului pentru unghiul $\hat{C}$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \hat{C} \Leftrightarrow AB^2 = 9 + 16 - 24 \cdot \frac{1}{2} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}.$$

14. Valoarea expresiei $E = \frac{1}{\cos^2 15°} + \frac{1}{\sin^2 15°}$ este: **(6 pct.)**

a) 16; b) 18; c) 8; d) 10; e) 14; f) 12.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Notăm $E = \frac{1}{\cos^2 15°} + \frac{1}{\sin^2 15°}$. Folosind formula trigonometrică fundamentală şi relaţia $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, obţinem: $E = \frac{1}{\sin^2 15° \cos^2 15°} = \frac{4}{(2 \sin 15° \cos 15°)^2} = \frac{4}{\sin^2 30°} = \frac{4}{1/4} = 16$. ***Metoda 2.*** Folosind egalităţile $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ şi $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, apoi raţionalizând fracţiile obţinute, rezultă: $E = \frac{2}{1+\cos 30°} + \frac{2}{1-\cos 30°} = \frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{2}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}\right) = 4[(2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})] = 16$.

15. Dacă $\sin x = \frac{1}{2}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, atunci $\operatorname{tg} x$ este: **(6 pct.)**

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; d) 1; e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $\sqrt{2}$.

Soluţie. ***Metoda 1.*** Există o unică soluţie a ecuaţiei $\sin x = \frac{1}{2}$ care aparţine intervalului $(0, \frac{\pi}{2})$, anume $x = \frac{\pi}{6}$, deci $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ***Metoda 2.*** Folosind formula trigonometrică fundamentală, obţinem $\cos x \in$

$\{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}\} = \{\pm\sqrt{1-\frac{1}{4}}\} = \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Dar $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, deci $\cos x > 0$ şi prin urmare $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, iar $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.