1. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $\sqrt{x+3}-x=1$ este: **(6 pct.)**

   a) $\{-1,3\}$; b) $\{-3,0\}$; c) $\{3,4\}$; d) $\{-2,3\}$; e) $\{1\}$; f) $\varnothing$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\sqrt{x+3}=x+1$. Condiţia de existentă a radicalului este $x+3\geq 0$, deci $x\geq -3$. De asemenea membrul drept, fiind egal cu un radical, trebuie să fie nenegativ, deci $x\geq -1$. În concluziile, din condiţiile induse de radical, obţinem $x\geq -1$. Ridicând ecuaţia la pătrat, rezultă $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x\in\{1,-2\}$. Convine doar soluţia $x=1\geq -1$. e

   Altfel. După ridicare la pătrat, ecuaţia devine $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x\in\{1,-2\}$. Dar prin înlocuire în ecuaţia dată, se constată că dintre cele două valori obţinute, doar $x=1$ satisface ecuaţia. Deci unica soluţie a ecuaţiei este $x=1$.

2. Să se rezolve ecuaţia $\log_3(x-1)=2$. **(6 pct.)**

   a) $x=14$; b) $x=11$; c) $x=7$; d) $x=8$; e) $x=10$; f) $x=3$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a logaritmului conduce la $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Aplicând ecuaţiei funcţia exponenţilă de bază 3, obţinem $x-1=3^2 \Leftrightarrow x=10$, care satisface condiţia $x>1$. e

3. Să se rezolve inecuaţia $7x+2>5x+4$. **(6 pct.)**

   a) $x\in(1,\infty)$; b) $x\in(-4,-3)$; c) $x\in(-3,0)$; d) $x\in\varnothing$; e) $x\in(-\infty,-4)$; f) $x\in(0,1)$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $2x>2 \Leftrightarrow x>1$, deci $x\in(1,\infty)$. a

4. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $2,8,x$ (în această ordine) să fie în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

   a) $x=14$; b) $x=18$; c) $x=16$; d) $x=6$; e) $x=10$; f) $x=12$.

   Soluţie. Condiţia de progresie aritmetică a trei termeni este ca termenul din mijloc sa fie media aritmetică a celorlalţi doi termeni, deci $8=\frac{x+2}{2} \Leftrightarrow x=14$. a

   Altfel. Dacă notăm cu $a=2$ primul termen al progresiei şi cu r raţia acesteia, obţinem $8=a+r$, deci $r=8-a=6$. Prin urmare $x=a+2r=2+2\cdot 6=14$.

5. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ astfel încât numerele $2,4,x$ (în această ordine) să fie în progresie geometrică. **(6 pct.)**

   a) $x=8$; b) $x=5$; c) $x=9$; d) $x=11$; e) $x=14$; f) $x=18$.

   Soluţie. Condiţia de progresie geometrică a trei termeni este ca termenul din mijloc sa fie media geometrică a celorlalţi doi termeni, deci $4=\sqrt{2\cdot x} \Leftrightarrow 2x=16 \Leftrightarrow x=8$. a

   Altfel. Dacă notăm cu $a=2$ primul termen al progresiei şi cu q raţia acesteia, obţinem $4=a\cdot q$, deci $q=\frac{4}{a}=2$ şi deci $x=a\cdot q^2=2\cdot 2^2=8$.

6. Fie polinomul $f=X^3+4X^2+X-4$. Să se determine restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X-1$. **(6 pct.)**

   a) 10; b) 2; c) 7; d) 6; e) -1; f) 3.

   Soluţie. Din teorema împărţirii cu rest, obţinem $f=g\cdot h+r \Leftrightarrow X^3+4X^2+X-4=(X-1)\cdot h+r$, unde restul r este polinom de grad cel mult zero, deci este o constantă reală. Înlocuind in această egalitate X cu rădăcina $x=1$ a polinomului g, rezultă $2=0+r(1)$, deci $r=2$. b

   Altfel. Efectuând efectiv împărţirea cu rest a polinomului f la g, se obţine restul $r=2$.

   Altfel. Împărţirea cu rest a polinomului f la g produce un cât de grad egal cu $\operatorname{grad}(f)-\operatorname{grad}(g)=3-1=2$ şi un rest rest r de grad strict inferior lui $\operatorname{grad}(g)=1$, deci un polinom de grad zero (constant). Împărţirea va fi deci descrisă de egalitatea: $X^3+4X^2+X-4=(X-1)\cdot(aX^2+bX+c)+r$, unde

$a, b, c, r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Egalitatea se rescrie $X^3 + 4X^2 + X - 4 = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X + (r-c)$. Identificând coeficienţii celor două polinoame egale, rezultă sistemul liniar

$$\begin{cases} a = 1, & b - a = 4 \\ c - b = 1, & r - c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, & b = 5 \\ c = 6, & r = 2, \end{cases}$$

deci $r = 2$.

7. Să se rezolve ecuaţia $2^{x+1} = 16$. **(6 pct.)**

   a) $x = 3$; b) $x = -1$; c) $x = 4$; d) $x = 2$; e) $x = \frac{1}{2}$; f) $x = 6$.

   Soluţie. Logaritmând egalitatea în baza 2, obţinem $x+1 = \log_2 16 \Leftrightarrow x+1 = \log_2 2^4 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$, deci $x = 3$. a

8. Fie matricea $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Să se calculeze determinantul matricei A^2. **(6 pct.)**

   a) 25; b) 16; c) 15; d) 0; e) 9; f) 4.

   Soluţie. Calculăm $A^2 = A \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right)$; aplicând formula $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$, rezultă $\det A^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$. e

   Altfel. Folosim proprietatea că pentru orice matrice pătratică A şi orice număr natural $m \geq 1$, avem $\det A^m = (\det A)^m$. Cum $\det A = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$, rezultă $\det A^2 = (\det A)^2 = 3^2 = 9$.

9. Să se calculeze determinantul $D = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right|$. **(6 pct.)**

   a) $D = 0$; b) $D = 14$; c) $D = 3$; d) $D = 11$; e) $D = 4$; f) $D = 1$.

   Soluţie. Aplicând regula lui Sarrus, $\left|\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ m & n & p \end{smallmatrix}\right| = aep + bfm + dnc - (mec + dbp + nfa)$, obţinem $D = 1 \cdot 0 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 - (2 \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \cdot 1) = 0$, deci $D = 0$. a

   Altfel. Se observă că linia a treia a determinantului este dublul celei dintâi, deci determinantul având două linii proporţionale, este nul.

   Altfel. Se observă că a doua coloană este dubla celei dintâi, deci determinantul având două coloane proporţionale, este nul.

   Altfel. Se observă că a treia coloană este tripla celei dintâi, deci $D = 0$.

   Altfel. Dezvoltând după o linie sau după o coloană oarecare, calculul se reduce la determinanţi de ordinul doi; se obţine $D = 0$.

   Altfel. Se fabrică zerouri pe o linie sau pe o coloană a determinantului; se obţine fie o linie nulă, fie o coloană nulă, deci $D = 0$.

10. Să se rezolve ecuaţia $x^2 + x - 2 = 0$ în mulţimea numerelor reale. **(6 pct.)**

    a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$; b) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; c) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$;

    d) $x_1 = 0$, $x_2 = -1$; e) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$; f) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

    Soluţie. Ecuaţia este de forma $ax^2 + bx + c = 0$, cu $a \neq 0$, deci are soluţiile complexe $x \in \{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\}$. Se obţin astfel soluţiile $\{-2, 1\}$, ambele reale. f

    Altfel. Se observă că suma coeficienţilor polinomului $x^2 + x - 2$ este $1 + 1 - 2 = 0$, deci acesta admite rădăcina $x_1 = 1$. Pentru a afla a doua rădăcină aflăm câtul împărţirii polinomului $x^2 + x - 2$ la $x - x_1 = x - 1$ (folosind împărţirea care se face exact, eventual cu schema Horner). Câtul fiind $x + 2$, rezultă a doua rădăcină a polinomului, $x_2 = -2$. Deci mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei este $\{-2, 1\}$.

11. Suma soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^3 - 3x^2 - 5x = 0$ este: **(6 pct.)**

    a) 8; b) -5; c) 6; d) 3; e) 5; f) 7.

    Soluţie. Polinomul se rescrie $x^3 - 3x^2 - 5x = x(x^2 - 3x - 5)$. Avem deci o primă rădăcină $x_1 = 0$, soluţie reală a ecuaţiei date. Celelalte două soluţii complexe ale ecuaţiei sunt rădăcinile $x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{20}}{2}$ ale polinomului de gradul doi $x^2 - 3x - 5$, care sunt ambele reale. Deci suma soluţiilor reale ale ecuaţiei date este $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + \frac{3+\sqrt{20}}{2} + \frac{3-\sqrt{20}}{2} = 3$. d *Observaţie.* Se verifică uşor că în cazul nostru rădăcinile fiind toate reale, suma obţinută coincide cu cea dată de prima egalitate Viete, $-\frac{-3}{1} = 3$. În general însă, prima formulă Viete produce suma rădăcinilor *complexe* ale polinomului. În cazul în care polinomul de grad trei ar avea doar o rădăcină reală, iar celelalte două complexe conjugate însă, această sumă nu ar produce rezultatul cerut. Din acest motiv este necesar să se determine dacă există şi rădăcini complexe ne-reale (iar în acest caz rădăcinile reale trebuie determinate efectiv), fie dacă toate rădăcinile sunt reale (iar în acest caz prima relaţie Viete produce rezultatul cerut). ⓓ

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x\,(1-x)^2}$. Să se determine suma absciselor punctelor de extrem local. **(6 pct.)**

a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{5}{2}$; e) $\frac{3}{4}$; f) $\frac{1}{6}$.

Soluţie. Prin derivare obţinem

$$f'(x) = \frac{3x^2-4x+1}{3[x(x-1)^2]^{2/3}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9x[x(x-1)^2]^{2/3}}.$$

Se observă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ şi că $f''(\frac{1}{3}) < 0$, deci f este concavă în $x = \frac{1}{3}$, deci $x = \frac{1}{3}$ este abscisă de punct de maxim local pentru f. Pe de altă parte în $x = 1$, f are un punct de întoarcere, fiind strict descrescătoare la stânga şi strict crescătoare la dreapta, deci f are în $x = 1$ un punct de minim local. Prin urmare suma absciselor punctelor de extrem local este $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$. ⓒ

13. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ în mulţimea numerelor reale. **(6 pct.)**

a) $x = 2$, $y = 1$; b) $x = 1$, $y = 3$; c) $x = -3$, $y = 5$; d) $x = 3$, $y = 1$; e) $x = y = 2$; f) $x = 1$, $y = 2$.

Soluţie. Scăzând a doua ecuaţie din prima, rezultă imediat $2y = 2 \Leftrightarrow y = 1$. Apoi, înlocuind în prima ecuaţie, obţinem $x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. Prin urmare avem $x = 3$, $y = 1$. ⓓ

Altfel. Discriminantul sistemului de 2 ecuaţii cu 2 necunoscute este $\left|\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{smallmatrix}\right| = -2 \neq 0$, deci sistem Cramer compatibil determinat. Aflăm soluţia unică a sistemului aplicând regula lui Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left|\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right| = 3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right| = 1,$$

deci soluţia sistemului este dată de $x = 3$, $y = 1$.

14. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f astfel încât $F(1) = 0$, să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$. **(6 pct.)**

a) $\frac{1}{4}\ln 2$; b) $\frac{1}{2}\ln 2$; c) $\frac{1}{4}\ln 5$; d) $\frac{1}{3}\ln 3$; e) $\frac{1}{5}\ln 2$; f) $\frac{1}{3}\ln 7$.

Soluţie. Integrând prin părţi şi ţinând cont că $x > 0$, obţinem

$$\begin{aligned} F(x) &= \textstyle\int f(x)dx = -\frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \cdot \ln x dx = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' \cdot \ln x dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x - \int \left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x}\right) dx\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x - \ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C = \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Condiţia $F(1) = 0$ conduce la $C = \frac{\ln 2}{4}$. Atunci $F(x) = \frac{1}{2}\frac{x^2 \ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{\ln 2}{4}$. Regrupând termenii şi aplicând regula lui l'Hospital, obţinem

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} F(x) &= -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} + \frac{\ln 2}{4} \\ &= -\tfrac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x} - \frac{1}{4}\ln\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} + \frac{\ln 2}{4} = -\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\ln 1 + \frac{\ln 2}{4}, \end{aligned}$$

deci $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \dfrac{1}{4}\ln 2$. ⓐ

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Să se calculeze $f'(0)$. **(6 pct.)**

a) 0; b) 3; c) -5; d) 4; e) 2; f) -2.

Soluţie. Derivând funcţia f termen cu termen, obţinem $f'(x) = 1 + e^x$, deci $f'(0) = 1 + 1 = 2$. ⓔ