1. Soluţia ecuaţiei $\sqrt{2}\sin x = 1$, unde $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ este: **(6 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) 0; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{\pi}{8}$; f) $\frac{\pi}{3}$.

   Soluţie. Ecuaţia se rescrie $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Unica soluţie a acestei ecuaţii din intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ (cadranul I) se obţine aplicând funcţia bijectivă $\arcsin : [0,1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$. Obţinem $x = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. ⓑ

   Altfel. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ este $\{k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Singura soluţie din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se obţine pentru $k = 0$, anume $x = \frac{\pi}{4}$.

2. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC cu aria $3\sqrt{2}$, $AB = 3$ şi $AC = 4$. Atunci măsura unghiului $\hat{A}$ este: **(6 pct.)**

   a) 30°; b) 90°; c) 75°; d) 45°; e) 120°; f) 60°.

   Soluţie. Folosind formula ariei $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A}}{2}$, rezultă $3\sqrt{2} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin \hat{A}}{2} \Leftrightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Triunghiul ABC fiind ascuţitunghic, rezultă că unghiul $\hat{A}$ este ascuţit, deci $\hat{A} = 45°$. ⓓ

3. Ştiind că $2\cos x = 1$, să se calculeze $\sin^2 x$. **(6 pct.)**

   a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{3}{4}$; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Egalitatea se rescrie $\cos x = \frac{1}{2}$. Folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rezultă $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. ⓓ

   Altfel. Ecuaţia $\cos x = \frac{1}{2}$ are mulţimea de soluţii $\{2k\pi \pm \arccos \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, deci folosind periodicitatea de perioadă 2π şi imparitatea funcţiei sin, rezultă $\sin(2k\pi \pm \frac{\pi}{3}) = \pm \sin \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Atunci $\sin^2 x = (\pm \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

4. Ecuaţia dreptei care trece prin punctele $M(1,5)$ şi $N(2,1)$ este: **(6 pct.)**

   a) $x + 2y = 3$; b) $4x - 3y = 1$; c) $4x + 3y = 0$; d) $4x + y = 9$; e) $x - y = 1$; f) $x + y = 5$.

   Soluţie. Aplicând formula ecuaţiei dreptei MN care trece prin două puncte M şi N distincte, rezultă:

   $$\frac{x - x_N}{x_M - x_N} = \frac{y - y_N}{y_M - y_N} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{4},$$

   deci ecuaţia dreptei MN este $4x + y = 9$. ⓓ

   Altfel. Ecuaţia dreptei este de forma $ax + by + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ iar a, b nu sunt simultan nule. Punând condiţia ca punctele M şi N să satisfacă ecuaţia dreptei, obţinem sistemul de ecuaţii: $\begin{cases} a + 5b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0. \end{cases}$ Acesta este un sistem liniar omogen de rang 2, compatibil nedeterminat. Notând $c = t$, rezolvăm sistemul în raport cu a şi b. Obţinem familia de soluţii ale sistemului, $\{(a,b,c) = (-\frac{4t}{9}, -\frac{t}{9}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, unde impunem condiţia $t \neq 0$. Soluţiile nenule produc aceeaşi dreaptă şi alegând $t = -9$ rezultă $a = 4, b = 1, c = -9$, deci ecuaţia dreptei căutate este $4x + 5 - 9 = 0$, care se rescrie $4x + 5 = 9$.

5. Aria triunghiului ABC, unde $A(4,6)$, $B(10,6)$, $C(10,0)$ este: **(6 pct.)**

   a) 18; b) 11; c) 8; d) 7; e) 10; f) 12.

   Soluţie. Folosim formula $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right|$ şi obţinem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 10 & 6 & 1 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-36| = 18$. ⓐ

   Altfel. Reprezentând punctele A, B, C relativ la sistemul de coordonate xOy din plan, se observă că triunghiul ABC reprezintă jumătate dintr-un pătrat de latură 6, deci aria sa este jumătate din aria $6^2 = 36$ a pătratului. Rezultă $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$.

6. Valoarea sumei $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4}$ este: **(6 pct.)**

   a) 3; b) 0; c) 1; d) $\frac{3}{4}$; e) 2; f) $\frac{1}{2}$.

   Soluţie. Deoarece $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ şi $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, rezultă suma căutată, $\sin^2 \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} = 1^2 + 1^2 = 2$. ⓔ

7. Se dau vectorii $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{v} = 3\bar{i} - \bar{j}$ $\quad \bar{w} = \bar{j}$. Atunci vectorul $2\bar{u} - \bar{v} + \bar{w}$ este: **(6 pct.)**

   a) $-\bar{i} + \bar{j}$; b) $-\bar{i} + 4\bar{j}$; c) $2\bar{i}$; d) $3\bar{j}$; e) $\bar{j}$; f) $\bar{i}$.

   Soluţie. Desfăcând parantezele şi grupând coeficienţii vectorilor $\bar{i}$ şi $\bar{j}$, obţinem $2\bar{u} - \bar{v} + \bar{w} = 2(\bar{i} + \bar{j}) - (3\bar{i} - \bar{j}) + \bar{j} = -\bar{i} + 4\bar{j}$. ⓑ

8. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos x = 1$, $x \in [0, 2\pi]$ este: **(6 pct.)**

   a) $\frac{3\pi}{2}$; b) $\frac{5\pi}{3}$; c) 4π; d) $\frac{5\pi}{2}$; e) 7π; f) 3π.

   Soluţie. Ridicând ecuaţia la pătrat şi folosind formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ecuaţia devine $2\sin x \cos x = 0$, deci $x \in \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dar singurele soluţii care satisfac ecuaţia iniţială sunt $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dintre acestea, în intervalul $[0, 2\pi]$ din enunţ se află doar soluţiile $\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$, a căror sumă este $0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. ⓓ

   Altfel. După ridicarea ecuaţiei la pătrat, folosind formula $2\sin x \cos x = \sin 2x$, obţinem $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Singurele soluţii care satisfac ecuaţia iniţială sunt $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dintre acestea, în intervalul dat se află doar soluţiile $\{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$, a căror sumă este $0 + \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$. ⓓ

   Altfel. Notând $a = \sin x$, $b = \cos x$ şi ţinând cont de formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$, obţinem sistemul $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, care are soluţiile $(a, b) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$. Deci, ţinând cont de condiţiile impuse asupra lui x, rezultă (i) $\sin x = 1, \cos x = 0$, de unde $x = \frac{\pi}{2}$, sau (ii) $\sin x = 0, \cos x = 1$, de unde $x \in \{0, 2\pi\}$. Suma celor trei valori obţinute pentru x este deci $\frac{\pi}{2} + 0 + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.

   Altfel. Împărţim ecuaţia, care este de forma $a\sin x + b\cos x = c$, prin $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Deoarece $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, ecuaţia se rescrie

   $$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}.$$

   Prin urmare, rezultă $x + \frac{\pi}{4} \in \{k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{k\pi + ((-1)^k - 1) \cdot \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Pentru $k = 2m$ par, obţinem $x \in \{2m\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, iar pentru $k = 2m + 1$ impar, rezultă $x \in \{(2m + 1)\pi - \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{2m\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Impunând condiţia $x \in [0, 2\pi]$, rămân soluţiile admisibile $\{0, 2\pi\}$, respectiv $\{\frac{\pi}{2}$. Suma acestora este $0 + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

   Altfel. Se observă că valorile $\frac{x}{2} \in \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ pentru care $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nu are sens nu conduc la soluţii ale ecuaţiei, deoarece pentru aceste valori ecuaţia devine $0 - 1 = 1$, fals. Căutăm în continuare soluţii pentru care expresia $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ are sens. Folosind formulele $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, unde $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, ecuaţia devine

   $$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1 \Leftrightarrow 1 + 2t - t^2 = 1 + t^2 \Leftrightarrow 2t(t-1) = 0.$$

   Avem deci două cazuri: fie

   $$t = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

   ori

   $$t = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \{k\pi + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{2k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

   Dar dintre aceste soluţii, cele care satisfac condiţia $x \in [0.2\pi]$ sunt $\{0, 2\pi\}$ şi respectiv $x = \frac{\pi}{2}$. Suma celor trei valori admisibile este deci $0 + 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

9. Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$, pentru care punctul $P(1, 1)$ aparţine dreptei de ecuaţie $mx + y = 2$. **(6 pct.)**

   a) 2; b) -2; c) 0; d) -1; e) 1; f) 3.

   Soluţie. Coordonatele punctului trebuie să satisfacă ecuaţia dreptei. Înlocuind $x = 1$ şi $y = 1$ în ecuaţie, obţinem $m \cdot 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$. ⓔ

10. Catetele unui triunghi dreptunghic au lungimile 6 respectiv 8. Atunci raza cercului circumscris triunghiului este: **(6 pct.)**

a) 7; b) 2; c) 4; d) 3; e) $\frac{1}{2}$; f) 5.

Soluţie. Raza cerută este jumătate din ipotenuză. Din teorema lui Pitagora, lungimea ipotenuzei este $\sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = 10$; deci raza căutată este $\frac{10}{2} = 5$. ⓕ

Altfel. Triunghiul fiind dreptunghic, din teorema lui Pitagora, lungimea ipotenuzei este $c = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{36+64} = 10$. Aria triunghiului este semiprodusul catetelor, $S = \frac{6\cdot 8}{2} = 24$, iar raza căutată este $R = \frac{abc}{4S} = \frac{6\cdot 8\cdot 10}{4\cdot 24} = 5$.

11. Fie M punctul de intersecţie al dreptelor $d_1 :\ x+y-2=0$ şi $d_2 :\ 2x+y-3=0$. Atunci distanţa de la M la dreapta $d_3 :\ x+y=0$ este: **(6 pct.)**

a) $\sqrt{2}$; b) $2\sqrt{2}$; c) 1; d) 2; e) 0; f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Soluţie. Deoarece M aparţine ambelor drepte, coordonaltele sale (x,y) satisfac ambele ecuaţii, deci reprezintă soluţia sistemului liniar $\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+y-3=0 \end{cases}$, adică $x=y=1$. Distanţa de la punctul $M(1,1)$ la dreapta d_3 se obţine din formula $d(M,\Delta) = \frac{|ax_M+bx_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, unde $\Delta :\ ax+by+c=0$. Pentru $\Delta = d_3$, obţinem distanţa cerută $\frac{|1\cdot 1+1\cdot 1+0|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$. ⓐ

Altfel. După aflarea punctului de intersecţie $M(1,1)$, ca soluţie a sistemului de ecuaţii ale dreptelor d_1 şi d_2, distanţa cerută este cea dintre M şi proiecţia M' a lui M pe d_3. Punctul M' se află la intersecţia dintre d_3 şi dreapta d_4 ce trece prin M şi este perpendiculară pe d_3. Panta lui $d_3 :\ y=(-1)\cdot x$ este $m_3=-1$, deci panta dreptei d_4 este $m_4 = -\frac{1}{m_3} = -\frac{1}{-1} = 1$. Prin urmare avem $d_4 :\ y-y_M = m_4(x-x_M) \Leftrightarrow y-1 = 1\cdot(x-1) \Leftrightarrow y=x$. Atunci punctul $M_4 = d_3 \cap d_4$ este dat de sistemul liniar $\begin{cases} y+x=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$, deci M_4 are coordonatele $(0,0)$. Distanţa cerută este deci $d(M,d_3) = d(M,M_4) = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$.

12. Fie vectorii $\bar{u}$ şi $\bar{v}$, unde $|\bar{u}|=1$, $|\bar{v}|=2$ şi produsul scalar $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$. Atunci unghiul $\theta\in[0,\pi]$ format de cei doi vectori este: **(6 pct.)**

a) $\theta=\frac{\pi}{3}$; b) $\theta=\frac{\pi}{2}$; c) $\theta=0$; d) $\theta=\frac{\pi}{6}$; e) $\theta=\frac{\pi}{4}$; f) $\theta=\pi$.

Soluţie. Folosim relaţia $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\theta$. Obţinem $0 = 1\cdot 2\cdot\cos\theta$, deci $\cos\theta=0$. Rezultă $\theta=\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$. ⓑ

13. În triunghiul ABC se dau: $AB=6$, $AC=6$ şi $m\left(\widehat{BAC}\right)=60°$. Atunci BC este: **(6 pct.)**

a) 5; b) 4; c) 2; d) 6; e) 3; f) 10.

Soluţie. Se aplică teorema cosinusului pentru latura BC. Avem $BC^2 = AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos m\left(\widehat{BAC}\right)$, deci $BC = \sqrt{6^2+6^2-2\cdot 6\cdot 6\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{72-72\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$. ⓓ

Altfel. Se observă că triunghiul este isuscel cu un unghi de 60 de grade, deci echilateral. Prin urmare $BC=AB=AC=6$.

14. Se dă triunghiul ABC, unde $AB=5$, $AC=5$, $BC=5\sqrt{2}$. Atunci lungimea bisectoarei unghiului $\hat{B}$ este: **(6 pct.)**

a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$; b) 5; c) $10(\sqrt{2}+1)$; d) $\frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$; e) $10\sqrt{2}$; f) 10.

Soluţie. Fie D piciorul perpendicularei unghiului $\hat{B}$, $D\in AC$ şi notăm $BD=x, AD=y$. Din teorema bisectoarei şi folosind proporţii derivate, obţinem

$$\frac{BA}{BC} = \frac{AD}{DC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AB+BC} = \frac{AD}{AD+DC} \Leftrightarrow \frac{5}{5+5\sqrt{2}} = \frac{y}{5} \Leftrightarrow y = \frac{5}{\sqrt{2}+1}.$$

Observăm că triunghiul ABC satisface Teorema lui Pitagora (deoarece $AB^2+AC^2=BC^2$), deci triunghiul este dreptunghic cu $\hat{A}=90°$. Deci triunghiul ABD este dreptunghic în A şi aplicând în acest triunghi Teorema li Pitagora, aflăm ipotenuza BD (bisectoarea cerută):

$$x^2 = y^2+AB^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{\left(\tfrac{5}{\sqrt{2}+1}\right)^2+5^2} = 5\cdot\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}+1} = \frac{5}{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{2}} = \frac{5\cdot 2}{\sqrt{2}+1}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}}},$$

deci $BD = x = \frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ (d)

Altfel. Triunghiul ABC satisface Teorema lui Pitagora (deoarece $AB^2 + AC^2 = BC^2$), deci triunghiul este dreptunghic cu $\hat{A} = 90°$. Dar $AB = AC$, deci triunghiul este dreptunghic isoscel, iar $\hat{B} = 45°$. Prin urmare $\widehat{ABD} = \left(\frac{15}{2}\right)^\circ$. Dar în triunghil dreptunghic ABD are loc egalitatea $x\cos\widehat{ABD} = 5$, deci $x = \frac{5}{\cos(45/2)^\circ}$. Din formulela de arc pe jumătate, rezultă

$$\cos\left(\tfrac{45}{2}\right)^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

deci $x = \frac{5}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

15. Determinaţi valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\bar{u} = \bar{i}+2\bar{j}$ şi $\bar{v} = m\bar{i}-\bar{j}$ sunt perpendiculari: **(6 pct.)**

a) $m = \frac{3}{2}$; b) $m = 5$; c) $m = 2$; d) $m = 0$; e) $m = 3$; f) $m = -1$.

Soluţie. Condiţia din enunţ revine la faptul că produsul scalar al celor doi vectori este nul. Folosind formula produsului scalar în raport cu baza ortonormată $\{\bar{i},\bar{j}\}$, $\bar{u}\cdot\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2$, obţinem $\bar{u}\cdot\bar{v} = 1\cdot m + 2\cdot(-1) = m-2$. Anularea produsului scalar conduce la $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$. (c)