1. Fie polinomul $f = X^2 + 2X + 3$. Să se calculeze $S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$, unde x_1, x_2, x_3 sunt soluţiile complexe ale ecuaţiei $x^3 - 1 = 0$. **(6 pct.)**

   a) $S = i$; b) $S = 0$; c) $S = -1$; d) $S = 9$; e) $S = 6$; f) $S = 1$.

   Soluţie. Ecuaţia $x^3 - 1 = 0$ se rescrie $(x-1)(x^2+x+1) = 0$ şi are soluţiile complexe $x_1 = 1$, $x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pe de altă parte $S = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1 + x_2 + x_3) + 9$. Prin înlocuire directă, obţinem $S = 0 + 2 \cdot 0 + 9 = 9$. ⓓ

   Altfel. Din relaţiile Viete pentru ecuaţia $x^3 - 1 = 0$, rezultă $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \end{cases}$, de unde rezultă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$. Atunci $S = 0 + 2 \cdot 0 + 9 = 9$.

2. Să se determine mulţimea valorilor lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $\ln(1 + 2x) - x^2 = a$ să aibă o singură soluţie strict negativă. **(6 pct.)**

   a) $a \in (-e,\ e)$; b) $a \in (0,\ \ln 2)$; c) $a \in (-1,\ \ln 2)$; d) $a \in (-\infty,\ 0)$; e) $a \in \left(0,\ \ln 2 - \frac{1}{4}\right)$; f) $a \in \left(\frac{1}{2}\ ,\ \ln 3\right)$.

   Soluţie. Din condiţiile de existenţă pentru logaritm, obţinem $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. Studiem funcţia $f(x) = \ln(1+2x) - x^2$, $f : (-\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$. Avem $f'(x) = \frac{2}{1+2x} - 2x = \frac{-2(2x^2+x-1)}{2x+1}$ şi se observă că $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}\right\} \Leftrightarrow x \in \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, convenind doar soluţia $\frac{1}{2} \in (-\frac{1}{2}, \infty)$. De asemenea, se observă că $f(\frac{1}{2}) = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ şi

   $$\lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \searrow -\frac{1}{2}} \ln(1 + 2x) - x^2 = -\infty - \frac{1}{4} = -\infty.$$

   Pe de altă parte,

   $$L = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x^2} - 1\right)$$

   şi folosind pentru fracţie regula lui l'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$,

   $$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x^2} - 1\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(\frac{2/(1 + 2x)}{2x} - 1\right) = -1,$$

   rezultă $L = \infty \cdot (-1) = -\infty$. Pe baza acestor rezultate, putem construi tabelul de variaţie al funcţiei f,

x	—	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
$f(x)$	—	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2 - \frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$	—	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

   Se observă că $\ln 2 - \frac{1}{4} > 0$ (inegalitatea revine, în urma exponenţierii la $16 > e$, adevărat), deci punctul de maxim al funcţiei f se află deasupra axei Ox. Folosind graficul funcţiei f, examinăm ecuaţia $f(x) = a$. Distingem următoarele trei cazuri: (i) pentru $a > \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta $y = a$ nu intersectează graficul funcţiei f deci a nu întruneşte condiţia impusă de definiţia mulţimii M; (ii) pentru $a = \ln 2 - \frac{1}{4}$, dreapta intersectează graficul într-un punct dublu de abscisă nenegativă $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, deci $a \notin M$; (iii) pentru $a \in (0, \ln 2 - \frac{1}{4})$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise strict pozitive $x_{1,2} > 0$, deci $a \notin M$; (iv) pentru $a = 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 = 0$ respectiv $x_2 > 0$, deci $a \notin M$; (v) pentru $a < 0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1 \in (-\frac{1}{2}, 0)$, respectiv $x_2 > 0$, deci $a \in M$, singurul caz favorabil. În concluzie, $M = (-\infty, 0)$. ⓓ

3. Dacă $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - e^x$, să se calculeze $f'(0)$. **(6 pct.)**

   a) -1; b) 3; c) 1; d) 0; e) 2; f) -2.

   Soluţie. Prin derivare termen cu termen, obţinem $f'(x) = (x - e^x)' = 1 - e^x$, deci $f'(0) = 1 - e^0 = 1 - 1 = 0$, ⓓ

4. Să se rezolve ecuaţia $\log_5(x-1)=1$. **(6 pct.)**

   a) $x=11$; b) $x=0$; c) $x=4$; d) $x=1$; e) $x=6$; f) $x=3$.

   Soluţie. Condiţia de existenţă a logaritmului este $x-1>0 \Leftrightarrow x\in(1,\infty)$. Aplicând ecuaţiei funcţia exponenţială de bază 5, obţinem $x-1=5^1 \Leftrightarrow x=6$. ⓔ

5. Pentru $r>0$, fie mulţimea $M=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=1 \text{ şi } |z-3i|=r\}$. Fie $A=\{r>0\ ;\ M \text{ are un singur element}\}$. Să se determine suma S a elementelor mulţimii A. **(6 pct.)**

   a) $S=6$; b) $S=5$; c) $S=4$; d) $S=2$; e) $S=8$; f) $S=12$.

   Soluţie. Se observă că pentru $r\le 0$, mulţimea nu conţine elemente ($M=\varnothing$). Pentru $r>0$, notând $z=x+iy$, cele două condiţii din definiţia mulţimii M se rescriu:

$$\begin{cases}|z|=1\\|z-3i|=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\\sqrt{x^2+(y-3)^2}=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2+y^2-6y+9=r^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1\\-6y+9=r^2-1\end{cases},$$

   de unde, eliminând y, obţinem $x^2+\left(\frac{10-r^2}{6}\right)^2=1 \Leftrightarrow x^2=E(r)$, unde am notat $E(r)=1-\left(\frac{10-r^2}{6}\right)^2$. Dar această ecuaţie are o singură soluţie reală (dublă) doar dacă $E(r)=0$, ceea ce revine la egalitatea $\frac{10-r^2}{6}=\pm1 \Leftrightarrow r^2=10\mp6 \Leftrightarrow r^2\in\{4,16\}$, şi deoarece $r>0$, obţinem corespunzător valorile $r\in\{2,4\}$, deci $S=2+4=6$, ⓐ

   Altfel. Folosind reprezentarea grafică a celor două condiţii din definiţia mulţimii $M\subset\mathbb{C}\equiv\mathbb{R}^2$, pentru $z=x+iy\in M$ obţinem relaţiile

$$\begin{cases}|z|=1\\|z-3i|=r\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\\sqrt{x^2+(y-3)^2}=r,\end{cases}$$

   deci căutăm punctele din planul complex care aparţin simultan cercurilor $\Gamma_1=\mathcal{C}_{(C_1(0,0),r_1=1)}$ şi $\Gamma_1=\mathcal{C}_{(C_2(0,3),r_2=r)}$. Dar intersecţia $M=\Gamma_1\cap\Gamma_2$ constă dintr-un singur punct doar dacă cele două cercuri sunt tangente. În aceste cazuri, avem fie $d(C_1,C_2)=r_1+r_2 \Leftrightarrow 3=1+r \Leftrightarrow r=2$, fie $d(C_1,C_2)=|r_2-r_1| \Leftrightarrow 3=|r-1|$. Pentru $r\ge1$, rezultă soluţia $r=4\ge1$, iar pentru $r<1$, rezultă $3=1-r \Leftrightarrow r=-2$, subcaz imposibil. În concluzie, suma celor două valori valide obţinute penrtru r este $S=2+4=6$.

6. Valoarea determinantului $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}$ este: **(6 pct.)**

   a) -1; b) 0; c) 5; d) 1; e) -2; f) 2.

   Soluţie. Scăzând prima coloană din celelalte două şi apoi dezvoltând determinantul după ultima linie, obţinem

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\-1&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-2&-1\\-1&-2&-1\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=0.\ ⓑ$$

   Altfel. Se observă că dublul ultimei coloane este suma primelor două, deci determinantul este nul.

   Altfel. Prima linie este diferenţa dintre ultima şi penultioma linie, deci determinantul este nul.

   Altfel. Folosind regula lui Sarrus, obţinem $\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=(2+0+(-1))-(1+0+0)=0$.

7. Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y=4\\2x-y=-1\end{cases}$. **(6 pct.)**

   a) $x=2,\ \ y=2$; b) $x=-1,\ \ y=5$; c) $x=-2,\ \ y=-3$; d) $x=4,\ \ y=0$; e) $x=1,\ \ y=3$; f) $x=0,\ \ y=4$.

   Soluţie. Aplicâm metoda reducerii: adunând cele două ecuaţii, obţinem $3x=3\Rightarrow x=1$, deci din prima ecuaţie rezultă $y=4-x=3$, iar sistemul are soluţia $(x,y)=(1,3)$. ⓔ

   Altfel. Aplicăm metoda substituţiei. Din prima ecuaţie obţinem $y=4-x$. Înlocuind în a doua ecuaţie, rezultă $2x-(4-x)=-1 \Leftrightarrow 3x=3 \Leftrightarrow x=1$, deci $y=4-x=3$; în final avem soluţia $(x,y)=(1,3)$.

   Altfel. Determinantul sistemului liniar este $\Delta=\begin{vmatrix}2&1\\2&-1\end{vmatrix}=-3\ne0$, deci sistemul este Cramer, cu soluţia unică dată de

$$\begin{cases}x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{1}{-3}\begin{vmatrix}4&1\\-1&-1\end{vmatrix}=\dfrac{-3}{-3}=1\\[2ex] y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{1}{-3}\begin{vmatrix}1&4\\2&-1\end{vmatrix}=\dfrac{-9}{-3}=3,\end{cases}$$

deci $x = 1$, $y = 3$.

8. Ştiind că numerele x, $x + 1$, $x + 3$ sunt în progresie geometrică (în această ordine), atunci: **(6 pct.)**

   a) $x = 3$; b) $x = -1$; c) $x = 1$; d) $x = -2$; e) $x = 4$; f) $x = 2$.

   Soluţie. Pătratul celui de-al doilea număr este produsul celorlalte două, deci $(x + 1)^2 = x(x + 3) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + 3x \Leftrightarrow x = 1$. ⓒ

9. Soluţia ecuaţiei $4^{x-1} = 16$ este: **(6 pct.)**

   a) $x = -2$; b) $x = 4$; c) $x = 5$; d) $x = 2$; e) $x = 0$; f) $x = 3$.

   Soluţie. Rescriem ecuaţia şi logarităm în baza 4 ecuaţia. Obţinem $4^{x-1} = 4^2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$. ⓕ

10. Valoarea integralei $\int_0^1 (3x^2 + e^x)dx$ este: **(6 pct.)**

    a) -1; b) 0; c) $e - 3$; d) 1; e) 2; f) e.

    Soluţie. Integrând termen cu termen, obţinem

$$\int_0^1 (3x^2 + e^x)dx = \left(3 \cdot \frac{x^3}{3} + e^x\right)\Big|_0^1 = (x^3 + e^x)|_0^1 = (1 + e^1) - (0 + e^0) = 1 + e - 1 = e.$$ ⓕ

11. Fie ecuaţia $x^3 + x^2 - 2x = 0$. Suma S a soluţiilor reale este: **(6 pct.)**

    a) $S = 0$; b) $S = 1$; c) $S = -2$; d) $S = 2$; e) $S = -1$; f) $S = 3$.

    Soluţie. Ecuaţia se rescrie $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$, iar $x^2 + x - 2 = 0$ are soluţiile $x \in \{\frac{-1\pm3}{2}\} = \{-2, 1\}$, deci cele trei soluţii ale ecuaţiei date sunt $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 1$, iar suma lor este $S = 0 + (-2) + 1 = -1$. ⓔ

12. Fie P un polinom cu coeficienţi reali astfel încât $P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = n^5$, pentru orice număr natural $n \geq 1$. Să se calculeze $P\left(\frac{3}{2}\right)$. **(6 pct.)**

    a) $\frac{225}{49}$; b) $\frac{121}{16}$; c) $\frac{114}{31}$; d) $\frac{47}{15}$; e) $\frac{91}{17}$; f) $\frac{169}{25}$.

    Soluţie. Folosim egalitatea din enunţ, $P(1) + \ldots + P(n) = n^5$, $\forall n \in \mathbb{N}$, deci dând valori lui $n \in \mathbb{N}$ şi apoi scăzând relaţiile succesive două câte două, obţinem

$$\begin{cases} P(1) = 1^5 \\ P(1) + P(2) = 2^5 \\ \vdots \\ P(1) + \ldots + P(n) = n^5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1) = 1 = 1^5 - 0^5 \\ P(2) = 2^5 - 1 \\ \vdots \\ P(n) = n^5 - (n-1)^5, \end{cases}$$

deci $P(n) = n^5 - (n - 1)^5$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătăm că $P(x) = x^5 - (x - 1)^5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Notând $Q(x) = P(x) - [x^5 - (x - 1)^5]$, observăm că polinomul Q are o infinitate de rădăcini reale distincte $n \in \mathbb{N}$, deci este identic nul. Prin urmare $Q \equiv 0$, iar $P(x) = x^5 - (x - 1)^5$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin înlocuire, obţinem $P(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^5 - (\frac{1}{2})^5 = \frac{3^5-1}{2^5} = \frac{121}{16}$. ⓑ

13. Produsul soluţiilor ecuaţiei $\sqrt{1 - x} + \sqrt{x} = 1$ este: **(6 pct.)**

    a) 0; b) 2; c) -1; d) 1; e) $\frac{1}{3}$; f) $\frac{1}{2}$.

    Soluţie. Condiţiile de existenţă pentru cei doi radicali sunt $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0, 1]$. Ridicând ecuaţia la pătrat, obţinem

$$(1 - x) + x + 2\sqrt{x(1 - x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1 - x)} = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) \Leftrightarrow x \in \{0, 1\},$$

iar $\{0, 1\} \subset [0, 1]$, deci ambele soluţii convin. Prin urmare produsul soluţiilor este $0 \cdot 1 = 0$. ⓐ

14. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele x, $x+1$, $2x-1$ să fie (în această ordine) în progresie aritmetică. **(6 pct.)**

    a) $x = -2$; b) $x = 7$; c) $x = 10$; d) $x = 3$; e) $x = -10$; f) $x = 20$.

Soluţie. Al doilea număr trebuie să fie semisuma celorlalte două, deci $x+1=\frac{x+(2x-1)}{2} \Leftrightarrow 2x+2=3x-1 \Leftrightarrow x=3$. ⓓ

Altfel. Fie a primul termen şi r raţia progresiei. Atunci obţinem succesiv:

$$\begin{cases} x=a \\ x+1=a+r \\ 2x-1=a+2r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=x \\ r=1 \\ 2x-1=x+2 \end{cases} \Rightarrow x=3.$$

15. Să se determine mulţimea valorilor lui $a\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuaţia $\ln(1+2x)-x^2=a$ să aibă o singură soluţie strict negativă. **(6 pct.)**

a) $a\in(-e,\ e)$; b) $a\in(0,\ \ln 2)$; c) $a\in(-1,\ \ln 2)$; d) $a\in(-\infty,\ 0)$; e) $a\in\left(0,\ \ln 2-\frac{1}{4}\right)$; f) $a\in\left(\frac{1}{2}\ ,\ \ln 3\right)$.

Soluţie. Din condiţiile de existenţă pentru logaritm, obţinem $1+2x>0 \Leftrightarrow x\in(-\frac{1}{2},\infty)$. Studiem funcţia $f(x)=\ln(1+2x)-x^2$, $f:(-\frac{1}{2},\infty)\to\mathbb{R}$. Avem $f'(x)=\frac{2}{1+2x}-2x=\frac{-2(2x^2+x-1)}{2x+1}$ şi se observă că $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x\in\left\{\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{4}\right\} \Leftrightarrow x\in\left\{-1,\dfrac{1}{2}\right\}$, convenind doar soluţia $\frac{1}{2}\in(-\frac{1}{2},\infty)$. De asemenea, se observă că $f(\frac{1}{2})=\ln 2-\frac{1}{4}$, $f(0)=0$ şi

$$\lim_{x\searrow -\frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\searrow -\frac{1}{2}} \ln(1+2x)-x^2=-\infty-\frac{1}{4}=-\infty.$$

Pe de altă parte,

$$L=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2}-1\right)$$

şi folosind pentru fracţie regula lui l'Hospital, cazul $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+2x)}{x^2}-1\right)=\lim_{x\to\infty} x^2\left(\frac{2/(1+2x)}{2x}-1\right)=-1,$$

rezultă $L=\infty\cdot(-1)=-\infty$. Pe baza acestor rezultate, putem construi tabelul de variaţie al funcţiei f,

x	—	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		∞
$f(x)$	—	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\ln 2-\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$
$f'(x)$	—	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

Se observă că $\ln 2-\frac{1}{4}>0$ (inegalitatea revine, în urma exponenţierii la $16>e$, adevărat), deci punctul de maxim al funcţiei f se află deasupra axei Ox. Folosind graficul funcţiei f, examinăm ecuaţia $f(x)=a$. Distingem următoarele trei cazuri: (i) pentru $a>\ln 2-\frac{1}{4}$, dreapta $y=a$ nu intersectează graficul funcţiei f deci a nu întruneşte condiţia impusă de definiţia mulţimii M; (ii) pentru $a=\ln 2-\frac{1}{4}$, dreapta intersectează graficul într-un punct dublu de abscisă nenegativă $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, deci $a\notin M$; (iii) pentru $a\in(0,\ln 2-\frac{1}{4})$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise strict pozitive $x_{1,2}>0$, deci $a\notin M$; (iv) pentru $a=0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1=0$ respectiv $x_2>0$, deci $a\notin M$; (v) pentru $a<0$, dreapta intersectează graficul în două puncte de abscise $x_1\in(-\frac{1}{2},0)$, respectiv $x_2>0$, deci $a\in M$, singurul caz favorabil. În concluzie, $M=(-\infty,0)$. ⓓ