1. Fie funcţia $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_1^x t(1-\ln^2 t)dt$. Aflaţi abscisa punctului de maxim local. **(9 pct.)**

   a) $e$; b) $2\sqrt{e}$; c) $\sqrt[3]{e^2}$; d) $\frac{1}{e}$; e) $\sqrt{e}$; f) $e^2$.

   **Soluţie.** Avem $f'(x)=x(1-\ln^2 x)$, deci, pentru $x\in[1,\infty)$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x(1-\ln^2 x)=0\Leftrightarrow x=e$. Tabloul de semne al funcţiei $f'$ este

| $x$ | $1$ | | $e$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $(e^2-1)/4$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

   deci punctul de maxim căutat este $x=e$. (a)

2. Să se determine numărul real $m$ astfel încât $\begin{vmatrix} m & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$. **(9 pct.)**

   a) $m=1$; b) $m=3$; c) $m=2$; d) $m=5$; e) $m=0$; f) $m=4$.

   **Soluţie.** Avem $\begin{vmatrix} m & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 2m-6=0\Leftrightarrow m=3$. (b)

3. Să se determine numărul natural $n$ astfel încât 4, $\frac{n+8}{2}$ şi 8 să fie trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. **(9 pct.)**

   a) $n=4$; b) $n=1$; c) $n=2$; d) $n=3$; e) $n=0$; f) $n=6$.

   **Soluţie.** Termenul din mijloc este semisuma celorlalţi doi, deci $\frac{n+8}{2}=\frac{4+8}{2}\Leftrightarrow n+8=12\Leftrightarrow n=4$. (a)

4. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2$. Atunci $f'(0)$ este: **(9 pct.)**

   a) 4; b) 1; c) $-1$; d) 3; e) 0; f) 2.

   **Soluţie.** Prin derivare obţinem $f'(x)=e^x+2x$, deci $f'(0)=e^0+2\cdot 0=1$. (b)

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ inecuaţia $3x-1>x+3$. **(9 pct.)**

   a) $x<1$; b) $x<-2$; c) $x>2$; d) $x>3$; e) $x<2$; f) $x<3$.

   **Soluţie.** Inecuaţia se rescrie $2x>4\Leftrightarrow x>2$. (c)

6. Mulţimea soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2-6x+8=0$ este: **(9 pct.)**

   a) $\{-1,3\}$; b) $\{1,5\}$; c) $\varnothing$; d) $\{1\}$; e) $\{-4,-2\}$; f) $\{2,4\}$.

   **Soluţie.** Avem $x^2-6x+8=0\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{6\pm2}{2}\right\}\Leftrightarrow x\in\{2,4\}$. (f)

7. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-5x-5y+30$. Atunci suma elementelor simetrizabile în raport cu legea de compoziţie " $\circ$ " este: **(9 pct.)**

   a) 10; b) 9; c) 6; d) 0; e) 5; f) 8.

   **Soluţie.** Elementul neutru $e\in\mathbb{Z}$ satisface pentru orice $x\in\mathbb{Z}$ egalităţile $x\circ e=e\circ x=x$. Dar observăm că legea este comntativă, $x\circ y=y\circ x$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ şi deci avem $x\circ e=x$, $\forall x\in\mathbb{Z}$. Obţinem $x\circ e=x\Leftrightarrow(x-5)(e-6)=0$, $\forall x\in\mathbb{Z}$, de unde $e=6$. Un element $x\in\mathbb{Z}$ admite simetricul $x'\in\mathbb{Z}$, d.n.d. $x\circ x'=e$, deci $xx'-5x-5x'+30=6\Leftrightarrow x'=\frac{5x-24}{x-5}=5+\frac{1}{x-5}\in\mathbb{Z}$, de unde $(x-5)|1\Leftrightarrow x-5\in\{\pm1\}\Leftrightarrow x\in\{4,6\}$. Pentru aceste două valori obţinem respectiv $x'\in\{4,6\}$ iar suma căutată este $4+6=10$. (a)

8. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}-1=x$. **(9 pct.)**

   a) $x=3$; b) $x\in\varnothing$; c) $x=-5$; d) $x\in\{-1,2\}$; e) $x=0$; f) $x=1$.

   **Soluţie.** Condiţia de existenţă a radicalului se rescrie $x+3\geq0\Leftrightarrow x\geq-3$, iar din pozitivitatea radicalului obţinem $x+1\geq0\Leftrightarrow x\geq-1$. Reţinem deci condiţia $x\geq-1$. Prelucrând şi ridicând la pătrat ecuaţia, obţinem $\sqrt{x+3}-1=x\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=x+1\Rightarrow x+3=(x+1)^2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x\in\{-2,1\}$, dintre cele două valori convenind doar soluţia $x=1$. (f)

9. Fie $M = \{1, 2, 3, \ldots, 999\}$. Să se determine numărul elementelor mulţmii $M$ care conţin cifra 9 cel puţin o dată: **(9 pct.)**

a) 271; b) 243; c) 270; d) 274; e) 275; f) 272.

**Soluţie.** Toate elementele lui $M$ sunt numerele nenule de forma $\overline{xyz}$ unde $x, y, z \in \{0, \ldots, 9\}$ (unde în enunţ nu s-au scris explicit ”trailing zeros”, zerourile care preced partea semnificativă a numărului). Deci $M$ conţine $10^3 - 1$ elemente. Elementele din $M$ care *nu conţin cifra 9* sunt numerele nenule de forma $\overline{xyz}$ unde $x, y, z \in \{0, \ldots, 8\}$. Deci acestea din urmă sunt în număr de $9^3 - 1$. Elementele căutate sunt deci în număr de $(10^3 - 1) - (9^3 - 1) = (10 - 9) \cdot (10^2 + 10 \cdot 9 + 9^2) = 100 + 90 + 81 = 271$. ⓐ

*Altfel.* Elementele care conţin cel putin o dată cifra 9 sunt de forma $xyz$ cu $x, y, z \in \{0, \ldots, 9\}$ şi se împart în următoarele categorii *disjuncte*:

**(i)** pot avea doar o cifră de 9 (cu trei variante de aşezare a cifrei 9, pe celelalte două poziţii fiind cifre din plaja $\{0, \ldots, 8\}$) $\rightsquigarrow 3 \cdot (9 \cdot 9)$ variante;

**(ii)** pot avea exact 2 cifre de 9 (cu trei variante de aşezare a celor două cifre de 9, a treia cifră fiind din plaja $\{0, \ldots, 8\}$) $\rightsquigarrow 3 \cdot 9$ variante;

**(iii)** pot avea toate trei cifrele egale cu 9 $\rightsquigarrow$ o singură variantă (numărul 999).

Obţinem $3 \cdot 81 + 27 + 1 = 271$ variante de numere cu 3 cifre, în care cifra 9 apare cel puţin o dată. ⓐ

10. Se consideră ecuaţia $3^{x^2+1} = 9$. Atunci soluţiile acesteia sunt: **(9 pct.)**

a) $-1$ şi 1; b) 2 şi 3; c) $-2$ şi 2; d)$-\sqrt{2}$ şi $\sqrt{2}$; e) 0; f) 0 şi 5.

**Soluţie.** Ecuaţia se rescrie $3^{x^2+1} = 3^2$ şi logaritmând în baza 3, obţinem $x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$. ⓐ