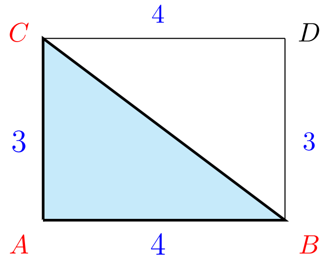
1. Într-un triunghi dreptunghic ABC avem $m(\hat{A}) = 90°$, $BC = 5$ şi $AB = 4$. Atunci aria triunghiului ABC este: **(9 pct.)**

   a) 6; b) 12; c) 3; d) 10; e) 2; f) 5.

   Soluţie. Din Teorema lui Pitagora, rezultă a doua catetă $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$. Triunghiul BAC poate fi privit ca una dintre ipostazele congruente $\Delta BAC \equiv \Delta CDB$ determinate de diagonala AC în dreptunghiul $ABDC$.



   Deci aria triunghiului ABC este jumătate din aria dreptunghiului, $\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. ⓐ

   Altfel. (cale mai lungă, pentru cei care nu observă că o catetă poate fi considerată ca bază iar cealaltă catetă ca înălţime în triunghiul dreptunghic). Folosim două teoreme din ciclul primar: Teorema lui Pitagora, de unde a doua catetă, $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ şi Teorema înălţimii, de unde înălţimea AD (corespunzătoare ipotenuzei) este raportul dintre produsul catetelor şi ipotenuză, $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Aria este deci 1/2 din produsul dintre ipotenuză şi înălţimea aflată, $\frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{5 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{12}{2} = 6$. ⓐ

   Altfel. Din Teorema lui Pitagora, rezultă a doua catetă $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, deci avem lungimile laturilor triunghiului dat: $3, 4, 5$. Putem aplica Teorema Heron: aria este $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde p este semiperimetrul $p = \frac{3+4+5}{2} = 6$. Aria cerută este deci $\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{36} = 6$. ⓐ

2. Dacă $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, atunci $\cos^2 x$ este: **(9 pct.)**

   a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Din formula trigonometrică fundamentală, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4}$. ⓓ

3. Soluţia ecuaţiei $\sin^3 x = \cos^3 x$ din intervalul $[0, \pi]$ este: **(9 pct.)**

   a) $x = \frac{\pi}{3}$; b) $x = \frac{\pi}{5}$; c) $x = \frac{5\pi}{6}$; d) $x = \frac{\pi}{4}$; e) $x = \frac{2\pi}{3}$; f) $x = \frac{3\pi}{4}$.

   Soluţie. Se observă că $x = \frac{\pi}{2}$ nu este soluţie a ecuaţiei (prin înlocuire se obţine $1 = 0$, fals), deci considerăm $x \in D = [0, \pi] \backslash \{\frac{\pi}{2}\}$ şi împărţind prin $\cos^3 x \neq 0$, ecuaţia devine $\operatorname{tg}^3 x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1$, care admite o unică soluţie în D. Deci ecuaţia dată are soluţie unică $x = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$. ⓓ

4. Distanţa de la punctul $M(-1, 2)$ la dreapta de ecuaţie $d: \ 3x + 4y - 3 = 0$ este: **(9 pct.)**

   a) $\frac{2}{5}$; b) 1; c) 5; d) $\frac{1}{5}$; e) 2; f) $\frac{5}{2}$.

   Soluţie. Folosim formula distanţei de la un punct $A(x_A, y_A)$ la dreapta $d: \ ax + by + c = 0$, dată de $d = \frac{|a \cdot x_A + b \cdot x_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Obţinem $d = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$. ⓐ

   Altfel. Distanţa cerută este egală cu distanţa de la M la proiecţia N_* a acestui punct pe d. Aflăm proiecţia intersectând dreapta d cu dreapta d' perpendiculară pe d care trece prin M. Rescriem ecuaţia dreptei $d: \ y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$, deci panta acesteia este $m = -\frac{3}{4}$, si deci dreapta normală d' are ecuaţia $d': \ y - y_M = -\frac{1}{m}(x - x_M) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{4}{3}(x + 1) \Leftrightarrow 4x - 3y + 10 = 0$. Atunci $\{N_*\} = d \cap d': \ \begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -31/25 \\ y = 42/25 \end{cases}$, deci distanţa cerută este $d = d(M, N_*) = \sqrt{(-1 - (-\frac{31}{25}))^2 + (2 - \frac{42}{25})^2} = \frac{2}{5}$. ⓐ

Altfel. Notând $x = t$ în ecuaţie, obţinem punctul generic al dreptei $N = (t, \frac{3(1-t)}{4})$, $t \in \mathbb{R}$. Aflăm valoarea parametrului $t \in \mathbb{R}$ pentru care distanţa de la M la N îşi atinge minimul. Avem $d(M, N) = f(t) = \sqrt{(t-(-1))^2 + (\frac{3(1-t)}{4} - 2)^2}$. Pentru a evita calculele cu radicali, observăm că funcţiile f şi $g = f^2$ îşi ating minimul pentru aceeaşi valoare t_*. Calculăm deci $g(t) = f^2(t) = (t+1)^2 + (\frac{3(1-t)}{4} - 2)^2 = \frac{25t^2+62t+41}{16}$, iar pentru aflarea punctului său de minim, avem $g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_* = -\frac{31}{25}$. Pentru $t = t_*$, punctul mobil N devine punctul N_*, piciorul perpendicularei duse din M pe d, deci distanţa căutată este $d = d(M, N_*)$. Obţinem succesiv $N_* = N|_{t=t_*} = (-\frac{31}{25}, \frac{42}{25})$, deci $d = d(M, N_*) = \sqrt{(-1-(-\frac{31}{25}))^2 + (2 - \frac{42}{25})^2} = \frac{2}{5}$. Observăm că d reprezintă valoarea minimă a funcţiei distanţă f, $d = f(t_*) = f(-\frac{31}{25}) = \frac{2}{5}$. (a)

5. Fie M mulţimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele de ecuaţii $d_1 : mx + y = 2$ şi $d_2 : x + my = 1$ sunt paralele. Atunci: **(9 pct.)**

   a) $M = \{1\}$; b) $M = \{-1\}$; c) $M = \varnothing$; d) $M = \{0\}$; e) $M = \{-1, 0, 1\}$; f) $M = \{-1, 1\}$.

   Soluţie. Condiţia de paralelism revine la: $\frac{m}{1} = \frac{1}{m} \neq \frac{2}{1}$, deci $m \in \{-1, 1\}$ şi $-1 \neq 2$. Prin urmare $M = \{-1, 1\}$. (f)

6. Se consideră triunghiul ABC de vârfuri $A(0, 2)$, $B(2, 0)$ şi $C(4, 0)$. Centrul cercului circumscris triunghiului ABC are coordonatele: **(9 pct.)**

   a) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$; b) $(0, 3)$; c) $(3, 0)$; d) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; e) $(3, 3)$; f) $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

   Soluţie. Mijlocul segmentului AB este $M(1, 1)$, panta dreptei AB este $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2}{2} = -1$, deci mediatoarea segmentului AB (perpendicularea pe AB care trece prin M) are ecuaţia $m_1 : y - y_M = -\frac{1}{m}(x - x_M) \Leftrightarrow y = x$. Mijlocul segmentului BC este $N(3, 0)$, deci mediatoarea segmentului BC (perpendicularea pe BC care trece prin N) are ecuaţia $m_2 : x = 3$. Centrul căutat se află la intersecţia celor două mediatoare, deci satisface sistemul: $\begin{cases} x = y \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$, deci este punctul $(x, y) = (3, 3)$. (e)

   Altfel. Centrul căutat (x, y) este egal depărtat de cele trei vârfuri ale triunghiului. Egalitatea celor trei distanţe se scrie:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$
$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-0)^2 = (x-4)^2 + (y-0)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 4x + 4 = x^2 + y^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow$$
$$-4y + 4 = -4x + 4 = -8x + 16 \Leftrightarrow 1 - y = 1 - x = 4 - 2x \Leftrightarrow x = y = 3,$$

   deci s-a obţinut punctul de coordonate $(3, 3)$. (e)

7. Să se determine valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\bar{u} = (2m+1)\bar{i} + 3\bar{j}$ şi $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j}$ sunt ortogonali. **(9 pct.)**

   a) $m = 0$; b) $m = 1$; c) $m = -\frac{1}{2}$; d) $m = \frac{1}{2}$; e) $m = -1$; f) $m = -2$.

   Soluţie. Condiţia de ortogonalitate se scrie $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow (2m+1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$. (b)

8. Valoarea expresiei $E = 2\cos 60° \cdot \text{ctg}\, 45° \cdot \text{tg}\, 30° \cdot \sin 90°$ este: **(9 pct.)**

   a) $E = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $E = \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $E = 0$; d) $E = \frac{\sqrt{3}}{6}$; e) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; f) $E = 1$.

   Soluţie. Obţinem $E = 2\cos 60° \cdot \text{ctg}\, 45° \cdot \text{tg}\, 30° \cdot \sin 90° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (b)

9. Se dau vectorii $\bar{u} = \sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}$ şi $\bar{v} = -\sqrt{3}\,\bar{i} + 2\bar{j}$. Calculaţi $||\bar{u} + \bar{v}||$. **(9 pct.)**

   a) 0; b) 2; c) 1; d) 4; e) 3; f) $\sqrt{3}$.

   Soluţie. Obţinem $\bar{u} + \bar{v} = (\sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}) + (-\sqrt{3}\,\bar{i} + 2\bar{j}) = 0\bar{i} + 1\bar{j}$, deci $||\bar{u} + \bar{v}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. (c)

10. Fie n numărul soluţiilor ecuaţiei $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ care aparţin intervalului $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}\right]$. Atunci: **(9 pct.)**

    a) $n = 3$; b) $n = 5$; c) $n = 0$; d) $n = 2$; e) $n = 4$; f) $n = 1$.

Soluţie. Deoarece $\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$, după simplificare prin $\sqrt{2}$, ecuaţia se rescrie:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}\Leftrightarrow x\in\left\{2k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Dar în intervalul dat $\left[\frac{\pi}{4},\frac{17\pi}{4}\right]$ se află doar soluţiile $\{\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},4\pi+\frac{\pi}{4}\}=\{\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{17\pi}{4}\}$, şi deci $n=3$. a

Altfel. Notăm $s=\sin x$, $c=\cos x$, iar ecuaţia revine la sistemul

$$\begin{cases}s+c=\sqrt{2}\\ s^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s+c=\sqrt{2}\\ (\sqrt{2}-c)^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s+c=\sqrt{2}\\ 2c^2-2\sqrt{2}c+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s+c=\sqrt{2}\\ (c\sqrt{2}-1)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=1/\sqrt{2}\\ s+c=\sqrt{2},\end{cases}$$

deci $\cos x=\sin x=\sqrt{2}/2$, de unde $x\in\{2k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\}$. Continuăm ca în rezolvarea anterioară şi obţinem $n=3$. a

Altfel. Împărţim ecuaţia prin $\sqrt{2}$ şi prelucrăm membrul stâng,

$$\sin x\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos x\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2}=1\Leftrightarrow\sin x\cdot\cos\tfrac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\tfrac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow x+\tfrac{\pi}{4}\in\left\{2k\pi+\tfrac{\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Leftrightarrow x\in\left\{2k\pi+\tfrac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Continuăm ca în rezolvările anterioare şi obţinem $n=3$. a

Altfel. Prin ridicare la pătrat (deci introducând "soluţii suplimentare"), ecuaţia devine

$$(\sin x+\cos x)^2=2\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=1\Leftrightarrow\sin 2x=1\Leftrightarrow x\in\left\{k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Se observă că valorile $x\in\left\{(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ nu verifică ecuaţia iniţială (prin înlocuire obţinem $-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, fals). Deci ecuaţia dată este satisfăcută doar de valorile $x\in\left\{2k\pi+\frac{\pi}{4}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$. Continuăm ca în rezolvările anterioare şi obţinem $n=3$. a