1. Un pătrat şi un romb au acelaşi perimetru. Dacă aria pătratului este 16, iar unul dintre unghiurile rombului are $30°$, atunci suma pătratelor diagonalelor rombului este: **(7 pct.)**

   a) 10; b) 32; c) 16; d) 40; e) 36; f) 64.

   Soluţie. Atât pătratul, cât şi rombul $ABCD$, au laturi egale. Fie ℓ latura pătratului şi fie ℓ' latura rombului. Aria pătratului fiind $16 = \ell^2$, rezultă $\ell = 4$. Din egalitatea celor două perimetre, rezultă $4\ell = 4\ell'$, deci $\ell' = \ell = 4$. Fie O punctul de intersecţie al diagonalelor rombului, $\{O\} = AC \cap BD$. Folosind faptul că punctul O înjumătăţeşte diagonalele rombului şi aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic AOB (unde O este unghi drept), obţinem

   $$AO^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = \ell'^2 \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 64. \quad \text{f}$$

   Se observă că pentru aflarea răspunsului corect nu este necesară cunoaşterea unghiului A.

   Altfel. Ca mai sus, aflăm latura $\ell' = AB = 4$ a rombului. Ţinând cont că AC este bisectoarea unghiului $\hat{A}$, în triunghiul dreptunghic AOB (unde O este unghi drept) avem $AO = AB \cdot \cos\frac{A}{2}$ şi $BO = AB \cdot \sin\frac{A}{2}$, deci

   $$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (2 \cdot AO)^2 + (2 \cdot BO)^2 = 4(AO^2 + BO^2) = 4\left[\left(AB \cdot \cos\tfrac{A}{2}\right)^2 + \left(AB \cdot \sin\tfrac{A}{2}\right)^2\right] \\ &= 4 \cdot AB^2 \left(\cos^2\tfrac{A}{2} + \sin^2\tfrac{A}{2}\right) = 4 \cdot AB^2 \cdot 1 = 4 \cdot 16 = 64. \end{aligned}$$

2. Valoarea numărului $P = \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \cos 90°$ este **(7 pct.)**

   a) 1; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

   Soluţie. Prin calcul direct, obţinem: $P = \sin 60° \cdot \operatorname{tg} 30° \cdot \cos 90° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 = 0.$ e

   Altfel. Se observă că avem $\cos 90° = 0$, deci produsul P, având un factor nul, este egal cu 0.

3. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 2$, $BC = \sqrt{7}$ şi $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Lungimea laturii AC este: **(7 pct.)**

   a) $\sqrt{7}$; b) 4; c) 2; d) 7; e) $\sqrt{3}$; f) 3.

   Soluţie. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC pentru latura BC şi notând $x = AC$, obţinem:

   $$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow (\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x \in \{-1, 3\}.$$

   Dar rădăcina $x = -1 < 0$ nu convine, deci $AB = x = 3$. f

4. Într-un triunghi ABC în care $AB = 6$ are loc relaţia $2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(A + B)$. Atunci aria triunghiului este: **(7 pct.)**

   a) $6\sqrt{3}$; b) 18; c) $9\sqrt{3}$; d) $3\sqrt{3}$; e) 12; f) 36.

   Soluţie. Folosind egalitatea sumei unghiurilor unui triunghi, avem $A + B = \pi - C$, de unde obţinem

   $$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C, \tag{1}$$

   care permite rescrierea egalităţii din enunţ:

   $$\begin{aligned} &2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(A + B) \\ &\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) = 3 - 2\cos C \\ &\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C = \tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

[1] Subiecte date la Admiterea UPB/Sesiunea iulie 2022 la facultăţile: ETTI, AC, FILS.

sub forma

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}. \tag{2}$$

Examinăm membrul stâng. Pentru început, observăm că

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}. \tag{3}$$

Pe de altă parte, din egalitatea $A+B=\pi-C$ rezultă

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\frac{\pi-C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\left(\frac{C}{2}\right)>0, \tag{4}$$

şi deci din inegalitatea

$$\cos\frac{A-B}{2}\leq 1,$$

amplificând cu $\cos(\frac{A+B}{2})$ care este strict pozitiv în conformitate cu (4), obţinem

$$\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\leq\cos\frac{A+B}{2}.$$

Aceasta, folosind (3), conduce la inegalitatea

$$\cos A+\cos B\leq 2\cos\frac{A+B}{2}, \tag{5}$$

cu egalitate doar în cazul când $\cos(\frac{A-B}{2})=1$, deci când

$$A=B \tag{6}$$

Observăm că din (5) şi (4) rezultă

$$\cos A+\cos B\leq 2\sin(\frac{C}{2}), \tag{7}$$

cu egalitate pentru (6). Adunând $\cos C$ la inegalitatea (7), obţinem

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq 2\sin(\frac{C}{2})+\cos C, \tag{8}$$

care se poate rescrie succesiv:

$$\begin{aligned}
&\cos A+\cos B+\cos C\\
&\quad\leq 2\sin(\tfrac{C}{2})+\cos C\\
&\quad= 2\sin(\tfrac{C}{2})+1-2\sin^2(\tfrac{C}{2})\\
&\quad= \tfrac{3}{2}+[-2\sin^2(\tfrac{C}{2})+2\sin(\tfrac{C}{2})-\tfrac{1}{2}]\\
&\quad= \tfrac{3}{2}-2[\sin^2(\tfrac{C}{2})-\sin(\tfrac{C}{2})+\tfrac{1}{4}]\\
&\quad= \tfrac{3}{2}-2[\sin\tfrac{C}{2}-\tfrac{1}{2}]^2\\
&\quad\leq \tfrac{3}{2},
\end{aligned}$$

şi deci

$$\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}, \tag{9}$$

cu egalitate doar în cazul când avem pe lângă condiţia precedentă (6) şi condiţia recentă $\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$, această ultimă egalitate având loc pentru $\frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}$, deci pentru

$$C=\frac{\pi}{3}. \tag{10}$$

În concluzie, are loc (9), cu egalitate pentru (6) şi (10) deci (ţinând cont că $A+B+C=\pi$), pentru

$$\begin{cases} A=B\\ C=\frac{\pi}{3}\end{cases}\Leftrightarrow A=B=C=\frac{\pi}{3}.$$

Deci inegalitatea (9) devine egalitate doar în cazul triunghiului echilateral. Din ipoteza rescrisă sub forma egalităţii (2), observăm că inegalitatea (9) este în cazul nostru (prin ipoteză) chiar egalitate, deci că triunghiul este echilateral, deci are laturile egale $AB = BC = CA$. Folosind faptul că s-a dat latura $BC = 6$, rezultă că avem $AB = BC = CA = 6$, iar aria triunghiului echilateral este

$$A = \frac{(BC)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}.$$

Altfel. Folosind formulele

$$\begin{array}{ll}
\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, & \text{pentru } x = A + B, \\
\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, & \text{pentru } x = A, y = B, \\
\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}, & \text{pentru } x = \frac{A-B}{2}, y = \frac{A+B}{2} \\
\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, & \text{pentru } x = \frac{C}{2},
\end{array}$$

egalitatea din enunţ se rescrie

$$\begin{aligned}
&2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(A + B) \\
&\quad\Leftrightarrow 2 \cdot 2\cos\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2} = 3 + 2(2\cos^2\tfrac{A+B}{2} - 1) \\
&\quad\Leftrightarrow 4\cos\tfrac{A+B}{2}(\cos\tfrac{A-B}{2} - \cos\tfrac{A+B}{2}) = 1 \\
&\quad\Leftrightarrow 4\cos\tfrac{\pi-C}{2} \cdot 2\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2} = 1 \\
&\quad\Leftrightarrow 8\sin\tfrac{C}{2} \cdot 8\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2} = 1 \\
&\quad\Leftrightarrow \sin\tfrac{A}{2} \cdot \sin\tfrac{B}{2}\sin\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{8}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Pe de altă parte, folosind relaţia $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$ pentru $x = A$, $x = B$ şi $x = C$, egalitatea din enunţ se poate rescrie, alternativ,

$$\begin{aligned}
&2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(A + B) \\
&\quad\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(A + B) \\
&\quad\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B) = 3 + 2\cos(\pi - C) \\
&\quad\Leftrightarrow 2(\cos A + \cos B + \cos C) = 3 \\
&\quad\Leftrightarrow 2(1 - 2\sin^2\tfrac{A}{2} + 1 - 2\sin^2\tfrac{B}{2} + 1 - 2\sin^2\tfrac{C}{2}) = 3 \\
&\quad\Leftrightarrow 4(\sin^2\tfrac{A}{2} + \sin^2\tfrac{B}{2} + \sin^2\tfrac{C}{2}) = 3 \\
&\quad\Leftrightarrow \tfrac{\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}}{3} = \tfrac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Folosim inegalitatea mediilor $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$ cu $x, y, z \geq 0$, care devine egalitate doar în cazul când $x = y = z$. Pentru valorile $x = \sin^2\frac{A}{2} > 0$, $y = \sin^2\frac{B}{2} > 0$, $z = \sin^2\frac{C}{2} > 0$, această inegalitate se rescrie sub forma

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}}{3} \geq \sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}. \tag{13}$$

Dar, folosind (12), membrul stâng este

$$\frac{\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2}}{3} = \frac{1}{4},$$

iar membrul drept este egal cu

$$\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}} = \sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}^{\,2} = (\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^2 = \frac{1}{4},$$

deci cei doi membri ai inegalităţii (13) sunt egali. Inegalitatea (13) fiind egalitate, rezultă că cei trei termeni ai acesteia $x = \sin^2\frac{A}{2} > 0$, $y = \sin^2\frac{B}{2} > 0$, $z = \sin^2\frac{C}{2} > 0$, trebuie să fie egali (şi egali cu media lor $\frac{1}{4}$), deci, cele trei sinusuri fiind strict pozitive şi având $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, obţinem:

$$\begin{aligned}
\sin^2\tfrac{A}{2} = \sin^2\tfrac{B}{2} = \sin^2\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \sin\tfrac{A}{2} = \sin\tfrac{B}{2} = \sin\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \tfrac{A}{2} = \tfrac{B}{2} = \tfrac{C}{2} = \tfrac{\pi}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad A = B = C = \tfrac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Rezultă că triunghiul este echilateral cu o latură $\ell = AB = 6$, deci are aria $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

5. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: **(7 pct.)**

   a) 1; b) $\frac{3}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; e) $-\frac{3}{5}$; f) 0.

   Soluţie. *Metoda 1 (folosind formula trigonometrică fundamentală).* Se observă că din condiţia $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x > 0$. Atunci, folosind această inegalitate şi formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem: **(7 pct.)**

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}. \text{ (c)}$$

   Metoda 2 (folosind exprimarea funcţiilor sin *şi* cos *funcţie de laturi în triunghiul dreptunghic şi folosind Teorema lui Pitagora).* Folosind condiţia $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, putem construi un triunghi dreptunghic ABC, în care unul dintre unghiurile ascuţite este x, spre exemplu cu B, C, A de măsuri x, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2}$, respectiv. Notând cu b, c, a respectiv laturile opuse vârfurilor B, C, A, constatăm că relaţia $\sin B = c/a$ şi egalitatea din enunţ permit exprimarea catetei c funcţie de ipotenuza a a triunghiului:

$$\sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin B = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow c = \frac{3a}{5}.$$

   Aflăm cateta b folosind Teorema lui Pitagora: $b = \sqrt{a^2 - (3a/5)^2} = 4a/5$ şi înlocuind expresia obţinută în relaţia $\cos B = b/a$, obţinem rezultatul dorit:

$$\cos x = \cos B = \frac{b}{a} = \frac{4a/5}{a} = \frac{4}{5}.$$

6. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(7 pct.)**

   a) -3; b) 1; c) -1; d) 3; e) $\frac{1}{3}$; f) 0.

   Soluţie. Ortogonalitatea vectorilor $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j}$ şi $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ revine la anularea produsului lor scalar, deci $m \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$. (d)

7. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0, 3)$, $B(-1, 0)$ şi $C(1, 0)$ este: **(7 pct.)**

   a) $G(0, -1)$; b) $G(0, 1)$; c) $G(1, 1)$; d) $G(-1, 0)$; e) $G(2, 0)$; f) $G(0, 0)$.

   Soluţie. Coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor celor trei vârfuri: **(7 pct.)**

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{0 + (-1) + 1}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3}\right) = (0, 1). \text{ (b)}$$

8. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1 : \ mx + y = 2$ şi $d_2 : \ x + 2y = -2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(7 pct.)**

   a) -1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 1; f) 0.

   Soluţie. Dreptele au aceeaşi direcţie doar dacă are loc proporţionalitatea coeficienţilor variabilelor x şi y din ecuaţiile dreptelor:

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

   Observăm că $\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$, deci cele două drepte nu coincid. Prin urmare, pentru $m = \frac{1}{2}$, dreptele sunt paralele. (c)

9. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: **(7 pct.)**

   a) $\vec{j}$; b) $\vec{i}$; c) $-2\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $4\vec{i} - \vec{j}$.

   Soluţie. Suma celor trei vectori se realizează sumând separat coeficienţii versorilor $\vec{i}$ şi $\vec{j}$:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j}) = (1 + 1 + 2)\vec{i} + (1 + (-1) + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + \vec{j}. \text{ (e)}$$

10. În planul xOy se consideră paralelogramul $ABCD$. Fie M punctul de intersecţie al diagonalelor şi P mijlocul segmentului $[CD]$. Dacă $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ şi $\overrightarrow{AM} = 2\vec{i} - \vec{j}$, atunci vectorul $\overrightarrow{AP}$ este: **(7 pct.)**

a) $\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; b) $-\vec{i} + \vec{j}$; c) $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; d) $2\vec{i} + \vec{j}$; e) $\frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}$; f) $\frac{7}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

Soluţie. Folosind regula triunghiului de adunare a vectorilor (egalitatea Chasles, $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS}$) şi faptul că punctul M de intersecţie a diagonalelor se află la mijlocul acestora, obţinem:

$$\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AM} = 2 \cdot (2\vec{i} - \vec{j}) = 4\vec{i} - 2\vec{j}.$$

De asemenea, avem

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (4\vec{i} - 2\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}) = 3\vec{i} - 3\vec{j}.$$

Atunci, deoarece P se află la mijlocul segmentului $[CD]$, obţinem:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}[(4\vec{i} - 2\vec{j}) + (3\vec{i} - 3\vec{j})] = \frac{1}{2}(7\vec{i} - 5\vec{j}) = \frac{7}{2}\vec{i} - \frac{5}{2}\vec{j}.$$ e