1. Suma soluţiilor ecuaţiei $\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{6})\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$, aflate în intervalul $[0,\pi]$, este: **(7 pct.)**

   a) $\frac{\pi}{6}$; b) 0; c) $\frac{3\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{5\pi}{6}$; f) π.

   Soluţie. Folosind formula $\sin(a+b)=\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}+\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$ pentru $a=x-\frac{\pi}{6}$, $b=\frac{\pi}{6}$, ecuaţia se rescrie

$$\begin{aligned}&\sin(x-\tfrac{\pi}{6})\cos(\tfrac{\pi}{6})+\sin(\tfrac{\pi}{6})\cos(x-\tfrac{\pi}{6})=\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow\\&\sin x=\tfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\{k\pi+(-1)^k\arcsin\tfrac{1}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\}\Leftrightarrow\\&x\in\{k\pi+(-1)^k\tfrac{\pi}{6}\mid k\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

   Folosind însă condiţia din enunţ, obţinem două soluţii acceptabile,

$$x\in\left\{k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,\pi]=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}.$$

   Suma acestora este $\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=\pi$. ⓕ

2. Valoarea numărului $P=\sin 60^\circ\cdot \mathrm{tg}30^\circ\cdot\cos 90^\circ$ este **(7 pct.)**

   a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 1; d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; e) 0; f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Soluţie. Prin calcul direct, obţinem: $P=\sin 60^\circ\cdot\ \mathrm{tg}\,30^\circ\cdot\cos 90^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 0=0$. ⓔ

   Altfel. Se observă că avem $\cos 90^\circ=0$, deci produsul P, având un factor nul, este egal cu 0.

3. Se consideră punctele $A(m,3-m)$, $B(2,2)$ şi $C(1,1)$. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A, este: **(7 pct.)**

   a) $\{2,-2\}$; b) $\varnothing$; c) $\{1,-1\}$; d) $\{1\}$; e) $\{2\}$; f) $\{1,2\}$.

   Soluţie. Lungimile laturilor triunghiului sunt:

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(2-m)^2+(-1+m)^2}=\sqrt{2m^2-6m+5},\\BC&=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2},\\CA&=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=\sqrt{(m-1)^2+(2-m)^2}=\sqrt{2m^2-6m+5}.\end{aligned}$$

   Aplicând în triunghiul ABC teorema lui Pitagora (unde BC este ipotenuză), obţinem

$$BC^2=AB^2+CA^2\Leftrightarrow 2=(2m^2-6m+5)+(2m^2-6m+5)\Leftrightarrow 4m^2-12m+8=0\Leftrightarrow m^2-3m+2=0,$$

   cu soluţiile $m\in\{1,2\}$. ⓕ

   Altfel. Triunghiul ABC este dreptunghic în A doar dacă dreptele AB şi AC sunt perpendiculare, deci dacă pantele acestora, k_{AB} şi k_{AC} satisfac egalitatea $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1$. Dar $k_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1-m}{2-m}$ şi $k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{-2-m}{1-m}$, deci $k_{AB}\cdot k_{AC}=-1\Leftrightarrow 2(m^2-3m+2)=0\Leftrightarrow m^2-3m+2\Leftrightarrow m\in\{1,2\}$.

4. Valoarea parametrului $m\in\mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$ sunt ortogonali, este: **(7 pct.)**

   a) $\frac{1}{3}$; b) -1; c) 3; d) 1; e) 0; f) -3.

   Soluţie. Ortogonalitatea vectorilor $\vec{u}=m\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=-\vec{i}+3\vec{j}$ revine la anularea produsului lor scalar, deci $m\cdot(-1)+1\cdot 3=0\Leftrightarrow m=3$. ⓒ

5. Se consideră dreptele de ecuaţii $d_1:\ mx+y=2$ şi $d_2:\ x+2y=-2$. Valoarea parametrului real m pentru care dreptele sunt paralele, este: **(7 pct.)**

   a) 1; b) 2; c) $\frac{1}{2}$; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) -1.

Soluţie. Dreptele au aceeaşi direcţie doar dacă are loc proporţionalitatea coeficienţilor variabilelor x şi y din ecuaţiile dreptelor:

$$\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Observăm că $\frac{m}{1} = \frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 1$, deci cele două drepte nu coincid. Prin urmare, pentru $m = \frac{1}{2}$, dreptele sunt paralele. c

6. În ΔABC se cunosc $AB = \sqrt{2}$, $AC = 1$ şi $m(\hat{A}) = 135°$. Atunci lungimea laturii BC este: **(7 pct.)**

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{5}$; d) $\sqrt{5}$; e) $\sqrt{2}$; f) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   Soluţie. Aplicând teorema cosinusului în triunghiul ABC pentru latura BC şi formula $\cos(\pi - x) = -\cos x$ pentru $x = \frac{\pi}{4}$, obţinem:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = \sqrt{2}^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\tfrac{3\pi}{4} \\ &= 3 - 2\sqrt{2} \cdot \cos(\pi - \tfrac{\pi}{4}) = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \cos\tfrac{\pi}{4} = 3 + 2\sqrt{2} \cdot \tfrac{\sqrt{2}}{2} = 5, \end{aligned}$$

   deci $BC = \sqrt{5}$. d

7. Într-un triunghi de arie $S = \sqrt{3}$ se cunoaşte raza cercului circumscris, $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Notând cu a, b, c lungimile celor trei laturi, valoarea produsului $a \cdot b \cdot c$ este: **(7 pct.)**

   a) $4\sqrt{3}$; b) 8; c) 6; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{8}$; f) 2.

   Soluţie. Folosind formula $R = \frac{abc}{4S}$, obţinem $abc = 4 \cdot R \cdot S = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8$. b

   Altfel (folosind formula sinusului şi formulele de arie). Aplicând teorema sinsurilor şi egalând produsele membrilor celor trei egalităţi, obţinem

$$\begin{cases} \frac{a}{\sin A} = 2R \\ \frac{b}{\sin B} = 2R \\ \frac{c}{\sin C} = 2R \end{cases} \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{abc}{8R^3}. \tag{1}$$

   Aplicând formulele de arie şi egalând produsele membrilor celor trei egalităţi, obţinem

$$\begin{cases} S = \frac{ab \sin C}{2} \\ S = \frac{bc \sin A}{2} \\ S = \frac{ca \sin B}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = \frac{8S^3}{(abc)^2}. \tag{2}$$

   Egalând membrii drepţi ai egalităţilor (1) şi (2) (care au acelaşi membru stâng), rezultă

$$8R^3 \cdot (abc) = \frac{8S^3}{(abc)^2} \Rightarrow (abc)^3 = (4 \cdot R \cdot S)^3 \Rightarrow abc = 4 \cdot R \cdot S = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 8.$$

   Se observă că egalitatea obţinută $abc = 4 \cdot R \cdot S$ reprezintă exact formula $R = \frac{abc}{4S}$.

8. Fie $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Dacă $\sin x = \frac{3}{5}$, atunci $\cos x$ este: **(7 pct.)**

   a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; c) $\frac{4}{5}$; d) $\frac{3}{5}$; e) 1; f) $-\frac{3}{5}$.

   Soluţie. *Metoda 1 (folosind formula trigonometrică fundamentală).* Se observă că din condiţia $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, rezultă $\cos x > 0$. Atunci, folosind această inegalitate şi formula trigonometrică fundamentală $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, obţinem: **(7 pct.)**

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$ c

   Metoda 2 (folosind exprimarea funcţiilor sin *şi* cos *funcţie de laturi în triunghiul dreptunghic şi folosind Teorema lui Pitagora).* Folosind condiţia $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, putem construi un triunghi dreptunghic ABC, în care unul dintre unghiurile ascuţite este x, spre exemplu cu B, C, A de măsuri x, $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2}$, respectiv.

Notând cu b, c, a respectiv laturile opuse vârfurilor B, C, A, constatăm că relaţia $\sin B = c/a$ şi egalitatea din enunţ permit exprimarea catetei c funcţie de ipotenuza a a triunghiului:

$$\sin x = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin B = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow c = \frac{3a}{5}.$$

Aflăm cateta b folosind Teorema lui Pitagora: $b = \sqrt{a^2 - (3a/5)^2} = 4a/5$ şi înlocuind expresia obţinută în relaţia $\cos B = b/a$, obţinem rezultatul dorit:

$$\cos x = \cos B = \frac{b}{a} = \frac{4a/5}{a} = \frac{4}{5}.$$

9. Centrul de greutate al triunghiului ABC de vârfuri $A(0,3)$, $B(-1,0)$ şi $C(1,0)$ este: **(7 pct.)**
a) $G(1,1)$; b) $G(-1,0)$; c) $G(2,0)$; d) $G(0,-1)$; e) $G(0,1)$; f) $G(0,0)$.

Soluţie. Coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale coordonatelor celor trei vârfuri: **(7 pct.)**

$$G(x_G, y_G) = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = \left(\frac{0 + (-1) + 1}{3}, \frac{3 + 0 + 0}{3}\right) = (0,1). \text{ (e)}$$

10. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Atunci vectorul sumă $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ este: **(7 pct.)**
a) $\vec{i}$; b) $-2\vec{j}$; c) $4\vec{i} - \vec{j}$; d) $\vec{j}$; e) $4\vec{i} + \vec{j}$; f) $2\vec{i} + \vec{j}$.

Soluţie. Suma celor trei vectori se realizează sumând separat coeficienţii versorilor $\vec{i}$ şi $\vec{j}$:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j}) + (2\vec{i} + \vec{j}) = (1 + 1 + 2)\vec{i} + (1 + (-1) + 1)\vec{j} = 4\vec{i} + \vec{j}. \text{ (e)}$$