

Differential Geometry - Dynamical Systems

*** Monographs # 3 ***

Cezar Oniciuc

Tangency and Harmonicity Properties

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Tangency and Harmonicity Properties (Romanian)
Monographs # 3

Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs
Editor-in-Chief Prof.Dr. Constantin Udriște
Managing Editor Prof.Dr. Vladimir Balan
Politehnica University of Bucharest

Tangency and Harmonicity Properties (Romanian)
Cezar Oniciuc. - Bucharest:
Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2003

Includes bibliographical references.

© Balkan Society of Geometers, Differential Geometry - Dynamical Systems
* Monographs, 2003

Neither the book nor any part may be reproduced or transmitted in any form
or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, microfilming
or by any information storage and retrieval system, without the permission in
writing of the publisher.

Universitatea "Al.I. Cuza" Iași
Facultatea de Matematică

Teză de doctorat

TANGENȚĂ ȘI PROPRIETĂȚI DE ARMONICITATE

Conducător științific:

Prof.dr. Vasile Oproiu
Facultatea de Matematică
Universitatea "Al.I. Cuza" Iași

Candidat:

Asistent Cezar Oniciuc
Facultatea de Matematică
Universitatea "Al.I. Cuza" Iași

2002

INTRODUCERE

Teoria aplicațiilor armonice între varietăți riemanniene este o teorie foarte cunoscută și a avut o dezvoltare deosebită în ultimii 30 de ani. Primul articol consacrat studiului aplicațiilor armonice [5] a fost publicat în 1964. De atunci numeroși matematicieni și-au adus contribuția la dezvoltarea acestui domeniu, care astăzi este clasic în geometria riemanniană.

Lucrarea prezentă este dedicată studiului unor aspecte ale aplicațiilor armonice și biarmonice între varietăți riemanniene. Ea este structurată în două părți.

Prima parte, alcătuită din capitolele 2, 3, 4, este dedicată studiului armonicității câmpurilor vectoriale ale unei varietăți riemanniene (M, g) , câmpuri ce sunt privite ca aplicații de la varietatea bază M la fibratul ei tangent TM . Apoi, invers, se studiază armonicitatea proiecției canonice $\pi : TM \rightarrow M$. Pe fibratul tangent se consideră diverse metrice riemanniene și pseudo-riemanniene legate de metrica de pe varietatea bază. Probleme de acest tip au fost studiate în [6, 16, 18] unde pe fibratul tangent s-a considerat metrica Sasaki, în [9] unde pe TM s-a considerat liftul complet al metricii de pe varietatea bază, în [15] unde pe fibratul cotangent T^*M s-a considerat o metrică de tip lift complet.

Partea a doua, alcătuită din capitolele 5, 6, 7, 8, 9, 10, este dedicată studiului aplicațiilor biarmonice între varietăți riemanniene.

În general, în fiecare capitol sunt cuprinse rezultatele ce fac obiectul unei lucrări științifice scrisă de autor singur sau în colaborare.

În **Capitolul 1** se trec în revistă principalele noțiuni și rezultate din teoria aplicațiilor armonice ce vor fi folosite de-a lungul prezentei lucrări. S-a urmărit îndeaproape lucrarea [4].

În **Capitolul 2** se studiază armonicitatea câmpurilor vectoriale $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$. Se demonstrează că dacă $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o imersie riemanniană, atunci ξ este o aplicație armonică, unde G este o metrică riemanniană pe TM astfel încât $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană. Se studiază apoi o reciprocă a acestui rezultat.

De asemeni se studiază armonicitatea câmpurilor vectoriale $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^S)$ și a proiecției canonice $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$, unde g^S este o metrică riemanniană de tip Sasaki construită cu ajutorul unui anumit tip de conexiune neliniară pe TM .

Rezultatele menționate sunt cuprinse în lucrările autorului [11] și [12].

În **Capitolul 3** este abordată aceeași tematică a studiului armonicității câmpurilor vectoriale și a proiecției canonice. Pe $T_0M = \{v \in TM | v \neq 0\}$ se consideră acum o nouă metrică riemanniană G care este un caz singular al unei noi clase de metrice cu ajutorul cărora se obțin noi structuri kähleriene

pe TM . Această clasă a fost introdusă și studiată de V. Oproiu și N. Pa-paghiuc. Se studiază armonicitatea proiecției $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ și a restricției sale la fibratul tangent unitar $T_1M = \{v \in TM \mid |v| = 1\}$. Notăm că $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ nu mai este o submersie riemanniană. Apoi se consideră un câmp vectorial unitar ξ și se studiază armonicitatea lui ca aplicație $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ și $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$. Se obține că dacă ξ este un câmp Killing unitar pe (M, g) , atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ nu este o aplicație armonică, dar $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ este o aplicație armonică.

Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrarea autorului [12].

În **Capitolul 4** se continuă cu studiul armonicității câmpurilor vectoriale și al proiecției canonice. Spre deosebire de cele două capitole anterioare, pe TM se consideră o metrică pseudo-riemanniană construită cu ajutorul unui câmp tensorial c pe M de tip $(0, 2)$, simetric. Se obține că dacă c este tensorul Ricci al varietății (M, g) și ξ este un câmp Killing, atunci ξ este o aplicație armonică.

Rezultatele din acest capitol fac obiectul lucrării [10]. Ea este prima lucrare științifică a autorului și urmărește îndeaproape articolul [15].

Capitolele 2, 3 și 4 reprezintă rezultate obținute de autor în primii 4 ani de inițiere în cercetarea matematică. Acești ani au început în 1994-1995 când autorul era student în anul IV, sub îndrumarea prof. dr. V. Oproiu. În aceste capitole s-au folosit tehnici de lucru în coordonate locale, dar rezultatele au fost interpretate global.

Celelalte capitole sunt dedicate studiului aplicațiilor biarmonice între varietăți riemanniene.

Așa cum este cunoscut, aplicațiile armonice $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ sunt punctele critice ale funcționalei energiei $E(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |d\phi|^2 v_g$ și deci ele sunt soluțiile ecuației Euler-Lagrange corespunzătoare. Această ecuație este dată de anularea câmpului de tensiune al lui ϕ , $\tau(\phi) = \text{trace } \nabla d\phi$. După cum a fost sugerat de J. Eells și J.H. Sampson în [5], definim bienergia aplicației ϕ prin

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g,$$

și spunem că ϕ este biarmonică dacă ea este punct critic pentru funcționala bienergiei.

În lucrările [7, 8] G.Y. Jiang a obținut ecuația Euler-Lagrange pentru E_2 arătând că $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este biarmonică dacă și numai dacă

$$(0.1) \quad \tau_2(\phi) = -J(\tau(\phi)) = -\Delta\tau(\phi) - \text{trace } R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi = 0,$$

unde J este operatorul Jacobi asociat aplicației ϕ , iar R^N este tensorul de curbura al lui (N, h) . Această formulă a fost dată și de R. Caddeo și V. Oproiu, dar rezultatul nu a fost publicat.

B.Y. Chen a definit subvarietățile biarmonice în spațiul euclidian \mathbb{R}^n ca fiind acelea care satisfac ecuația $\Delta H = 0$, unde H este câmpul vectorial curbura medie al subvarietății. Folosind formalismul nostru, se obține că

M este o subvarietate biarmonică dacă $\tau_2(\mathbf{i}) = 0$, unde $\mathbf{i} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ este incluziunea canonică.

În cazul euclidian, aplicațiile biarmonice sunt soluții ale bi-laplacianului. Bi-laplacianul împreună cu soluțiile sale a fost studiat și de M. Nicolescu și alți matematicieni români. Bi-laplacianul apare în mecanica clasică, în teoria elasticității (deformarea plană, problema încovoierii plăcilor elastice, problema torsiunii cilindrilor).

O problemă variațională asemănătoare, dar pentru imersii riemanniene, a fost studiată de B.Y. Chen, J.T. Willmore, J.L. Weiner. În acest caz se consideră $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o imersie riemanniană și $\tilde{E}_2 = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g$, dar variația lui ϕ se face numai prin imersii riemanniene; odată cu aplicația ϕ se schimbă și metrica g de pe M . Desigur, formula de caracterizare pentru aplicațiile critice ale acestei noi funcționale este diferită de cea pentru aplicațiile biarmonice. Un studiu detaliat al acestei probleme a fost făcut în [17].

Din ecuația biarmonică (0.1) rezultă că orice aplicație armonică este biarmonică. Prin urmare suntem interesați de aplicațiile biarmonice care nu sunt armonice. În lucrările lui G.Y. Jiang apare un singur exemplu de aplicație biarmonică și non-armonică, torul lui Clifford generalizat, iar toate rezultatele lui B.Y. Chen și ale colaboratorilor săi sunt rezultate de non-existență a subvarietăților biarmonice și non-armonice în \mathbb{R}^n . Astfel, una din problemele rezolvate de autor este aceea a găsirii de exemple semnificative de aplicații biarmonice și non-armonice.

Tehnicile de lucru folosite în această parte a lucrării sunt cele de calcul invariant.

În **Capitolul 5** se demonstrează formula de caracterizare pentru aplicațiile biarmonice între varietăți riemanniene și se prezintă câteva rezultate de non-existență pentru aplicațiile biarmonice și non-armonice. De asemenea, se formulează și o coniectură privind echivalența dintre aplicațiile biarmonice și cele armonice, atunci când spațiul de sosire are curbura secțională negativă.

Rezultatele prezentate în acest capitol sunt cunoscute, dar sunt și rezultate originale. Acestea sunt cuprinse în lucrarea autorului [13].

După cum a fost sugerat în Capitolul 5, în **Capitolul 6** se începe studiul subvarietăților biarmonice în spații de curbura secțională pozitivă. Se alege cel mai simplu caz, i.e. studiul subvarietăților biarmonice în \mathbb{S}^3 , sfera euclidiană 3-dimensională de rază 1, care are curbura secțională constantă pozitivă 1.

Se obține clasificarea tuturor subvarietăților biarmonice și non-armonice ale lui \mathbb{S}^3 . Ele sunt

- dacă $m = 1$, atunci M este fie un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$, fie un anumit tip de elice sferică;
- dacă $m = 2$, atunci M este o hipersferă $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$.

Această clasificare a fost dată în lucrarea [1], scrisă de autor în colaborare cu R. Caddeo și S. Montaldo.

În prima parte a **Capitolului 7** se demonstrează că o subvarietate în $N^3(-1)$ este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică (minimală), unde $N^3(-1)$ este o varietate de dimensiune 3 și de curbura secțională constantă negativă -1 . Aceasta reprezintă un răspuns pozitiv la coniectura formulată în Capitolul 5.

Apoi se studiază subvarietățile biarmonice și non-armonice în S^n , unde $n > 3$. În acest caz, familia acestor subvarietăți este mult mai largă decât în cazul precedent, S^3 . Se demonstrează că orice subvarietate minimală în $S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset S^n$ este o subvarietate biarmonică și non-armonică în S^n . Deci, folosind subvarietăți minimale cunoscute, putem obține o clasă largă de subvarietăți biarmonice și non-armonice în S^n . În particular, ca o consecință a unui cunoscut rezultat al lui Lawson, rezultă că există în S^4 suprafețe orientabile biarmonice și non-armonice, de orice gen. Pe de altă parte, scufundarea minimală Veronese a lui $P^2(\mathbb{R})$ în S^4 induce în S^5 o suprafață non-orientabilă biarmonică și non-minimală.

În continuare se dă o teoremă de clasificare a subvarietăților biarmonice în S^n de curbura medie constantă.

De asemeni se scrie și se rezolvă ecuația biarmonică pentru curbe în S^n .

Toate aceste rezultate sunt cuprinse în articolul [2], scris în colaborare cu R. Caddeo și S. Montaldo.

În Capitolele 6 și 7 am studiat subvarietățile biarmonice în S^n , $n \geq 3$, și în $N(-1)$, spații de curbura secțională constantă pozitivă, respectiv negativă. Acum este natural să studiem subvarietățile biarmonice ale unei varietăți N ce nu are curbura secțională constantă. Desigur, în acest caz va spori complexitatea calculelor, anumite formule ne mai având o formă simplă.

Astfel, în **Capitolul 8** se alege ca varietate N grupul Heisenberg H_3 . S-a făcut această alegere deoarece H_3 are multe proprietăți interesante. Grupul izometriilor sale are dimensiunea 4, maximum posibil pentru o varietate 3-dimensională și de curbura secțională non-constantă, ceea ce ne dă speranța că ecuația biarmonică va putea fi prelucrată. De asemeni, H_3 a fost preferat și de alți matematicieni pentru a studia cum se comportă anumite rezultate atunci când curbura secțională nu mai este constantă.

În prima parte se studiază curbele biarmonice în H_3 și se obține o familie de elici biarmonice și non-geodezice. Acest rezultat este asemănător cu cel obținut pentru curbele biarmonice în S^3 .

În partea a doua se studiază suprafețele biarmonice în H_3 . Se dă o teoremă de non-existență a suprafețelor biarmonice și non-minimale. Acest rezultat este adevărat pentru o clasă largă de suprafețe și este asemănător cu cel obținut pentru suprafețele biarmonice în \mathbb{R}^3 sau în $N^3(-1)$.

Tehnicile de lucru folosite în Capitolul 8 diferă de cele folosite în Capitolele 6 și 7, deoarece curbura secțională a varietății ambiante nu este constantă. S-au folosit aici tehnici din teoria foliațiilor.

Rezultatele din acest capitol sunt cuprinse în lucrarea [3], scrisă în colaborare cu R. Caddeo și P. Piu.

Aplicațiile biarmonice provin dintr-un principiu variațional, și atunci o problemă naturală este studiul variației a doua a bienergiei pentru a vedea în ce situații se obține un minim.

În **Capitolul 9** se studiază variația a doua a bienergiei pentru aplicații biarmonice cu valori în sfera \mathbb{S}^n . Mai întâi se găsește expresia hessianei pentru o aplicație biarmonică $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$

$$H(E_2)_\phi(V, W) = \int_M \langle I(V), W \rangle v_g.$$

Apoi se particularizează pentru cazul cel mai natural $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ imersie riemanniană armonică, arătând că ea este slab stabilă și găsind forma nucleului operatorului I . În continuare se consideră cele mai simple aplicații biarmonice cu valori în \mathbb{S}^n , și anume: aplicația identitate $\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ și aplicația incluziune $\mathbf{i} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$. Acestea fiind aplicații total geodezice, sunt armonice și deci slab stabile, și se calculează nulitatea lor.

Aceste rezultate constituie obiectul lucrării autorului [14].

În **Capitolul 10**, ultimul, se studiază submersiile riemanniene biarmonice. Mai întâi se obține formula de caracterizare a submersiilor riemanniene biarmonice ce au câmpul de tensiune bazic. Folosind această formulă se demonstrează câteva rezultate privind non-existența submersiilor riemanniene biarmonice și non-armonice. Apoi se dă o teoremă ce furnizează exemple de submersii riemanniene biarmonice și non-armonice. Capitolul se încheie cu studiul biarmonicității proiecției canonice $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$, care este o submersie riemanniană, unde g^S este o metrică riemanniană de tip Sasaki pe fibratul tangent TM .

Aceste rezultate sunt cuprinse în articolul [13].

Lucrarea se încheie cu o bibliografie generală.

Mulțumiri. În încheiere doresc să mulțumesc domnului profesor Vasile Oproiu pentru sprijinul constant acordat încă din perioada studenției, pentru numeroasele discuții și sfaturi, pentru atmosfera de seriozitate impusă. De asemeni doresc să mulțumesc pentru încrederea acordată.

Doresc să mulțumesc domnului profesor Renzo Caddeo pentru condițiile bune de lucru oferite la Universitatea din Cagliari și pentru colaborare.

Doresc să mulțumesc domnului profesor Izu Vaisman pentru observațiile constructive aduse asupra unor lucrări și pentru încurajare.

Doresc să mulțumesc soției mele Carmen și mamei mele pentru înțelegerea și sprijinul acordat.

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of S^3* , Internat. J. Math., 12 (2001), no. 8, 867-876.
- [2] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, va apărea în Israel J. Math., 2002.
- [3] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu, *On biharmonic submanifolds of the Heisenberg group*, preprint.
- [4] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).
- [5] J. Eells, J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 86 (1964), 109-160.
- [6] T. Ishihara, *Harmonic sections of tangent bundles*, J. Math. Tokushima Univ., 13, 1979, 23-27.
- [7] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.
- [8] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [9] O. Nouhaud, *Applications harmoniques d'une variété riemannienne dans son fibré tangent. Généralisation*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 284 (1977), 815-818.
- [10] C. Oniciuc, *On the harmonic sections of tangent bundles*, An. Univ. Buc., 1, (1998), 67-72.
- [11] C. Oniciuc, *Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N.6, 1999, 109-122.
- [12] C. Oniciuc, *Harmonic sections in the unitary tangent bundle*, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIV (2001), No 3, 681-692.
- [13] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi.
- [14] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere*, va apărea în Publicationes Mathematicae Debrecen.
- [15] V. Oproiu, *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 59(2), (1989), 177-184.
- [16] P. Piu, *Campi di vettori ed applicazione armoniche*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 52(1), (1982), 85-94.
- [17] J.L. Weiner, *On a Problem of Chen, Willmore, et al*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, No. 1, 1978, 19-35.
- [18] C.M. Wood, *On the Energy of a Unit Vector Field*, Geometriae Dedicata, 64(1997), 319-330.

Cuprins

Introducere	1
I Capitolul introductiv	7
I. 1 Introducere	7
I. 2 Operatori pe fibrare vectoriale	7
I. 3 Aplicații armonice	12
I. 4 Proprietăți ale aplicațiilor armonice	14
I. 5 A doua variație a energiei	15
I. 6 Morfisme armonice	16
I. 7 Submersii riemanniene armonice	16
II Conexiuni neliniare pe fibratul tangent și armonicitate	19
II. 1 Introducere	19
II. 2 Conexiuni neliniare pe fibratul tangent și armonicitatea câmpurilor vectoriale	19
III Secțiuni armonice în fibratul tangent unitar	26
III. 1 Introducere	26
III. 2 O nouă structură riemanniană pe T_0M	26
III. 3 Armonicitatea proiecției canonice π	28
III. 4 Armonicitatea câmpurilor vectoriale unitare	30
IV Secțiuni armonice în fibratul tangent	34
IV. 1 Introducere	34
IV. 2 O metrică pseudo-riemanniană pe TM	34
IV. 3 Armonicitatea proiecției canonice și a câmpurilor vectoriale	35
V Aplicații biarmonice. Generalități	39
V. 1 Introducere	39
V. 2 Formula de caracterizare pentru aplicații biarmonice	39
V. 3 Rezultate de non-existență	41

VI Subvarietăți biarmonice în \mathbb{S}^3	46
VI. 1 Introducere	46
VI. 2 Curbe biarmonice în \mathbb{S}^3	46
VI. 3 Suprafețe biarmonice în \mathbb{S}^3	48
VII Subvarietăți biarmonice în \mathbb{S}^n	54
VII. 1 Introducere	54
VII. 2 Teoreme de non-existență	54
VII. 3 Subvarietăți biarmonice în \mathbb{S}^n	56
VII. 4 Curbe biarmonice în \mathbb{S}^n	62
VIII Subvarietăți biarmonice în grupul Heisenberg	66
VIII. 1 Introducere	66
VIII. 2 Structura riemanniană a lui H_3	66
VIII. 3 Elici biarmonice în H_3	68
VIII. 4 Suprafețe biarmonice în H_3	70
IX A doua formulă variațională pentru aplicații biarmonice	76
IX. 1 Introducere	76
IX. 2 A doua formulă variațională pentru bienergie	76
X Submersii riemanniene biarmonice	83
X. 1 Introducere	83
X. 2 Submersii riemanniene biarmonice	83
X. 3 Biarmonicitatea proiecției canonice $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$	85
Bibliografie generală	88

CAPITOLUL I

CAPITOLUL INTRODUCATIV

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom trece în revistă principalele noțiuni și rezultate din teoria aplicațiilor armonice ce au fost folosite de-a lungul lucrării. În acest scop vom urmări îndeaproape lucrarea [2].

Vom presupune ca fiind cunoscute noțiunile de varietate diferențiabilă netedă finit dimensională, conexiune liniară, varietate riemanniană, imersie riemanniană, submersie riemanniană, fibrat vectorial, etc. (de exemplu vezi monografiile [1, 4, 5]).

Peste tot în această lucrare vom nota cu (M, g) și (N, h) varietăți riemanniene netede, fără bord, conexe, de dimensiune m și n respectiv. Toate aplicațiile $\phi : M \rightarrow N$ vor fi presupuse netede.

Vom nota cu $\xi : V \rightarrow M$ un fibrat vectorial neted peste M de rang finit, i.e. dimensiunea fibrei este finită.

2. OPERATORI PE FIBRATE VECTORIALE

2.1. Fie M o varietate riemanniană și $\xi : V \rightarrow M$ un fibrat vectorial de rang finit.

Vom nota cu $C(\xi)$ sau $C(V)$ spațiul vectorial infinit dimensional al secțiunilor netede în V , i.e. aplicațiile $\sigma : M \rightarrow V$ ce satisfac $\xi \circ \sigma = \mathbf{1}_M$, aplicația identitate a lui M .

2.2. **Exemplu.** Dacă TM este fibratul tangent al varietății M atunci $C(TM)$ este algebra Lie a câmpurilor vectoriale pe M , unde paranteza Lie (croșetul) este definită prin $[X, Y]f = XYf - YXf$, $\forall X, Y \in C(TM)$ și $f \in C^\infty(M)$. Am notat cu $C^\infty(M)$ spațiul funcțiilor netede pe M .

2.3. Dacă $\xi : V \rightarrow M$ și $\eta : W \rightarrow M$ sunt două fibrate vectoriale vom face următoarele notații:

- V^* dualul lui V ,
- $V \oplus W$ suma directă (Whitney) a lui V cu W ,
- $V \otimes W$ produsul tensorial al lui V cu W ,
- $\otimes^k V$ puterea tensorială k a lui V ,
- $\wedge^k V$ puterea exterioară k a lui V ,
- $\odot^k V$ puterea simetrică k a lui V .

Dacă $\phi : M \rightarrow N$ este o aplicație netedă și $\eta : W \rightarrow N$ este un fibrat vectorial, notăm cu $\phi^{-1}W$ fibratul indus a cărui fibră în $x \in M$ este $W_{\phi(x)}$, i.e. fibra lui W în $\phi(x)$.

2.4. Definiție. O metrică riemanniană pe un fibrat vectorial V este o secțiune $a \in C(\odot^2 V^*)$ care induce în fiecare fibră un produs scalar. Vom folosi notația $a(\sigma, \rho) = \langle \sigma, \rho \rangle$.

2.5. Definiție. O conexiune liniară pe un fibrat vectorial $\xi : V \rightarrow M$ este o aplicație \mathbb{R} -biliniară ∇ definită de

$$\nabla : C(TM) \times C(V) \rightarrow C(V), \quad (X, \sigma) \rightarrow \nabla_X \sigma,$$

astfel încât

- $\nabla_{fX} \sigma = f \nabla_X \sigma$
- $\nabla_X (f\sigma) = (Xf)\sigma + f \nabla_X \sigma$.

$\nabla_X \sigma$ se numește derivata covariantă a lui σ în direcția lui X .

2.6. Dacă a și b sunt metrici pe V și W respectiv, putem induce metrici pe fibratele de la 2.3. astfel.

Pentru V^* folosim în fiecare fibră V_x și V_x^* izomorfismele muzicale $\flat : V_x \rightarrow V_x^*$, $\sigma^\flat(\rho) = \langle \sigma, \rho \rangle$, pentru $\sigma, \rho \in V_x$, și $\sharp : V_x^* \rightarrow V_x$ definit prin $\sharp = \flat^{-1}$. Pentru $\alpha, \beta \in V_x^*$ definim

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{V^*} = \langle \alpha^\sharp, \beta^\sharp \rangle_V.$$

Pentru $\sigma, \rho \in V_x$ și $\lambda, \mu \in W_x$ definim

$$\begin{aligned} \langle \sigma \oplus \lambda, \rho \oplus \mu \rangle &= \langle \sigma, \rho \rangle + \langle \lambda, \mu \rangle, \\ \langle \sigma \otimes \lambda, \rho \otimes \mu \rangle &= \langle \sigma, \rho \rangle \langle \lambda, \mu \rangle. \end{aligned}$$

Acest produs induce unul și pe $\wedge^k V$ și $\odot^k V$.

Pentru $\phi : M \rightarrow N$ și $\eta : W \rightarrow N$ un fibrat vectorial cu metrica b putem identifica $\sigma, \rho \in (\phi^{-1}W)_x$ cu $\sigma, \rho \in W_{\phi(x)}$ și definim

$$\langle \sigma, \rho \rangle_{\phi^{-1}W} = \langle \sigma, \rho \rangle_b.$$

2.7. Dacă ∇^V, ∇^W sunt conexiuni pe V și W putem defini

- conexiunea duală ∇^* pe V^* prin

$$(\nabla_X^* \theta)(\sigma) = X(\theta(\sigma)) - \theta(\nabla_X \sigma),$$

unde $\theta \in C(V^*)$ și $\sigma \in C(V)$,

- conexiunea sumă directă pe $V \oplus W$ prin

$$\nabla_X(\sigma \oplus \lambda) = \nabla_X^V \sigma \oplus \nabla_X^W \lambda,$$

- conexiunea produs tensorial pe $V \otimes W$ prin

$$\nabla_X(\sigma \otimes \lambda) = (\nabla_X^V \sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes (\nabla_X^W \lambda).$$

Pentru o aplicație $\phi : M \rightarrow N$ și un fibrat vectorial $W \rightarrow N$ cu conexiunea ∇^W , definim conexiunea indusă pe $\phi^{-1}W$ astfel: ea este unica conexiune ∇ pe $\phi^{-1}W$ astfel încât $\forall x \in M, \forall X \in T_x M$ și $\forall \lambda \in C(W)$, avem

$$\nabla_X(\phi^*\lambda) = \nabla_{d\phi_x(X)}^W \lambda,$$

unde $d\phi_x : T_x M \rightarrow T_{\phi(x)}N$ este diferențiala lui ϕ , iar $\phi^*\lambda = \lambda \circ \phi \in C(\phi^{-1}W)$.

2.8. Definiție. O structură riemanniană pe fibratul V este o pereche (∇, a) unde a este o metrică riemanniană, ∇ este o conexiune, iar $\nabla a = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} (\nabla a)(X, \sigma, \rho) &= (\nabla_X a)(\sigma, \rho) = X \langle \sigma, \rho \rangle - \langle \nabla_X \sigma, \rho \rangle - \langle \sigma, \nabla_X \rho \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dacă (∇^V, a) și (∇^W, b) sunt structuri riemanniene pe V și W , respectiv, atunci metricile și conexiunile construite în 2.6. și 2.7. formează structuri riemanniene pe fibratele vectoriale în discuție.

2.9. Exemplu. Pe fibratul tangent TM torsiunea unei conexiuni ∇ este definită de

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad \forall X, Y \in C(TM).$$

Dacă g este o metrică riemanniană pe TM , teorema fundamentală a geometriei riemanniene afirmă că există o unică conexiune, conexiunea Levi-Civita, astfel încât

$$\nabla g = 0 \text{ și } T = 0.$$

Intr-adevăr, ∇ este definită de

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

$\forall X, Y, Z \in C(TM)$. Notăm că pe alte fibrate vectoriale torsiunea nu este definită, și în general, o metrică nu determină o unică conexiune.

Pentru o aplicație $\phi : M \rightarrow N$ vom considera pe $\phi^{-1}TN$ conexiunea indusă $\nabla^{\phi^{-1}TN}$ de conexiunea Levi-Civita pe N . Avem următoarea formulă

$$\nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi(Y) - \nabla_Y^{\phi^{-1}TN} d\phi(X) = d\phi([X, Y]),$$

$\forall X, Y \in C(TM)$; $d\phi(X) \in C(\phi^{-1}TN)$, $(d\phi(X))(x) = d\phi_x X_x$.

2.10. Curbura unei conexiuni este o aplicație $R : \wedge^2 C(TM) \otimes C(V) \rightarrow C(V)$ definită de

$$R(X, Y)\sigma = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]}\sigma.$$

2.11. Pentru diversele conexiuni construite în 2.7. se poate arăta că curburilor lor sunt date de:

- pentru V^* : $(R^*(X, Y)\theta)(\sigma) = -\theta(R(X, Y)\sigma)$, $\forall X, Y \in C(TM)$, $\theta \in C(V^*)$, $\sigma \in C(V)$;
- pentru $V \oplus W$: $R(X, Y)(\sigma \oplus \lambda) = R^V(X, Y)\sigma \oplus R^W(X, Y)\lambda$, unde $\lambda \in C(W)$;
- pentru $V \otimes W$: $R(X, Y)(\sigma \otimes \lambda) = (R^V(X, Y)\sigma) \otimes \lambda + \sigma \otimes R^W(X, Y)\lambda$;
- pentru $\phi^{-1}W$: $R_x(X, Y)\rho = R_{\phi(x)}^W(d\phi_x(X), d\phi_x(Y))\rho(x)$.

2.12. Pe fibratul tangent TM înzestrat cu o metrică riemanniană g și conexiunea ei Levi-Civita ∇ , vom considera curbura secțională și curbura Ricci, abținute astfel.

Curbura secțională a unui 2-plan P a lui T_xM este definită de

$$\text{Riem}_x(P) = \langle R(Y, X)X, Y \rangle_x,$$

unde $\{X, Y\}$ este o bază ortonormată arbitrară a lui P . Vom spune că M are curbura secțională nenegativă, și scriem $\text{Riem}^M \geq 0$, dacă pentru orice $x \in M$ și $P \subset T_xM$, $\text{Riem}_x(P) \geq 0$.

Tensorul Ricci în x este o aplicație biliniară simetrică definită de

$$\text{Ricci}_x : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{Ricci}_x(X, Y) = \text{trace}(Z \rightarrow R(Z, X)Y),$$

sau

$$\text{Ricci}_x : T_xM \rightarrow T_xM, \quad \langle \text{Ricci}_x(X), Y \rangle = \text{Ricci}_x(X, Y).$$

Vom spune că curbura Ricci este nenegativă dacă $\text{Ricci}_x(X, X) \geq 0$, $\forall X \in T_xM$.

2.13. Notăm $A^k(\xi) = C(\wedge^k T^*M \otimes V)$ spațiul k -formelor pe M cu valori în fibratul vectorial $\xi : V \rightarrow M$; $A^0(\xi) = C(V)$.

2.14. **Definiție.** Operatorul diferențiala exterioră $d : A^k(\xi) \rightarrow A^{k+1}(\xi)$ relativ la conexiunea ∇^V este dat de

$$\begin{aligned} d\sigma(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i}^V (\sigma(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma([X_i, X_j], X_i, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

unde simbolul acoperit de $\widehat{}$ este omis.

Dacă TM este înzestrat cu o conexiune fără torsiune ∇^M , atunci d poate fi definit ca antisimetrizarea lui ∇ definit pe $C(\wedge^k T^*M \otimes V)$:

2.15.

$$(d\sigma)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} \sigma)(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}),$$

unde

2.16.

$$(\nabla_X \rho)(X_1, \dots, X_k) = \nabla_X^V(\rho(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \rho(X_1, \dots, \nabla_X^M X_i, \dots, X_k).$$

2.17. Presupunem că M este compactă și orientabilă.

Relativ la structurile riemanniene pe V și TM definim operatorul codiferențial $d^* : A^k(\xi) \rightarrow A^{k-1}(\xi)$ prin

$$\int_M \langle d\sigma, \rho \rangle v_g = \int_M \langle \sigma, d^* \rho \rangle v_g,$$

unde $\sigma \in A^{k-1}(\xi)$, $\rho \in A^k(\xi)$, iar v_g este elementul de volum determinat de metrica g de pe TM .

Vom folosi următoarea formulă

2.18. **Lemă.** Dacă $\{E_s\}$ este o bază în $T_x M$, $X_j \in T_x M$, iar g^{st} este inversa matricii $g(E_s, E_t)$, atunci pentru $\rho \in A^k(\xi)$

$$(d^* \rho)(X_1, \dots, X_{k-1}) = - \sum_{s,t} g^{st} (\nabla_{E_t} \rho)(E_s, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

În particular, dacă $\rho \in A^1(\xi)$ atunci $d^* \rho = - \text{trace } \nabla \rho$.

Notăm că putem defini operatorul d^* direct prin formula de mai sus, fără a cere ca M să fie compactă și orientabilă. Vom avea că $\langle d\sigma, \rho \rangle - \langle \sigma, d^* \rho \rangle$ reprezintă divergența unui câmp vectorial pe M .

2.19. Laplacianul Δ ce acționează pe forme diferențiale V -valuate este definit de

$$\Delta = dd^* + d^*d : A^k(V) \rightarrow A^k(V).$$

Observația 2.1. Fie $f \in C^\infty(M)$. Atunci $\Delta f = d^*df = - \text{trace } \nabla df$.

2.20. **Propoziție.** Presupunem că M este compactă și orientabilă. Atunci Δ este un operator eliptic, autoadjunct și semi-positiv definit. Avem și

$$\Delta \sigma = 0 \Leftrightarrow d\sigma = 0 = d^* \sigma.$$

2.21. **Definiție.** O k -formă σ se numește armonică dacă $\Delta \sigma = 0$.

2.22. **Teorema de unică prelungire.** Fie $\sigma \in A^k(V)$ o k -formă armonică. Dacă σ se anulează pe o submulțime deschisă a lui M , atunci $\sigma = 0$ pe M .

2.23. **Formula lui Weitzenböck.** Vom prezenta aici formula lui Weitzenböck doar pentru 0 și 1-forme V -valuate.

- Dacă $\sigma \in A^0(\xi)$, atunci

$$\Delta \sigma = - \text{trace } \nabla d\sigma = - \text{trace } \nabla^2 \sigma, \quad \frac{1}{2} \Delta |\sigma|^2 = \langle \Delta \sigma, \sigma \rangle - |\nabla \sigma|^2.$$

- Dacă $\sigma \in A^1(\xi)$ și $X \in C(TM)$, atunci

$$\Delta\sigma(X) = -\text{trace } \nabla^2\sigma(X) + \sum_s R^V(e_s, X)\sigma(e_s) - \sum_s \sigma(R^M(e_s, X)e_s),$$

unde $\{e_s\}$ este o bază ortonormată în T_xM , iar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 &= \langle \Delta\sigma, \sigma \rangle - |\nabla\sigma|^2 \\ &\quad - \sum_{s,t} \langle R^V(e_s, e_t)\sigma(e_s), \sigma(e_t) \rangle - \sum_t \langle \sigma(\text{Ricci } e_t), \sigma(e_t) \rangle. \end{aligned}$$

3. APLICAȚII ARMONICE

3.1. Fie (M, g) și (N, h) două varietăți riemanniene de dimensiune m și n , respectiv, iar $\phi : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Diferențiala ei poate fi privită ca o secțiune în fibratul $T^*M \otimes \phi^{-1}TN$, i.e. $d\phi \in A^1(\phi^{-1}TN)$.

3.2. **Definiție.** Densitatea de energie a lui ϕ este dată de

$$e(\phi) = \frac{1}{2}|d\phi|^2,$$

iar dacă M este compactă și orientabilă, energia lui ϕ este definită de

$$E(\phi) = \int_M e(\phi)v_g.$$

Dacă (x^i) și (u^α) sunt coordonate locale în jurul lui x și $\phi(x)$, atunci

$$e(\phi) = \frac{1}{2}g^{ij}h_{\alpha\beta}(\phi)\phi_i^\alpha\phi_j^\beta,$$

unde $\phi_i^\alpha = \frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}$.

Notăm că $E(\phi) \geq 0$ și $E(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = \text{constant}$.

3.3. **Definiție.** Presupunem că M este compactă și orientabilă. O aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ se numește armonică dacă ea este un punct critic pentru energie, i.e. $\forall v \in C(\phi^{-1}TN)$ rezultă $D_vE(\phi) = 0$.

$D_vE(\phi)$ este definit astfel: considerăm o familie de aplicații $\{\phi_t\}_t$ astfel încât $\phi_0 = \phi$, iar $\frac{\partial\phi}{\partial t}\big|_{t=0} = v$ (de exemplu $\phi_t(x) = \exp_{\phi(x)} tv$). Atunci $D_vE(\phi) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\{E(\phi_t)\}$.

3.4. **Teoremă.** Presupunem că M este compactă și orientabilă. O aplicație $\phi : M \rightarrow N$ este armonică dacă și numai dacă ea satisface ecuația Euler-Lagrange $\tau(\phi) = 0$, unde $\tau(\phi) = -d^*d\phi = \text{trace } \nabla d\phi$ se numește câmpul tensiune al lui ϕ .

Observație. Dacă M nu este compactă și orientabilă, atunci ϕ se numește armonică dacă satisface ecuația $\tau(\phi) = 0$.

3.5. Exprimarea în coordonate locale pentru $\nabla d\phi$ și $\tau(\phi)$:

- $(\nabla d\phi)_{ij}^\alpha = \phi_{ij}^\alpha - {}^M \Gamma_{ij}^k \phi_k^\alpha + {}^N \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \phi_i^\beta \phi_j^\gamma$,
- $\tau(\phi)^\alpha = g^{ij} (\nabla d\phi)_{ij}^\alpha$,

unde $\phi_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j}$.

3.6. **Exemplu.** Dacă $M = \mathbb{S}^1$, atunci o aplicație $\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow (N, h)$ este armonică dacă ea este geodezică.

3.7. **Exemplu.** Aplicația identitate $\mathbf{1} : (M, g) \rightarrow (M, g)$ este armonică.

3.8. **Exemplu.** Dacă M și N sunt două varietăți kähleriene iar $\phi : M \rightarrow N$ este o aplicație olomorfă, atunci ea este armonică.

3.9. **Exemplu.** Fie $\phi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ aplicația Hopf, i.e.

$$\phi : \mathbb{S}^3 = \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\} \rightarrow \mathbb{S}^2, \phi(z^1, z^2) = (2z^1 \overline{z^2}, |z^1|^2 - |z^2|^2).$$

Aplicația ϕ este armonică.

3.10. **Exemplu.** Dacă $(N, h) = \mathbb{R}$, atunci $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ este o aplicație armonică dacă ea este o funcție armonică în sens obișnuit.

3.11. **Definiție.** O funcție $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ se numește subarmonică dacă $\Delta f \leq 0$.

3.12. **Principiul de maxim.** Dacă $f : (M, g) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție subarmonică și $\exists x_0 \in M$ astfel încât $f(x_0) \geq f(x), \forall x \in M$, atunci $f = \text{constant}$.

3.13. **Definiție.** Pentru o aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ forma pătratică $\nabla d\phi$ se numește forma a doua fundamentală asociată.

3.14. **Propoziție.** Pentru $X, Y \in C(TM)$ avem

- $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^{\phi^{-1}TN} d\phi(Y) - d\phi(\nabla_X^M Y)$,
- $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla d\phi(Y, X)$

3.15. **Observație.** O aplicație ϕ este armonică dacă și numai dacă $d\phi$ este o 1-formă co-exactă, iar dacă M este compactă și orientabilă, atunci ϕ este armonică dacă și numai dacă $d\phi$ este o 1-formă armonică (cu valori în $\phi^{-1}TN$).

3.16. **Exemplu.** Presupunem că $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este o imersie riemanniană. Identificând $X \in C(TM)$ cu $d\phi(X) \in C(\phi^{-1}TN)$, avem

$$\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^N Y - \nabla_X^M Y.$$

3.17. **Propoziție.** O imersie riemanniană este armonică dacă și numai dacă ea este minimală.

3.18. **Definiție.** O aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ se numește total geodezică dacă $\nabla d\phi = 0$.

3.19. Propoziție. Dacă (M, g) , (N, h) și (P, k) sunt trei varietăți riemanniene, iar $\phi \in C(M, N)$, $\psi \in C(N, P)$, atunci

- $\nabla d(\psi \circ \phi) = d\psi(\nabla d\phi) + \nabla d\psi(d\phi, d\phi)$
- $\tau(\psi \circ \phi) = d\psi(\tau(\phi)) + \text{trace } \nabla d\psi(d\phi, d\phi)$.

Să notăm că compunerea a două aplicații total geodezice este o aplicație total geodezică, dar compunerea a două aplicații armonice nu este, în general, o aplicație armonică.

3.20. Propoziție. Presupunem că ψ este o imersie riemanniană. Atunci

$$\tau(\phi) = 0 \Leftrightarrow \tau(\psi \circ \phi) \perp N.$$

3.21. Propoziție. Fie $\mathbf{i} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ incluziunea canonică și $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$. Notăm $\Phi = \mathbf{i} \circ \phi$. Atunci

$$\tau(\phi) = 0 \Leftrightarrow \Delta\Phi = |d\Phi|^2\Phi.$$

3.22. Propoziție. Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație netedă. Următoarele trei afirmații sunt echivalente

- (a) ϕ este o aplicație total geodezică,
- (b) ϕ conservă conexiunile,
- (c) ϕ aplică geodezicele lui M în geodezice ale lui N .

3.23. Propoziție. O aplicație total geodezică are densitatea de energie constantă și rang constant.

4. PROPRIETĂȚI ALE APLICAȚIILOR ARMONICE

4.1. Teorema de unică prelungire. Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică care este constantă pe o submulțime deschisă a lui M . Atunci ϕ este constantă pe M .

4.2. Propoziție. Dacă $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este armonică atunci

$$-\text{trace } \nabla^2 d\phi = -\sum_s R^N(d\phi(e_s), d\phi)d\phi(e_s) - d\phi(\text{Ricci}^M),$$

iar

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|d\phi|^2 &= -|\nabla d\phi|^2 - \sum_{s,t} \langle R^N(d\phi(e_s), d\phi(e_t))d\phi(e_s), d\phi(e_t) \rangle \\ &\quad - \sum_s \langle d\phi(\text{Ricci}^M(e_s)), d\phi(e_s) \rangle, \end{aligned}$$

unde $\{e_s\}$ este o bază ortonormată în punctul în discuție de pe M .

4.3. **Corolar.** Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică. Presupunem că M este compactă și orientabilă, $\text{Ricci}^M \geq 0$ și $\text{Riem}^N \leq 0$. Atunci:

- (a) ϕ este total geodezică.
- (b) Dacă $\exists u \in N$ astfel încât $\text{Ricci}^M(u) > 0$, atunci $\phi = \text{constant}$.
- (c) Dacă $\text{Riem}^N < 0$, atunci ϕ este sau o constantă sau de rang 1, caz în care imaginea ei este o geodezică închisă.

5. A DOUA VARIATIE A ENERGIEI

5.1. Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică. În această secțiune vom presupune că M este compactă și orientabilă.

Considerăm o variație netedă a sa $\{\phi_{s,t}\}_{s,t \in \mathbb{R}}$ cu doi parametri s și t , i.e. considerăm aplicația netedă Φ dată de

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \rightarrow N, \quad \Phi(s, t, p) = \phi_{s,t}(p),$$

unde $\Phi(0, 0, p) = \phi_{0,0}(p) = \phi(p)$, $\forall p \in M$.

Câmpurile vectoriale corespunzătoare acestei variații V și W sunt date de

$$V(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_{s,0}(p) = d\Phi_{(0,0,p)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \in T_{\phi(p)}N,$$

și

$$W(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_{0,t}(p) = d\Phi_{(0,0,p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\phi(p)}N.$$

V și W sunt secțiuni în $\phi^{-1}TN$, i.e. $V, W \in C(\phi^{-1}TN)$.

Hessiana energiei E în punctul sau critic ϕ este definită de

$$H(E)_\phi(V, W) = \left. \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \right|_{(s,t)=(0,0)} E(\phi_{s,t}).$$

5.2. **Propoziție.** Hessiana unei aplicații armonice ϕ este dată de

$$\begin{aligned} H(E)_\phi(V, W) &= \int_M \langle \Delta V + \text{trace } R^N(d\phi \cdot, V)d\phi \cdot, W \rangle v_g \\ &= \int_M \langle J(V), W \rangle v_g, \end{aligned}$$

unde Δ este laplacianul ce acționează pe $C(\phi^{-1}TN)$.

5.3. **Definiție.**

$$J : C(\phi^{-1}TN) \rightarrow C(\phi^{-1}TN), \quad J = \Delta + \text{trace } R^N(d\phi \cdot, \cdot)d\phi \cdot$$

se numește operatorul Jacobi, iar elementele nucleului său se numesc câmpuri Jacobi.

5.4. **Definiție.** Indexul lui ϕ este dimensiunea celui mai amplu subspațiu al lui $C(\phi^{-1}TN)$ pe care $H(E)_\phi$ este negativ definit. Nulitatea lui ϕ este dimensiunea nucleului lui ϕ .

Notăm că indexul și nulitatea sunt finite.

5.5. **Definiție.** O aplicație armonică de index 0 se numește slab stabilă.

5.6. **Propoziție.** Fie $\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ aplicația identitate. Atunci

$$\text{index } \mathbf{1} = n + 1.$$

5.7. **Propoziție.** Fie $\phi : \mathbb{S}^m \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică neconstantă, iar $m \geq 3$. Atunci $\text{index } \phi > 0$.

5.8. **Propoziție.** Fie $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ o aplicație armonică neconstantă, iar $n \geq 3$. Atunci $\text{index } \phi > 0$.

6. MORFISME ARMONICE

6.1. **Definiție.** O aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ se numește morfism armonic dacă pentru orice funcție armonică f definită pe un deschis $V \subset N$, $f \circ \phi$ este armonică pe $\phi^{-1}(V)$.

Notăm că noțiunea de morfism armonic este locală, iar compunerea a două morfisme armonice este un morfism armonic.

6.2. **Definiție.** O aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ se numește orizontal conformă dacă pentru orice $x \in M$ cu $d\phi(x) \neq 0$, restricția lui $d\phi(x)$ la complementul ortogonal al lui $\ker d\phi(x)$ este conformă și surjectivă.

Vom folosi notațiile: $\ker d\phi(x) = T_x^V M$ (spațiul vertical) iar $(\ker d\phi(x))^\perp = T_x^H M$ (spațiul orizontal).

6.3. **Teoremă.** O aplicație $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este un morfism armonic dacă și numai dacă ϕ este armonică și orizontal conformă. Dacă ϕ este un morfism armonic neconstant, atunci ϕ este o submersie pe o submulțime deschisă și densă în M ; dacă într-un punct $x \in M$, $\text{rank } d\phi(x) < n$, atunci $d\phi(x) = 0$.

6.4. **Corolar.** Dacă $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este o submersie riemanniană atunci următoarele afirmații sunt echivalente

- (a) ϕ este o aplicație armonică,
- (b) ϕ este un morfism armonic,
- (c) fibrele sunt minimale.

7. SUBMERSII RIEMANNIENE ARMONICE

7.1. Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o submersie riemanniană. Notăm

$$T_x M = T_x^H M \oplus T_x^V M,$$

unde $x \in M$, $T_x^V M = \ker d\phi(x)$, iar $T_x^H M = (T_x^V M)^\perp$, i.e. complementul ortogonal al lui $T_x^V M$ în $T_x M$ în raport cu g .

7.2. Un câmp vectorial $X \in C(TM)$ se numeşte bazic dacă este orizontal, i.e. $X(x) \in T_x^H M$, $\forall x \in M$, şi $\exists X_* \in C(TN)$ astfel încât $d\phi_x X = X_*(\phi(x))$, $\forall x \in M$. Aplicaţia $X \rightarrow X_*$ este o bijecţie de la câmpurile bazice pe M la câmpurile vectoriale pe N ; în plus

$$g_x(X, Y) = h_{\phi(x)}(X_*, Y_*),$$

pentru orice câmpuri bazice X şi Y .

7.3. **Lemă.** Dacă X, Y sunt câmpuri vectoriale bazice, atunci

- (a) $d\phi([X, Y]) = [X_*, Y_*]$, deci $(H[X, Y])_* = [X_*, Y_*]$,
- (b) $(H(\nabla_X^M Y))_* = \nabla_{X_*}^N Y_*$,

unde cu H şi V am notat proiecţiile lui TM pe $T^H M$, respectiv $T^V M$.

7.4. **Lemă.** Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o submersie riemanniană. Avem

- (a) $\nabla d\phi|_{T^H M \times T^H M} = 0$,
- (b) $\nabla d\phi|_{T^V M \times T^V M} = 0$ dacă şi numai dacă fibrele lui ϕ sunt subvarietăţi total geodezice în M ,
- (c) $\nabla d\phi|_{T^H M \times T^V M} = 0 = \nabla d\phi|_{T^V M \times T^H M}$ dacă şi numai dacă distribuţia orizontală este integrabilă.

7.5. **Corolar.** Dacă $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este o submersie riemanniană atunci următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

- ϕ este o aplicaţie total geodezică,
- fibrele lui ϕ sunt subvarietăţi total geodezice şi distribuţia orizontală este integrabilă.

7.6. **Teoremă.** O submersie riemanniană $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ are densitatea de energie constantă $e(\phi) = \frac{n}{2}$, şi este armonică dacă şi numai dacă fibrele sale sunt subvarietăţi minimale.

BIBLIOGRAFIE

- [1] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [2] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board. Math. Sci. 50, 1983.
- [3] J. Eells, A. Ratto, *Harmonic maps and minimal immersions with symmetries; Method of ordinary differential equations applied to elliptic variational problems*, Ann. Math. Studies 130, Princeton Univ. Press, 1993.
- [4] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*, Vol. 2, Editura Academiei Române, 1979.
- [5] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Geometrie diferenţială*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1977.
- [6] S. Ianuş, *Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii*, Editura Academiei Române, 1983.
- [7] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.

- [8] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.
- [9] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Translations of Mathematical Monographs, 1993, Vol. 132.
- [10] J.L. Weiner, *On a Problem of Chen, Willmore, et al*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, No. 1, (1978), 19-35.
- [11] Y.L. Xin, *Geometry of Harmonic Maps*, Birkhäuser Boston, 1996.

CAPITOLUL II

CONEXIUNI NELINIARE PE FIBRATUL TANGENT ȘI ARMONICITATE

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom demonstra următorul rezultat: fie (M, g) o varietate riemanniană, G o metrică riemanniană pe TM astfel încât proiecția canonică $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană și fie ξ un câmp vectorial pe M ; dacă $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o imersie riemanniană, atunci ξ este o aplicație armonică (Teorema (2.1)). De asemenea, vom prezenta și o reciprocă a acestui rezultat (Teorema (2.12)).

Vom studia apoi armonicitatea câmpurilor vectoriale atunci când pe fibratul tangent se consideră o metrică de tip Sasaki (Teorema (2.9)).

Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrările **Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity**, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, N.6, 1999, 109-122, și **Harmonic sections in the unitary tangent bundle**, *Demonstratio Mathematica*, Vol. XXXIV (2001), No 3, 681-692, de C. Oniciuc.

2. CONEXIUNI NELINIARE PE FIBRATUL TANGENT ȘI ARMONICITATEA CÂMPURILOR VECTORIALE

Fie (M, g) o varietate riemanniană m -dimensională și $\pi : TM \rightarrow M$ fibratul ei tangent. Reamintim că TM are o structură de varietate $2m$ -dimensională indusă de structura varietății bază: o hartă locală $(U; \varphi) = (U; x^i)$, $i = 1, \dots, m$, pe M induce o hartă locală $(\pi^{-1}(U); \Phi) = (\pi^{-1}(U); x^i, y^j)$, $i, j = 1, \dots, m$, pe TM , unde am notat prin abuz $x^i = x^i \circ \pi$, iar y^j sunt coordonatele vectorilor din $\pi^{-1}(U)$ în baza naturală $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$.

Pe TM avem distribuția verticală VTM definită de $VTM = \ker d\pi$. Remarcăm că VTM este o distribuție integrabilă. Considerăm o conexiune neliniară arbitrară pe TM definită de distribuția HTM pe TM complementară distribuției VTM , i.e.

$$HTM \oplus VTM = TTM.$$

HTM se numește distribuția orizontală.

Pe un domeniu de hartă locală indusă $(\pi^{-1}(U); x^i, y^j)$ avem câmpul local de baze adaptate pentru HTM definit de

$$(2.1) \quad \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad i = 1, \dots, m$$

unde funcțiile locale $N_i^j(x, y)$ sunt coeficienții de conexiune ai conexiunii neliniare definite de HTM . Câmpurile vectoriale $(\frac{\partial}{\partial y^i})$, $i = 1, \dots, m$ definesc un câmp local de repere pentru VTM .

Fie $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un câmp vectorial pe M . Definim liftul orizontal și vertical al lui ξ , respectiv, prin

$$\xi^H = \xi^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad \xi^V = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

În particular avem $(\frac{\partial}{\partial x^i})^H = \frac{\delta}{\delta x^i}$ și $(\frac{\partial}{\partial x^i})^V = \frac{\partial}{\partial y^i}$.

Câmpul de 1-forme (dx^i, Dy^j) definește câmpul de baze duale pentru $(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j})$, unde

$$(2.2) \quad Dy^i = dy^i + N_j^i dx^j.$$

Notăm

$$(2.3) \quad R_{jk}^i = \frac{\delta N_k^i}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^i}{\delta x^k} = \frac{\delta}{\delta x^j}(N_k^i) - \frac{\delta}{\delta x^k}(N_j^i).$$

Se observă că $R_{kj}^i = -R_{jk}^i$ și avem următoarele formule pentru croșete

$$(2.4) \quad \left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k} \right] = R_{kj}^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \left[\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^k} \right] = \frac{\partial N_j^i}{\partial y^k} \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right] = 0,$$

de unde rezultă că distribuția orizontală este integrabilă dacă și numai dacă $R_{jk}^i = 0$.

Teorema 2.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană și G o metrică riemanniană pe TM astfel încât $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană. Fie $\xi \in C(TM)$ un câmp vectorial pe M . Dacă $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este imersie riemanniană, atunci ξ este o aplicație total geodezică, și deci armonică.*

Demonstrație. Avem distribuția verticală $VTM = \ker d\pi$ și considerăm distribuția orizontală HTM ca fiind complementul ortogonal al distribuției VTM în raport cu G . Notăm cu $N_j^i(x, y)$ coeficienții conexiunii neliniare definite de HTM . În continuare vom folosi notațiile introduse la începutul acestei secțiuni.

Cum proiecția $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană rezultă că $G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = g_{ij}$. Desigur $G(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = 0$.

Avem

$$d\xi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\delta}{\delta x^i} + (N_i^j \circ \xi + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial y^j}.$$

Aplicația ξ este imersie riemanniană dacă și numai dacă $N_i^j \circ \xi + \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} = 0$, i.e. $d\xi(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \frac{\delta}{\delta x^i}$.

Fie ${}^G\nabla$ conexiunea Levi-Civita a metricii G . Printr-un calcul direct se obține

$${}^G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{1}{2} R_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k},$$

de unde rezultă

$$\begin{aligned} \nabla d\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \left(G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \circ \xi - d\xi\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{1}{2}(R_{ji}^k \circ \xi) \frac{\partial}{\partial y^k} - \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} \\ &= \frac{1}{2}(R_{ji}^k \circ \xi) \frac{\partial}{\partial y^k}. \end{aligned}$$

Dar

$$R_{ji}^k(\xi(p)) \frac{\partial}{\partial y^k} = \left[\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right](\xi(p)) = d\xi\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) = 0,$$

ceea ce implică $\nabla d\xi = 0$, i.e. ξ este o aplicație total geodezică. \square

Observația 2.2. Putem da o altă demonstrație acestui rezultat.

Fie $t \rightarrow \gamma(t)$ o geodezică pe M , i.e. $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$. Avem

$$\gamma(t) : x^i = x^i(t)$$

și

$$\tilde{\gamma}(t) = \xi(\gamma(t)) : x^i = x^i(t), \quad y^i(t) = \xi^i(\gamma(t)).$$

Cum ξ este imersie riemanniană obținem

$$\frac{d\tilde{\gamma}}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta}{\delta x^i}.$$

Prin urmare, ținând cont de expresia

$$G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{1}{2}R_{ji}^k \frac{\partial}{\partial y^k},$$

obținem

$$\begin{aligned} G\nabla_{\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}} \frac{d\tilde{\gamma}}{dt} &= G\nabla_{\frac{dx^i}{dt} \frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{dx^j}{dt} \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{d^2 x^j}{dt^2} \frac{\delta}{\delta x^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} \\ &= \frac{d^2 x^j}{dt^2} \frac{\delta}{\delta x^j} + \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} = \left(\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}\right)^H \\ &= 0. \end{aligned}$$

Prin urmare ξ este o aplicație total geodezică.

Observația 2.3. In general, o imersie riemanniană nu este aplicație total geodezică. După cum vom vedea și în capitolul următor, ipoteza $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ submersie riemanniană este esențială.

2.1. O metrică de tip Sasaki pe TM . Considerăm acum o conexiune neliniară arbitrară pe TM . Cu ajutorul ei vom defini o metrică g^S de tip Sasaki pe TM prin

$$(2.5) \quad g^S(X^V, Y^V) = g(X, Y) = g^S(X^H, Y^H), \quad g^S(X^H, Y^V) = 0.$$

Dacă $g = g_{ij} dx^i dx^j$, atunci g^S se scrie ca

$$g^S = g_{ij} dx^i dx^j + g_{ij} Dy^i Dy^j,$$

iar matricea lui g^S este dată de

$$\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g_{ij} \end{pmatrix}.$$

g^S este o metrică riemanniană pe TM , distribuția verticală este ortogonală pe cea orizontală, iar V_vTM și H_vTM sunt izometrice cu T_pM , unde $p = \pi(v)$. Proiecția canonică $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană și prin urmare g^S satisface ipotezele teoremei (2.1).

Propoziția 2.4. *Conexiunea Levi-Civita ${}^S\nabla$ a metricii g^S este dată local de*

$$\begin{cases} {}^S\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k^l}{\partial y^j} g_{li} + \frac{\partial N_k^l}{\partial y^i} g_{lj} \right) g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h}, \\ {}^S\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = -\frac{1}{2} R_{kj}^l g_{li} g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial N_j^l}{\partial y^k} g_{li} - \frac{\partial N_j^l}{\partial y^i} g_{lk} \right) g^{kh} \frac{\partial}{\partial y^h}, \\ {}^S\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial N_i^l}{\partial y^k} g_{lj} + \frac{\partial N_i^l}{\partial y^j} g_{lk} \right) g^{kh} \frac{\partial}{\partial y^h} - \frac{1}{2} R_{ki}^l g_{lj} g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h}, \\ {}^S\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\delta}{\delta x^h} + \frac{1}{2} R_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h}. \end{cases}$$

În continuare vom considera $N_j^i(x, y) = \Gamma_{j0}^i - B_j^i(x)$, unde $B = (B_j^i(x))$ este un tensor de tip $(1, 1)$ pe M .

Notăm că dacă $B = 0$ atunci g^S este metrica Sasaki propriu-zisă.

Conexiunea Levi-Civita ${}^S\nabla$ devine

$$(2.6) \quad \begin{cases} {}^S\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = 0, & {}^S\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \frac{1}{2} R_{jk}^l g_{li} g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h}, \\ {}^S\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\delta}{\delta x^h} - \frac{1}{2} R_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h}, \\ {}^S\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h} + \frac{1}{2} R_{ik}^l g_{lj} g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h}, \end{cases}$$

unde $R_{kj}^i = R_{lkj}^i y^l + (\nabla_j B_k^i - \nabla_k B_j^i)$.

Din expresia de mai sus a conexiunii Levi-Civita rezultă

Propoziția 2.5. *Proiecția canonică $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$ este o aplicație armonică.*

Diferențiala lui ξ este dată acum de

$$d\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} + (\nabla_i \xi^j - B_i^j) \frac{\partial}{\partial y^j},$$

de unde obținem

Propoziția 2.6. *Aplicația $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^S)$ este imersie riemanniană dacă și numai dacă*

$$\nabla_i \xi^j = B_i^j, \text{ i.e. } \nabla \xi = B.$$

Observația 2.7. *Dat un câmp vectorial ξ pe M , alegând $B = \nabla \xi$, el devine imersie riemanniană.*

Din (2.6) obținem

$$(2.7) \quad \tau(\xi) = \left\{ g^{ij} C_j^r (R_{ik}^l \circ \xi) g_{lr} g^{kh} \right\} \frac{\delta}{\delta x^h} + \left\{ g^{ij} (\nabla_i C_j^h) \right\} \frac{\partial}{\partial y^h},$$

unde $C_i^k = \nabla_i \xi^k - B_i^k$.

Propoziția 2.8. *Pentru orice $\xi \in C(TM)$ există o metrică de tip (2.5) astfel încât $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^S)$ este o aplicație armonică.*

Teorema 2.9. *Dacă M este compactă și orientabilă iar $\nabla B = 0$, atunci ξ este armonică dacă și numai dacă $\nabla \xi = 0$.*

Demonstrație. Rezultă din (2.7) și din următoarea formulă

$$\int_M \{ g^{ij} (\nabla_i \nabla_j \xi^k) g_{kh} \xi^h + (\nabla_j \xi^i) g^{jr} (\nabla_r \xi^l) g_{il} \} v_g = 0.$$

□

Corolarul 2.10 ([2]). *Presupunem că M este compactă și orientabilă. Dacă $B_j^k = 0$, i.e. g^S este metrica Sasaki, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^S)$ este imersie riemanniană,
2. $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^S)$ este aplicație armonică,
3. $\nabla \xi = 0$.

Observația 2.11. *Dacă M este compactă și orientabilă iar $\nabla_i B_j^k = 0$ și $B \neq 0$, atunci ξ aplicație armonică nu implică ξ imersie riemanniană.*

Vom încheia prezentând o reciprocă a Teoremei (2.1).

Fie \tilde{G} o metrică riemanniană pe TM satisfăcând

$$(2.8) \quad \tilde{G}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = g_{ij}, \quad \tilde{G}\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,$$

unde

$$(2.9) \quad \frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{i0}^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{ih}^j y^h \frac{\partial}{\partial y^j},$$

i.e. conexiunea neliniară este cea determinată de conexiunea Levi-Civita de pe varietatea M .

Proiecția canonică $\pi : (TM, \tilde{G}) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană, iar conexiunea Levi-Civita $\tilde{G}\nabla$ a metricii \tilde{G} , conform [4], se poate scrie sub

forma

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = {}^p \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} + T\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\ \tilde{G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = A\left(\frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right) + T\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \\ \tilde{G} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = A\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) + V \tilde{G} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j}, \\ \tilde{G} \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\delta}{\delta x^k} - \frac{1}{2} R_{0ij}^k \frac{\partial}{\partial y^k}, \end{array} \right.$$

unde R_{ijk}^h sunt componentele câmpului tensorial de curbură R al lui ∇ , ${}^p \nabla$ este conexiune indusă de $\tilde{G} \nabla$ pe $T_p M$, iar A și T sunt tensorii lui O'Neill din teoria submersiilor riemanniene.

Din (2.9) și (2.10) obținem partea verticală $V\tau(\xi)$ a câmpului tensiune al unui câmp vectorial ξ pe M

$$(2.11) \quad \begin{aligned} V\tau(\xi) &= g^{ij} (\nabla_i \nabla_j \xi^h) \frac{\partial}{\partial y^h} + 2g^{ij} T\left(\nabla_i \xi^h, \frac{\partial}{\partial y^h}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) \circ \xi + \\ &+ g^{ij} (\nabla_i \xi^k) (\nabla_j \xi^h) [V(\tilde{G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial}{\partial y^h}) \circ \xi], \end{aligned}$$

unde $\tau(\xi) = H\tau(\xi) + V\tau(\xi)$, $V\tau(\xi) \in VTM$ și $H\tau(\xi) \in HTM$.

Presupunem că $T = 0$, i.e. fibrele lui π sunt subvarietăți total geodezice în (TM, \tilde{G}) . În această ipoteză (2.11) devine

$$(2.12) \quad V\tau(\xi) = g^{ij} (\nabla_i \nabla_j \xi^h) \frac{\partial}{\partial y^h} + g^{ij} (\nabla_i \xi^k) (\nabla_j \xi^h) (\tilde{G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \frac{\partial}{\partial y^h}) \circ \xi.$$

Notăm $\tilde{G} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = Q_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h}$. Atunci $Q_\xi = (Q_{ij}^k \circ \xi)$ este un tensor de tip $(1, 2)$ pe M simetric, i.e. $Q_\xi(X, Y) = Q_\xi(Y, X)$, $\forall X, Y \in C(TM)$ și definim tensorul simetric P_ξ de tip $(0, 2)$ pe M prin $P_\xi(X, Y) = g(Q_\xi(X, Y), \xi)$. Putem acum enunța

Teorema 2.12. *Fie \tilde{G} o metrică riemanniană pe TM ce satisface (2.8) și presupunem că fibrele submersiei riemanniene $\pi : (TM, \tilde{G}) \rightarrow (M, g)$ sunt subvarietăți total geodezice. Presupunem că M este compactă și orientabilă și că una din următoarele condiții este satisfăcută*

1. $P_\xi = 0$,
2. $P_\xi(X, X) \leq 0, \forall X \in C(TM)$,
3. $\text{trace } P_\xi(\nabla \xi, \nabla \xi) = f |\nabla \xi|^2$, unde $f \in C^\infty(M)$ și $f < 1$, sau $f > 1$.

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente

- ξ este aplicație armonică,
- ξ este imersie riemanniană,
- $\nabla \xi = 0$.

Demonstrație. Rezultă din (2.12) și următoarea formulă integrală

$$\int_M \{g(\text{trace } \nabla^2 \xi, \xi) + |\nabla \xi|^2\} v_g = 0.$$

□

Observația 2.13. Referitor la viabilitatea ipotezelor avem

- dacă \tilde{G} este metrica Sasaki, atunci ipoteza (1) este satisfăcută;
- dacă \tilde{G} este metrica Cheeger-Gromoll și ξ este un câmp unitar, atunci ipoteza 3) este satisfăcută cu $f = \frac{3}{4}$ (vezi [6]).

Observația 2.14. In ipotezele teoremei, dacă caracteristica Euler-Poincaré a lui M nu se anulează, sau dacă (M, g) are curbura secțională constantă nenulă, atunci ξ este o aplicația armonică dacă și numai dacă $\xi = 0$.

Observația 2.15. Notăm că dacă $\frac{\delta}{\delta x^i}$ nu este dată de (2.9), atunci Teorema (2.12) nu mai este adevărată. Într-adevăr, presupunem că

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \{\Gamma_{i0}^j - B_i^j(x)\} \frac{\partial}{\partial y^j},$$

și $\nabla B = 0$ iar $B \neq 0$. Dacă $\tilde{G} = g^S$ atunci π este o submersie riemanniană cu $T = 0$, $P_\xi = 0$, iar ξ aplicație armonică, care este echivalent cu $\nabla \xi = 0$, nu implică ξ imersie riemanniană (Observația (2.11)).

BIBLIOGRAFIE

- [1] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).
- [2] T. Ishihara, *Harmonic sections of tangent bundles*, J. Math. Tokushima Univ., 13, 1979, 23-27.
- [3] E. Musso, F. Tricerri, *Riemannian metrics on tangent bundles*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 150 (1988), 1-19.
- [4] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.
- [5] C. Oniciuc, *On the harmonic sections of tangent bundles*, An. Univ. Buc., 1, (1998), 67-72.
- [6] C. Oniciuc, *The tangent bundles and harmonicity*, An. St. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi, XLIII, (1997), (1), 151-172.
- [7] C. Oniciuc, *Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N.6, 1999, 109-122.
- [8] C. Oniciuc, *Harmonic sections in the unitary tangent bundle*, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIV (2001), No 3, 681-692.
- [9] V. Oproiu, *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 59(2), (1989), 177-184.
- [10] P. Piu, *Campi di vettori ed applicazione armoniche*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 52(1), (1982), 85-94.
- [11] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian Geometry*, M. Dekker, Inc. New-York, 1970.
- [12] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundle*, M. Dekker, New York, 1973.

CAPITOLUL III

SECȚIUNI ARMONICE ÎN FIBRATUL TANGENT UNITAR

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom studia armonicitatea proiecției canonice $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ și a restricției sale la T_1M (Propoziția 3.1 și Teorema 3.2), unde $T_0M = \{v \in TM \mid v \neq 0\}$, $T_1M = \{v \in TM \mid |v| = 1\}$, G este o nouă metrică riemanniană pe T_0M , iar (M, g) este o varietate riemanniană de curbură secțională constantă pozitivă. Spre deosebire de capitolul precedent, $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ nu mai este o submersie riemanniană. De asemeni, vom studia armonicitatea câmpurilor vectoriale unitare $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ și $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ (Teorema 4.8) și vom obține că dacă ξ este un câmp Killing unitar, atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1M, G)$ este o aplicație armonică.

Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrarea **Harmonic sections in the unitary tangent bundle**, de C. Oniciuc, *Demonstratio Mathematica*, Vol. XXXIV (2001), No. 3, 681-692.

2. O NOUĂ STRUCTURĂ RIEMANNIANĂ PE T_0M

Fie (M, g) o varietate riemanniană m -dimensională și $\pi : TM \rightarrow M$ fibratul ei tangent. Reamintim că TM are o structură de varietate $2m$ -dimensională indusă de structura varietății bază: o hartă locală $(U; \varphi) = (U; x^i)$, $i = 1, \dots, m$, pe M induce o hartă locală $(\pi^{-1}(U); \Phi) = (\pi^{-1}(U); x^i, y^j)$, $i, j = 1, \dots, m$, pe TM , unde am notat prin abuz $x^i = x^i \circ \pi$, iar y^j sunt coordonatele vectorilor din $\pi^{-1}(U)$ în baza naturală $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1}^m$.

Reamintim că conexiunea Levi-Civita a metricii g definește o descompunere în sumă directă a lui TTM

$$TTM = VTM \oplus HTM,$$

unde $VTM = \ker d\pi$ este distribuția verticală, iar HTM este distribuția orizontală. Câmpurile $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}_{i=1}^m$ definesc un câmp local de baze pentru VTM , iar pentru HTM avem câmpul de baze $\{\frac{\delta}{\delta x^i}\}_{i=1}^m$, unde

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{i0}^h \frac{\partial}{\partial y^h}; \quad \Gamma_{i0}^h = \Gamma_{ik}^h y^k,$$

iar $\Gamma_{ik}^h(x)$ sunt simbolii lui Christoffel.

Sistemul de 1-forme (dx^k, Dy^l) definește câmpul de baze duale câmpului $(\frac{\delta}{\delta x^k}, \frac{\partial}{\partial y^l})$, unde

$$Dy^i = dy^i + \Gamma_{j0}^i dx^j.$$

Fie $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un câmp vectorial pe M . Lifturile orizontale și verticale ale lui ξ sunt definite, respectiv, de

$$\xi^H = \xi^i \frac{\delta}{\delta x^i}, \quad \xi^V = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

În particular avem $(\frac{\partial}{\partial x^i})^H = \frac{\delta}{\delta x^i}$ și $(\frac{\partial}{\partial x^i})^V = \frac{\partial}{\partial y^i}$.

În cele ce vor urma vom considera o nouă metrică riemanniană G pe T_0M . Aceasta este un caz singular al unei noi clase de metrici riemanniene cu ajutorul cărora se obțin noi structuri kähleriene pe T_0M . Această clasă a fost introdusă și studiată de V. Oproiu ([5, 6, 7, 8]). De asemeni, contribuții în această direcție a avut și N. Papaghiuc ([9, 5]).

Peste tot în acest capitol vom considera (M, g) o varietate riemanniană de curbura secțională constantă pozitivă c . Metrica G este definită de

$$(2.1) \quad G = G_{ij} dx^i dx^j + H_{ij} Dy^i Dy^j,$$

unde

$$G_{ij} = \sqrt{2ct} g_{ij} + \sqrt{\frac{c}{2t}} g_{i0} g_{j0}, \quad H_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2ct}} g_{ij} - \frac{1}{4t\sqrt{2ct}} g_{i0} g_{j0},$$

iar

$$t = \frac{1}{2} g_{00}, \quad g_{i0} = g_{ik} y^k, \quad g_{00} = g_{ij} y^i y^j.$$

Să notăm că proiecția canonică $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ nu este submersie riemanniană.

Notăm cu (G^{jk}) matricea inversă matricii (G_{ij}) și cu (H^{jk}) matricea inversă matricii (H_{ij}) . Ele sunt date de

$$G^{jk} = \frac{1}{\sqrt{2ct}} g^{jk} - \frac{1}{4t\sqrt{2ct}} y^j y^k, \quad H^{jk} = \sqrt{2ct} g^{jk} + \sqrt{\frac{c}{2t}} y^j y^k.$$

Să notăm că avem relația $H_{ij} = g_{il} G^{lk} g_{kj}$.

În [5] autorii au demonstrat că (T_0M, J, G) este o varietate kähleriană, unde

$$J\left(\frac{\delta}{\delta x^i}\right) = \left\{ \sqrt{2ct} \delta_i^k + \sqrt{\frac{c}{2t}} g_{i0} y^k \right\} \frac{\partial}{\partial y^k}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2ct}} \delta_i^k + \frac{1}{4t\sqrt{2ct}} g_{i0} y^k \right\} \frac{\delta}{\delta x^k},$$

iar conexiunea Levi-Civita ${}^G\nabla$ a lui G este dată de

$$(2.2) \quad \begin{cases} {}^G\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \left\{ -\frac{1}{4t} g_{i0} \delta_j^h - \frac{1}{4t} g_{j0} \delta_i^h + \frac{1}{8t^2} g_{i0} g_{j0} y^h \right\} \frac{\partial}{\partial y^h}, \\ {}^G\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \left\{ \frac{1}{4t} g_{ij} y^h + \frac{1}{4t} g_{i0} \delta_j^h - \frac{1}{8t^2} g_{i0} g_{j0} y^h \right\} \frac{\delta}{\delta x^h}, \\ {}^G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h} + \left\{ \frac{1}{4t} g_{ij} y^h + \frac{1}{4t} g_{j0} \delta_i^h - \frac{1}{8t^2} g_{i0} g_{j0} y^h \right\} \frac{\delta}{\delta x^h}, \\ {}^G\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\delta}{\delta x^h} - c \{ g_{ij} y^h + \delta_i^h g_{j0} \} \frac{\partial}{\partial y^h}. \end{cases}$$

Notăm că $T_pM - \{0\}$ este o subvarietate total geodezică a lui (T_0M, G) .

3. ARMONICITATEA PROIECȚIEI CANONICE π

Printr-un calcul direct, din (2.2) rezultă că forma a doua fundamentală a lui π este dată de

$$(3.1) \quad \begin{cases} \nabla d\pi(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}) = 0, \quad \nabla d\pi(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = 0, \\ \nabla d\pi(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = -\{\frac{1}{4t}g_{ij}y^h + \frac{1}{4t}g_{i0}\delta_j^h - \frac{1}{8t^2}g_{i0}g_{j0}y^h\}\frac{\partial}{\partial x^h}. \end{cases}$$

Propoziția 3.1. *Avem următoarele*

- a) *Aplicația $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ nu este total geodezică.*
- b) *Aplicația $\pi : (T_0M, G) \rightarrow (M, g)$ este armonică.*

Demonstrație. Punctul b) este imediat. Pentru a demonstra punctul a), presupunem că π este total geodezică. Atunci pentru orice $v \in T_0M$ avem $\nabla d\pi_v = 0$ și din ultima relație din (3.1) rezultă

$$|v|^2 g_{ij}v^h + |v|^2 v_i \delta_j^h = v_i v_j v^h.$$

Făcând acum contractia cu g^{ij} obținem

$$|v|^2 m v^h + |v|^2 v^h = |v|^2 v^h,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. \square

Fie acum $T_1M = \{v \in TM \mid |v| = 1\}$. T_1M este o subvarietate a lui T_0M orientabilă și de dimensiune $2m-1$. Notăm că dacă M este compactă atunci și T_1M este compactă. Câmpurile vectoriale $(Y_i, \frac{\delta}{\delta x^j})$ generează TT_1M , unde

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y^i} - g_{i0}C,$$

iar $C = y^j \frac{\partial}{\partial y^j}$ este câmpul vectorial Liouville. Pe T_1M avem

$$G(Y_i, C) = G(\frac{\delta}{\delta x^i}, C) = 0, \quad G(C, C) = \frac{1}{2\sqrt{c}}.$$

Notăm cu $\tilde{\nabla}$ conexiunea Levi-Civita pe T_1M indusă de conexiunea ${}^G\nabla$ și cu $\tilde{\pi} = \pi|_{T_1M}$. Calculând $\tilde{\nabla}_{Y_i}Y_j$, $\tilde{\nabla}_{Y_i}\frac{\delta}{\delta x^j}$, $\tilde{\nabla}_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j}$, cu ajutorul proiecției ortogonale, obținem expresia formei a doua fundamentale pentru $\tilde{\pi}$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \nabla d\tilde{\pi}(Y_i, Y_j) = 0, \quad \nabla d\tilde{\pi}(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}) = 0, \\ \nabla d\tilde{\pi}(Y_i, \frac{\delta}{\delta x^j}) = -\frac{1}{2}\{g_{ij}y^h - g_{i0}g_{j0}y^h\}\frac{\partial}{\partial x^h}. \end{cases}$$

Teorema 3.2. *Avem următoarele*

- a) *Aplicația $\tilde{\pi} : T_1M \rightarrow M$ nu este total geodezică.*
- b) *Aplicația $\tilde{\pi} : T_1M \rightarrow M$ este armonică.*

Observația 3.3. 1. Expresia lui $\nabla d\tilde{\pi}$ poate fi găsită și altfel, fără a folosi proiecția ortogonală. Pentru aceasta facem observația că $\tilde{\pi}$ poate fi scrisă sub forma $\tilde{\pi} = \pi \circ i$, unde $i : T_1M \rightarrow TM$ este incluziunea

canonică. Avem formula cunoscută pentru compunerea aplicațiilor (vezi de exemplu [2])

$$\nabla d\tilde{\pi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d\pi(\nabla d\tilde{i}(\tilde{X}, \tilde{Y})) + \nabla d\pi(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

$\forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in C(T_1M)$. Cum $\nabla d\tilde{i}(\tilde{X}, \tilde{Y})$ este coliniar cu C , formula de mai sus devine

$$\nabla d\tilde{\pi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \nabla d\pi(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

ceea ce permite calcularea lui $\nabla d\tilde{\pi}$.

2. Aplicațiile π și $\tilde{\pi}$ fiind submersii armonice, întrebarea naturală care se pune este dacă ele sunt și morfisme armonice. Răspunsul este negativ deoarece aceste aplicații nu sunt orizontal conforme. Într-adevăr, dacă π , sau $\tilde{\pi}$, ar fi orizontal conforme, atunci

$$\sqrt{2ct}g_{ij} + \sqrt{\frac{c}{2t}}g_{i0}g_{j0} = \lambda(x, y)g_{ij},$$

adică

$$\sqrt{\frac{c}{2t}}g_{i0}g_{j0} = \lambda(x, y)g_{ij} - \sqrt{2ct}g_{ij}.$$

Dar rangul matricii $(\sqrt{\frac{c}{2t}}g_{i0}g_{j0})$ este 1, în timp ce rangul matricii $((\lambda(x, y) - \sqrt{2ct})g_{ij})$ este 0 sau m .

Observația 3.4. Clasa de metrice introdusă și studiată de V. Oproiu se obține astfel.

Fie $u, v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții netede și considerăm

$$\tilde{G}_{ij} = u(t)g_{ij} + v(t)g_{i0}g_{j0}.$$

Notăm cu (\tilde{G}^{ij}) inversa matricii (\tilde{G}_{ij}) și presupunem că $u > 0$ și $u(t) + 2tv(t) > 0$. Atunci

$$\tilde{G} = \tilde{G}_{ij}dx^i dx^j + g_{ik}\tilde{G}^{kl}g_{lj}Dy^i Dy^j$$

este o metrică riemanniană pe TM .

Metrica G folosită în acest capitol se obține din metrica \tilde{G} pentru $v = u'$. Integrabilitatea structurii aproape complexe este echivalentă, în acest caz, cu faptul că (M, g) este de curbura secțională constantă c și $u(t) = \sqrt{2ct}$, iar cum u este o funcție netedă, eliminăm secțiunea nulă, i.e. se consideră T_0M .

Se observă că $\pi : (TM, \tilde{G}) \rightarrow (M, g)$ este orizontal conformă dacă și numai dacă $v = 0$. Acest caz, $v = 0$, a fost studiat separat de N. Papaghiuc în [9]. Notăm cu \tilde{G}_0 metrica obținută pentru $v = 0$. Printr-un calcul direct se obține

$$H^{\tilde{G}_0}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\partial}{\partial y^j} = 0, \quad H^{\tilde{G}_0}\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}}\frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^k\frac{\delta}{\delta x^k},$$

de unde rezultă că $\pi : (TM, \tilde{G}_0) \rightarrow (M, g)$ este armonică, și cum este și orizontal conformă, ea este un morfism armonic.

4. ARMONICITATEA CÂMPURILOR VECTORIALE UNITARE

Fie $\xi \in C(TM)$ un câmp vectorial pe M fără singularități, i.e. $\xi(p) \neq 0$, $\forall p \in M$. Astfel de câmpuri există dacă M nu este compactă, iar dacă M este compactă și orientabilă atunci existența unui câmp vectorial fără singularități este echivalentă cu anularea caracteristicii Euler-Poincaré a varietății.

Avem următorul rezultat privind dimensiunea lui M .

Propoziția 4.1. *Fie (M, g) o varietate riemanniană compactă, orientabilă, și de curbura secțională constantă $c > 0$. Atunci caracteristica sa Euler-Poincaré se anulează dacă și numai dacă $\dim M = m$ este impară.*

Demonstrație. Este cunoscut faptul că dacă dimensiunea lui M este impară, atunci caracteristica Euler-Poincaré se anulează (de exemplu vezi [3]).

Reciproc, presupunem prin reducere la absurd că dimensiunea lui M este pară. Atunci se știe că M este izometrică cu sfera \mathbb{S}^m (de exemplu vezi [1]). Dar în acest caz caracteristica Euler-Poincaré este 2, ceea ce reprezintă o contradicție. \square

În continuare vom presupune că dimensiunea lui M este impară și $|\xi| = 1$. Notăm că, deoarece curbura secțională a lui (M, g) este constantă nenulă, $|\xi| = 1$ implică $\nabla \xi \neq 0$.

Pentru început vom studia în ce condiții $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ este o imersie riemanniană. Ținând cont de relația

$$d\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} + (\nabla_i \xi^h) \frac{\partial}{\partial y^h}$$

obținem

Propoziția 4.2. *Aplicația $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ este imersie riemanniană dacă și numai dacă*

$$(4.1) \quad cg_{ij} + c\xi_i \xi_j + (\nabla_i \xi^h) g_{hl} (\nabla_j \xi^l) = \sqrt{c} g_{ij}.$$

Observația 4.3. Dacă ξ este imersie riemanniană, atunci făcând contractia cu g^{ij} , iar apoi cu ξ^i și ξ^j , obținem

$$|\nabla \xi|^2 = \sqrt{c}m - c(m+1), \quad |\nabla_\xi \xi|^2 = \sqrt{c} - 2c,$$

care implică

$$c \in \left(0, \frac{1}{4}\right].$$

Deci, dacă $c = 1$, atunci ξ nu poate fi o imersie riemanniană.

Propoziția 4.4. *Fie $\xi \in C(TM)$ un câmp Killing unitar. Atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0M, G)$ este o imersie riemanniană dacă și numai dacă $c = \frac{1}{4}$.*

Demonstrație. Ipoteza $|\xi| = 1$ implică

$$(\nabla_i \xi^h) \xi_h = (\nabla_i \xi_h) \xi^h = 0,$$

iar ipoteza ξ câmp Killing implică

$$\nabla_j \nabla_i \xi^h = c(g_{il} \delta_j^h - g_{ij} \delta_l^h) \xi^l.$$

Apoi, din relația $(\nabla_i \xi^h) \xi_h = 0$ rezultă

$$(\nabla_i \xi^h) g_{hk} (\nabla_j \xi^k) = -(\nabla_j \nabla_i \xi^h) \xi_h.$$

Ținând cont de cele de mai sus, rezultă că relația (4.1) este echivalentă cu

$$\begin{aligned} cg_{ij} + c\xi_i \xi_j - (\nabla_j \nabla_i \xi^h) \xi_h &= \sqrt{c} g_{ij} \Leftrightarrow \\ (c - \sqrt{c}) g_{ij} + c\xi_i \xi_j - \{c(g_{il} \delta_j^h - g_{ij} \delta_l^h) \xi^l\} \xi_h &= 0 \Leftrightarrow \\ (2c - \sqrt{c}) g_{ij} &= 0 \Leftrightarrow \\ c &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Observația 4.5. Exemple de câmpuri Killing unitare pot fi construite astfel. Fie $\mathbb{S}^{2k+1}(r)$ sfera euclidiană de rază r și fie $A \in O(2k+2)$ cu $A = -{}^t A$. Atunci câmpul vectorial definit prin $\xi(p) = \frac{1}{r} A p$, $\forall p \in \mathbb{S}^{2k+1}(r) \subset \mathbb{R}^{2k+2}$ este tangent la $\mathbb{S}^{2k+1}(r)$ și este Killing și unitar pe $\mathbb{S}^{2k+1}(r)$.

În continuare vom presupune că $c = \frac{1}{4}$.

Propoziția 4.6. *Dacă M este compactă și orientabilă, iar $\operatorname{div} \xi = 0$, atunci ξ este o imersie riemanniană dacă și numai dacă ξ este Killing.*

Demonstrație. Presupunem că ξ este Killing. Atunci din Propoziția 4.4 rezultă că ξ este imersie riemanniană.

Presupunem acum că ξ este imersie riemanniană. Ipoteza $|\xi| = 1$ implică

$$g(\operatorname{trace} \nabla^2 \xi, \xi) + |\nabla \xi|^2 = 0,$$

iar ipoteza ξ imersie riemanniană implică

$$|\nabla \xi|^2 = \frac{1}{4}(m-1), \text{ i.e. } |\nabla \xi|^2 = g(\operatorname{Ricci}(\xi), \xi).$$

Demonstrația se încheie folosind formula

$$\int_M \{-g(\operatorname{trace} \nabla^2 \xi + \operatorname{Ricci}(\xi), \xi) - \frac{1}{2} |L_\xi g|^2 + (\operatorname{div} \xi)^2\} v_g = 0,$$

care este valabilă pentru orice câmp vectorial (de exemplu vezi [10]). □

Vom studia acum în ce condiții $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0 M, G)$, sau $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este o aplicație total geodezică, sau armonică. Printr-un calcul direct se obține

$$\begin{aligned} \nabla d\xi \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \left\{ \nabla_i \nabla_j \xi^h - \frac{1}{4} (g_{ij} \xi^h + \delta_i^h \xi_j) \right\} \frac{\partial}{\partial y^h} + \\ (4.2) \quad &+ \frac{1}{2} \{ \nabla_j \xi_i + \nabla_i \xi_j \} \xi^h \frac{\delta}{\delta x^h}, \end{aligned}$$

și

$$\tau(\xi) = \{g^{ij}(\nabla_i \nabla_j \xi^h) - \frac{1}{4}(m+1)\xi^h\} \frac{\partial}{\partial y^h} + (\operatorname{div} \xi) \xi^h \frac{\delta}{\delta x^h},$$

sau

$$(4.3) \quad \tau(\xi) = \{\operatorname{trace} \nabla^2 \xi - \frac{1}{4}(m+1)\xi\}^V + (\operatorname{div} \xi) \xi^H.$$

Se știe că $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este o aplicație total geodezică dacă și numai dacă $\nabla d\xi(X, Y)$ este coliniar cu câmpul vectorial Liouville C pentru orice $X, Y \in C(TM)$, iar $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este armonică dacă și numai dacă $\tau(\xi)$ este coliniar cu C (de exemplu vezi [2]). Din (4.2) obținem

Propoziția 4.7. *Pentru aplicația ξ avem*

- a) $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0 M, G)$ nu este total geodezică.
- b) $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este total geodezică dacă și numai dacă ξ este Killing.

Din (4.3) rezultă

Teorema 4.8. *Pentru aplicația ξ avem*

- a) $\xi : (M, g) \rightarrow (T_0 M, G)$ nu este armonică.
- b) $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este armonică dacă și numai dacă

$$(4.4) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \xi = 0 \\ \operatorname{trace} \nabla^2 \xi + |\nabla \xi|^2 \xi = 0. \end{cases}$$

Observația 4.9. Dacă ξ este Killing, atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ este o aplicație armonică.

Observația 4.10. Proiecția canonică nu este submersie riemanniană, și am văzut că există câmpuri $\xi : M \rightarrow T_0 M$ care sunt imersii riemanniene dar nu sunt aplicații armonice (vezi Observația 2.3., capitolul precedent).

Propoziția 4.11. *Dacă M este compactă și orientabilă, iar $|\nabla \xi|^2 < \frac{1}{4}(m-1)$, atunci ξ nu este Killing și $\xi : (M, g) \rightarrow (T_1 M, G)$ nu este armonică.*

Demonstrație. Dacă ξ este Killing, atunci $|\nabla \xi|^2 = \frac{1}{4}(m-1)$. Presupunem că ξ este aplicație armonică. Atunci, din formula

$$\int_M \{-g(\operatorname{trace} \nabla^2 \xi + \operatorname{Ricci}(\xi), \xi) - \frac{1}{2}|L_{\xi}g|^2 + (\operatorname{div} \xi)^2\} v_g = 0,$$

obținem

$$\int_M \{|\nabla \xi|^2 - \frac{1}{4}(m-1)\} v_g = \frac{1}{2} \int_M |L_{\xi}g|^2 v_g \geq 0,$$

ceea ce reprezintă o contradicție. □

BIBLIOGRAFIE

- [1] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [2] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board of the Math. Sci. A.M.S., 50 (1983).
- [3] C. Godbillon, *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [4] C. Oniciuc, *Harmonic sections in the unitary tangent bundle*, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIV (2001), No. 3, 681-692.
- [5] V. Oproiu, N. Papaghiuc, *A Kaehler structure on the nonzero tangent bundle of a space form*, Differential Geometry and its Applications, 11, (1999), 1-12.
- [6] V. Oproiu, *A Locally Symmetric Kaehler Einstein Structure on the Tangent Bundle of a Space Form*, Contributions to Algebra and Geometry, 40, (1999), No. 2, 363-372.
- [7] V. Oproiu, *A Kaehler Einstein structure on the tangent bundle of a space form*, IJMMS, 25:3 (2001), 183-195.
- [8] V. Oproiu, *Some new geometric structures on the tangent bundle*, Publ. Math. Debrecen, 55/3-4 (1999), 261-281.
- [9] N. Papaghiuc, *Another Kaehler structure on the tangent bundle of a space form*, Demonstratio Mathematica, Vol. 31, F. 4, 1998, 855-866.
- [10] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian Geometry*, M. Dekker, New-York, 1970.
- [11] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundle*, M. Dekker, New-York, 1973.

CAPITOLUL IV

SECȚIUNI ARMONICE ÎN FIBRATUL TANGENT

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom continua cu studiul armonicității câmpurilor vectoriale și al proiecției canonice. Spre deosebire de cele două capitole anterioare, pe fibratul tangent TM al unei varietăți riemanniene (M, g) se va considera acum o metrică pseudo-riemanniană construită cu ajutorul unui câmp tensorial c de tip $(0, 2)$ pe M , simetric. Se obține că dacă c este tensorul Ricci al varietății (M, g) și ξ este un câmp Killing pe M , atunci ξ este o aplicație armonică.

Rezultatele prezentate aici sunt cuprinse în lucrarea **On the harmonic sections of tangent bundles**, de C. Oniciuc, *An. Univ. Buc.*, 1, 1998, 67-72.

2. O METRICĂ PSEUDO-RIEMANNIANĂ PE TM

Fie (M, g) o varietate riemanniană m -dimensională și TM fibratul ei tangent. Pe TM considerăm distribuția orizontală și cea verticală definită în capitolul precedent.

Fie c un câmp tensorial simetric de tip $(0, 2)$ pe M . Cu ajutorul acestuia putem defini o metrică pseudo-riemanniană G pe TM astfel

$$(2.1) \quad G(X^H, Y^H) = c(X, Y), \quad G(X^H, Y^V) = g(X, Y), \quad G(X^V, Y^V) = 0.$$

Dacă $c = 0$, atunci metrica G este liftul complet al lui g , i.e. $G = g^C$. Armonicitatea câmpurilor vectoriale $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, g^C)$ a fost studiată în [7]. De asemeni, metrica g^C a fost considerată în [4, 6, 10] pentru a se studia armonicitatea câmpurilor tensoriale de tip $(1, 1)$ pe M , câmpuri privite ca aplicații de la (TM, g^C) în (TM, g^C) , cu diverse aplicații.

Dacă $c = c_{ij}dx^i dx^j$ este exprimarea în coordonate locale pentru c , atunci G este dat de

$$G = c_{ij}dx^i dx^j + 2g_{ij}Dy^i dx^j.$$

Matricea asociată lui G este dată de

$$\begin{pmatrix} c_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

iar signatura ei este (n, n) .

Printr-un calcul direct obținem

Propoziția 2.1. *Conexiunea Levi-Civita ${}^G\nabla$ a lui G este dată de*

$$(2.2) \quad \begin{cases} {}^G\nabla_{X^V} Y^V = 0, \quad {}^G\nabla_{X^V} Y^H = 0, \quad {}^G\nabla_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V \\ {}^G\nabla_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H + A(X^H, Y^H), \end{cases}$$

unde A este o aplicație biliniară de la HTM la VTM ce are exprimarea în coordonate locale dată de

$$A\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}\right) = A_{ij}^h \frac{\partial}{\partial y^h}, \quad A_{ij}^h = \frac{1}{2}(\nabla_i c_j^h + \nabla_j c_i^h - \nabla^h c_{ij}) + y^k R_{jki}^h.$$

Am notat $c_i^j = c_{il}g^{lj}$, $\nabla^h c_{ij} = g^{kh}\nabla_k c_{ij}$, iar R_{ijk}^l sunt componentele locale ale tensorului de curbura R al lui ∇ .

Propoziția 2.2. *Tensorul de curbura K al lui ${}^G\nabla$ este dat de*

$$(2.3) \quad \begin{cases} K(X^V, Y^V)Z^V = K(X^V, Y^V)Z^H = K(X^V, Y^H)Z^V = 0, \\ K(X^V, Y^H)Z^H = (R(X, Y)Z)^V, \quad K(X^H, Y^H)Z^V = (R(X, Y)Z)^V \\ K(X^H, Y^H)Z^H = (R(X, Y)Z)^H + B(X^H, Y^H, Z^H), \end{cases}$$

unde B este o aplicație 3-liniară de la HTM la VTM cu exprimarea în coordonate locale dată de

$$B\left(\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\delta}{\delta x^j}, \frac{\delta}{\delta x^k}\right) = B_{ijk}^l \frac{\partial}{\partial y^l},$$

iar

$$B_{ijk}^l = y^s \nabla_s R_{kij}^l + \frac{1}{2} \{ \nabla_i (\nabla_k c_j^l - \nabla^l c_{jk}) - \nabla_j (\nabla_k c_i^l - \nabla^l c_{ik}) + c_k^h R_{hij}^l - c_h^l R_{kij}^h \}.$$

Rezultă că ${}^G\nabla$ este plată dacă și numai dacă ∇ este plată și c satisface condiția

$$(2.4) \quad \nabla_i (\nabla_k c_{jl} - \nabla_l c_{jk}) - \nabla_j (\nabla_k c_{il} - \nabla_l c_{ik}) = 0.$$

Tensorul c se numește tensor Codazzi dacă

$$(\nabla_X c)(Y, Z) = (\nabla_Y c)(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in C(TM).$$

Prin urmare, dacă c este paralel, i.e. $\nabla c = 0$, sau dacă c este un tensor Codazzi pe M , atunci condiția (2.4) este îndeplinită.

3. ARMONICITATEA PROIECȚIEI CANONICE ȘI A CÂMPURILOR VECTORIALE

Din (2.1) și (2.2) obținem

$$\nabla d\pi(X^V, Y^V) = \nabla d\pi(X^V, Y^H) = \nabla d\pi(X^H, Y^H) = 0,$$

de unde rezultă

Teorema 3.1. *Proiecția canonică $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g)$ este total geodezică și deci armonică.*

Fie $\xi \in C(TM)$. În continuare vom gândi acest câmp ca o aplicație de la M la TM și vom studia proprietățile acestuia legate de armonicitate.

Propoziția 3.2. *Un câmp vectorial $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ definește o imersie riemanniană dacă și numai dacă*

$$(3.1) \quad g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) = g(X, Y) - c(X, Y).$$

Demonstrație. Demonstrația rezultă din

$$d\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\delta}{\delta x^i} + (\nabla_i \xi^j) \frac{\partial}{\partial y^j}, \text{ sau } d\xi(X) = X^H + (\nabla_X \xi)^V.$$

□

Observația 3.3. Dacă $c = g$, atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o imersie riemanniană dacă și numai dacă ξ este câmp Killing.

Din (3.1), prin derivare covariantă, se obține

$$(3.2) \quad \nabla_i \nabla_j \xi^k = -\xi^h R_{jhi}^k + \frac{1}{2}(\nabla^k c_{ij} - \nabla_i c_j^k - \nabla_j c_i^k).$$

Considerând condiția de completă integrabilitate a sistemului de ecuații cu derivate parțiale (3.1) cu consecința (3.2), obținem

$$\begin{aligned} & (\nabla_h \xi_i - \nabla_i \xi_h) R_{jkl}^h - (\nabla_h \xi_j - \nabla_j \xi_h) R_{ikl}^h + (\nabla_h \xi_k - \nabla_k \xi_h) R_{lij}^h - \\ & - (\nabla_h \xi_l - \nabla_l \xi_h) R_{kij}^h = 2\xi^h \nabla_h R_{ijkl} + 2R_{ijkl} - \\ & - c_{ih} R_{jkl}^h + c_{jh} R_{ikl}^h + \nabla_i (\nabla_l c_{jk} - \nabla_k c_{jl}) - \nabla_j (\nabla_l c_{ik} - \nabla_k c_{il}), \end{aligned}$$

unde $\xi_i = \xi^j g_{ij}$, iar R_{ijkl} sunt componentele locale ale tensorului Riemann-Christoffel.

Rezultă că, sub condiția de completă integrabilitate, (M, g) trebuie să aibă curbura secțională constantă și tensorul c trebuie să satisfacă următorul sistem de ecuații cu derivate parțiale

$$\nabla_i (\nabla_k c_{jl} - \nabla_l c_{jk}) - \nabla_j (\nabla_k c_{il} - \nabla_l c_{ik}) + c_{ih} R_{jkl}^h - c_{jh} R_{ikl}^h = 2R_{ijkl}.$$

Notăm că $c = g$ satisface acest sistem.

Dacă considerăm c dat de

$$c(X, Y) = g(X, Y) - g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X),$$

obținem

Propoziția 3.4. *Pentru orice $\xi \in C(TM)$ există G o metrică pseudo-Riemanniană de tip (2.1) astfel încât $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o imersie riemanniană.*

Pentru forma a doua fundamentală a lui $\xi : M \rightarrow TM$ obținem expresia

$$(3.3) \quad \nabla d\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \{\nabla_i \nabla_j \xi^h + \xi^k R_{jki}^h + \frac{1}{2}(\nabla_i c_j^h + \nabla_j c_i^h - \nabla^h c_{ij})\} \frac{\partial}{\partial y^h}.$$

Din (3.2) rezultă

Teorema 3.5. *Dacă $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o imersie riemanniană atunci ξ este o aplicație total geodezică.*

Observația 3.6. Am obținut același tip de rezultat ca în cazul riemannian (vezi Capitolul 2, Teorema 2.1.)

Corolarul 3.7. *Dacă $c = g$ și ξ este un câmp Killing, atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este o aplicație total geodezică, și deci armonică.*

Câmpul de tensiune al lui $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este dat de

$$(3.4) \quad \tau(\xi) = \{g^{ij}\nabla_i\nabla_j\xi^h + \xi^k R_k^h + g^{kh}(\nabla_i c_k^i - \frac{1}{2}\nabla_k(\text{trace } c))\} \frac{\partial}{\partial y^h}.$$

Se știe că un câmp tensorial de tip $(0, 2)$ simetric pe M este armonic în raport cu metrica g dacă

$$-\nabla_i c_k^i + \frac{1}{2}\nabla_k(\text{trace } c) = 0$$

(de exemplu vezi [2]), iar $\xi \in C(TM)$ este un câmp geodezic dacă

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\xi^h + R_k^h\xi^k = 0.$$

Desigur, orice câmp Killing este geodezic.

Cum tensorul Ricci este armonic în raport cu g , din (3.4) rezultă

Teorema 3.8. *Dacă c este un câmp tensorial armonic de tip $(0, 2)$ pe M , atunci $\xi : (M, g) \rightarrow (TM, G)$ este armonică dacă și numai dacă ξ este un câmp geodezic.*

Corolarul 3.9. *Avem*

- *dacă $c = \text{Ricci}$, atunci ξ este armonică dacă și numai dacă ξ este câmp geodezic,*
- *dacă $c = \text{Ricci}$ și ξ este câmp Killing, atunci ξ este armonică.*

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, A. Sanini, *Metrische armoniche indotte da campi vettoriali*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 57 (2), (1987), 123-130.
- [2] B.Y. Chen, T. Nagano, *Harmonic metrics, harmonic tensor and Gauss maps*, J. Math. Soc. Japan 36 (2) (1984), 295-313.
- [3] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board of the Math. Sci. A.M.S. 50 (1983), 85 pp.
- [4] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Harmonic endomorphism fields*, Illinois J. Math. 41 (1997), 23-30.
- [5] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Tangent bundles of order r and harmonicity of induced maps*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 11-A (1997), 809-813.
- [6] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Harmonic connections*, Acta Sci. Math. (Szeged) 62 (1996), 583-607.
- [7] O. Nouhaud, *Applications harmoniques d'une variété riemannienne dans son fibré tangent. Généralisation*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 284 (1977), 815-818.

- [8] C. Oniciuc, *On the harmonic sections of tangent bundles*, An. Univ. Buc., 1, 1998, 67-72.
- [9] V. Oproiu, *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 59 (2), (1989), 177-184.
- [10] Ph. Tondeur, L. Vanhecke, *Harmonicity of a foliation and of an associated map*, Bull. Austral. Math. Soc. 54, (1996), 241-246.
- [11] K. Yano, T. Nagano, *On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian space*, Comment. Math. Helv. 35 (1), (1961), 55-64.
- [12] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, M. Dekker, New York 1973.

CAPITOLUL V

APLICAȚII BIARMONICE. GENERALITĂȚI

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom demonstra formula de caracterizare a aplicațiilor biarmonice între varietăți riemanniene (Teorema 2.2) și vom prezenta câteva teoreme de non-existență pentru aplicațiile biarmonice și non-armonice. De asemenea, vom formula și o coniectură privind echivalența dintre aplicațiile biarmonice și cele armonice atunci când spațiul de sosire are curbura secțională negativă.

2. FORMULA DE CARACTERIZARE PENTRU APLICAȚII BIARMONICE

Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație între două varietăți riemanniene. În această secțiune vom presupune că M este compactă și orientabilă.

Câmpul de tensiune al lui ϕ este dat de $\tau(\phi) = \text{trace } \nabla d\phi$, iar *bienergia* lui ϕ este definită de

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g.$$

Definiția 2.1. O aplicație ϕ este *biarmonică* dacă ea este un punct critic al funcționalei bienergiei E_2 .

Teorema 2.2. O aplicație ϕ este *biarmonică* dacă și numai dacă

$$(2.1) \quad \tau_2(\phi) = -\Delta\tau(\phi) - \text{trace } R^N(d\phi \cdot, \tau(\phi))d\phi \cdot = 0.$$

Această teoremă a fost dată R. Caddeo și V. Oproiu, rezultat nepublicat, și de G.Y. Jiang în [10, 11], 1986. Vom prezenta aici o variantă mai scurtă a demonstrației lui Jiang, urmărind demonstrația dată de D.M. Duc și J. Eells în [8].

Demonstrație. Fie $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ o variație unu-parametrică a lui ϕ , i.e. fie aplicația

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow N, \quad \Phi(t, p) = \phi_t(p) = \phi_p(t),$$

$\Phi(0, p) = \phi_0(p) = \phi(p)$, $\forall p \in M$. Variației $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ îi corespunde câmpul variațional $V = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0) \in C(\phi^{-1}TN)$ dat de

$$V(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)_{\phi(p)} \in T_{\phi(p)}N, \quad \forall p \in M.$$

Reciproc, dat $V \in C(\phi^{-1}TN)$, lui îi corespunde variația

$$\Phi(p, t) = \phi_t(p) = \phi_p(t) = \exp_{\phi(p)} tV(p),$$

a cărei câmp variațional este tocmai V .

Data o variație unu-parametrică a lui ϕ vom demonstra că

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\phi_t) = \frac{1}{2} \int_M \langle \tau_2(\phi), V \rangle v_g,$$

și teorema va fi astfel demonstrată. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\phi_t) &= \frac{1}{2} \int_M \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \tau(\phi_t), \tau(\phi_t) \rangle \right\} \Big|_{t=0} v_g \\ &= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \tau(\phi_t), \tau(\phi_t) \rangle \Big|_{t=0} v_g. \end{aligned}$$

Fie acum $\{X_i\}_{i=1}^m$ o bază geodezică în $p \in M$. Pe domeniul de definiție al acestui câmp de repere avem

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \tau(\phi_t) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \left[\sum_{i=1}^m (\nabla d\Phi(X_i, X_i)) \right] \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} [(\nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi)(X_i)] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(X_i) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(\nabla_{X_i} X_i) \right\}. \end{aligned}$$

Reamintim că dat $Z \in C(TM)$ avem relația

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(Z) &= \nabla_Z^{\Phi^{-1}TN} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + d\Phi\left[\frac{\partial}{\partial t}, Z\right] \\ &= \nabla_Z^{\Phi^{-1}TN} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \end{aligned}$$

deci, în p , obținem

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \tau(\phi_t) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(X_i) - \nabla_{\nabla_{X_i} X_i}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(X_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}^{\Phi^{-1}TN} d\Phi(X_i) + \nabla_{[\frac{\partial}{\partial t}, X_i]} d\Phi(X_i) \right. \\ &\quad \left. + R\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_i\right) d\Phi(X_i) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} \nabla_{X_i}^{\Phi^{-1}TN} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + R^N\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}, d\Phi(X_i)\right) d\Phi(X_i) \right\} \end{aligned}$$

Folosind acum simetria operatorului Δ și a tensorului Riemann-Christoffel, încheiem

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} E_2(\phi_t) &= \int_M \langle \text{trace } \nabla dV - \text{trace } R^N(d\phi \cdot, V)d\phi \cdot, \tau(\phi) \rangle v_g \\ &= \int_M \langle -\Delta V - \text{trace } R^N(d\phi \cdot, V)d\phi \cdot, \tau(\phi) \rangle v_g \\ &= \int_M \langle V, -\Delta \tau(\phi) - \text{trace } R^N(d\phi \cdot, \tau(\phi))d\phi \cdot \rangle v_g. \end{aligned}$$

□

Observația 2.3. Din formula de caracterizare putem face câteva observații imediate asupra aplicațiilor biarmonice:

- (A) ϕ este biarmonică dacă și numai dacă $\tau(\phi) \in \ker J$, unde J este operatorul Jacobi corespunzător lui ϕ ;
- (B) o aplicație armonică este biarmonică;
- (C) o aplicație armonică este un minim absolut pentru funcționala bi-energiei.

Observația 2.4. Dacă M nu este compactă și orientabilă, spunem că ϕ este biarmonică dacă ea satisface (2.1).

3. REZULTATE DE NON-EXISTENȚĂ

În continuare vom prezenta câteva rezultate privind non-existența aplicațiilor biarmonice și non-armonice. Vom începe cu un rezultat de unică prelungire.

Teorema 3.1 ([1]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație biarmonică. Dacă ϕ este armonică pe o submulțime deschisă U a lui M , atunci ϕ este armonică.*

Demonstrație. Demonstrația va rezulta din următorul rezultat general privind operatorii tari eliptici:

Teorema 3.2 ([13]). *Fie $V(M)$ un fibrat vectorial riemannian peste M și fie L o secțiune în $\text{Hom}(V(M), V(M))$. Presupunem că L este simetric în fiecare punct. Atunci $-\Delta + L$ este un operator tare eliptic și are unicitate în problema Cauchy în fiecare punct $p \in M$; i.e. dacă σ satisface $-\Delta(\sigma) + L(\sigma) = 0$ și $\sigma|_U = 0$, unde U este o submulțime deschisă, atunci $\sigma = 0$.*

În cazul nostru $L(\rho) = -\text{trace } R^N(d\phi, \rho)d\phi$ și $\sigma = \tau(\phi)$, iar L este un operator simetric:

$$\begin{aligned} \langle L(\rho_1), \rho_2 \rangle &= \langle \text{trace } R^N(\rho_1, d\phi)d\phi, \rho_2 \rangle = \sum_{i=1}^m \langle R^N(\rho_1, d\phi(X_i))d\phi(X_i), \rho_2 \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m R^N(\rho_1, d\phi(X_i), \rho_2, d\phi(X_i)) = \sum_{i=1}^m R^N(\rho_2, d\phi(X_i), \rho_1, d\phi(X_i)) \\ &= \sum_{i=1}^m \langle R^N(\rho_2, d\phi(X_i))d\phi(X_i), \rho_1 \rangle \\ &= \langle L(\rho_2), \rho_1 \rangle. \end{aligned}$$

□

Corolarul 3.3. *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație biarmonică. Dacă ϕ este constantă pe o submulțime deschisă U a lui M , atunci ϕ este constantă.*

Teorema 3.4 ([10, 11]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$. Presupunem că M compactă și orientabilă, iar $\text{Riem}^N \leq 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică.*

Demonstrație. Presupunem că ϕ este biarmonică, i.e. $\tau_2(\phi) = 0$. Din $\tau_2(\phi) = 0$ obținem

$$\begin{aligned} \langle \Delta\tau(\phi), \tau(\phi) \rangle &= \sum_{i=1}^m \langle R^N(\tau(\phi), d\phi(X_i))d\phi(X_i), \tau(\phi) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m R^N(\tau(\phi), d\phi(X_i), \tau(\phi), d\phi(X_i)) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Înlocuind în formula lui Weitzenböck

$$\frac{1}{2}\Delta|\tau(\phi)|^2 = \langle \Delta\tau(\phi), \tau(\phi) \rangle - |d\tau(\phi)|^2,$$

obținem $\frac{1}{2}\Delta|\tau(\phi)|^2 \leq 0$ și cum M este compactă, din principiul de maxim, rezultă că $d\tau(\phi) = 0$. Integrând obținem

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \langle d\tau(\phi), d\phi \rangle v_g = \int_M \langle \tau(\phi), d^*d\phi \rangle v_g \\ &= - \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g, \end{aligned}$$

și deci ϕ este armonică. □

Renunțând la ipoteza M compactă și orientabilă putem enunța

Propoziția 3.5 ([12]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o imersie riemanniană cu $|\tau(\phi)| = \text{constant}$. Presupunem că $\text{Riem}^N \leq 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică.*

Demonstrație. Presupunem că $\tau_2(\phi) = 0$. Din formula lui Weitzenböck, cum $|\tau(\phi)| = \text{constant}$ și $\text{Riem}^N \leq 0$, rezultă că $d\tau(\phi) = 0$. Demonstrația se încheie folosind următorul rezultat

Lema 3.6. *Dacă $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este o imersie riemanniană, atunci*

$$-|\tau(\phi)|^2 = \langle d\phi, d\tau(\phi) \rangle .$$

Vom da o demonstrație directă a acestei leme. Deoarece ϕ este o imersie riemanniană, avem

$$\langle d\phi(X), \tau(\phi) \rangle = 0, \quad \forall X \in C(TM),$$

și derivând obținem

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_Y d\phi(X), \tau(\phi) \rangle + \langle d\phi(X), \nabla_Y \tau(\phi) \rangle \\ &= \langle \nabla d\phi(Y, X) + d\phi(\nabla_Y X), \tau(\phi) \rangle + \langle d\phi(X), \nabla_Y \tau(\phi) \rangle \\ &= \langle \nabla d\phi(Y, X), \tau(\phi) \rangle + \langle d\phi(X), d\tau(\phi)(Y) \rangle . \end{aligned}$$

Considerăm $Y = X = X_i$ și prin sumare se obține

$$-|\tau(\phi)|^2 = \sum_{i=1}^m \langle d\phi(X_i), d\tau(\phi)(X_i) \rangle = \langle d\phi, d\tau(\phi) \rangle .$$

□

Observația 3.7. Lema de mai sus poate fi dedusă și din următoarea relație.

Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ și considerăm 1-forma σ cu valori reale definită de

$$\sigma(X) = \langle d\phi(X), \tau(\phi) \rangle .$$

Printr-un calcul direct se arată că

$$-d^* \sigma = |\tau(\phi)|^2 + \langle d\phi, d\tau(\phi) \rangle$$

(vezi [6]). Dacă ϕ este o imersie riemanniană, atunci $\sigma = 0$ și obținem relația dorită.

Slăbind condiția $\text{Riem}^N \leq 0$ putem formula

Teorema 3.8 ([12]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o imersie riemanniană. Presupunem că M este compactă și orientabilă, $\text{Ricci}^N \leq 0$ iar $m = n - 1$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă ϕ este armonică.*

Demonstrație. Deoarece ϕ este o imersie riemanniană și $m = n - 1$, obținem

$$\text{trace } R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi = \sum_{i=1}^m R^N(d\phi(X_i), \tau(\phi)), d\phi(X_i) = -\text{Ricci}^N(\tau(\phi)).$$

Teorema rezultă urmând același raționament ca demonstrația Teoremei 3.4.

□

Propoziția 3.9 ([12]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o imersie riemanniană cu $|\tau(\phi)| = \text{constant}$. Presupunem că $m = n - 1$ și $\text{Ricci}^N \leq 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică.*

Propoziția 3.10 ([12]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație cu proprietatea că există $p \in M$ astfel încât $\text{rank } \phi(p) \geq 2$ și $|\tau(\phi)| = \text{constant}$. Presupunem că $\text{Riem}^N < 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică.*

Demonstrație. Presupunem că ϕ este biarmonică. Din nou, folosind formula lui Weitzenböck, obținem

$$R^N(\tau(\phi), d\phi(X_i), \tau(\phi), d\phi(X_i)) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

unde $\{X_i\}_{i=1}^m$ este o bază geodezică în $p \in M$. Presupunem că $\tau(\phi)(p) \neq 0$; atunci, cum $\text{Riem}^N < 0$, rezultă $\tau(\phi)(p) \parallel d\phi_p(X_i), \forall i$, i.e. $\text{rank } \phi(p) \leq 1$. Deci $\tau(\phi)(p) = 0$ și cum $|\tau(\phi)| = \text{constant}$, demonstrația se încheie. \square

Vom încheia acest capitol prezentînd cazul subvarietăților în \mathbb{R}^n .

Fie M o subvarietate a lui \mathbb{R}^n și $\mathbf{i} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ incluziunea canonică. Distingem două cazuri:

- (A) M este compactă și orientabilă. În acest caz M nu poate fi biarmonică,
 (B) M nu este compactă și orientabilă. În acest caz $\tau(\mathbf{i}) = mH$, unde H este vectorul curbura medie și avem două subcazuri:

- $|H| = \text{constant}$ și atunci, conform Propoziției 3.5, M este biarmonică dacă și numai dacă este minimală, i.e. $H = 0$,
- $|H| \neq \text{constant}$. Scriem $H = H^1 e_1 + \dots + H^n e_n$, unde $H^i \in C^\infty(M), \forall i = 1, \dots, n$, și cum $\nabla_X e_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$ și $\forall X \in C(TM)$, obținem

$$\tau_2(\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow \Delta H^i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Vom prezenta acum câteva rezultate de non-existența a subvarietăților biarmonice și non-armonice în \mathbb{R}^n date de B.Y. Chen, I. Dimitric, T. Hasanis și T. Vlachos.

Teorema 3.11 ([3]). *Fie M o suprafață în \mathbb{R}^3 . Atunci ea este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Teorema 3.12 ([4]). *Fie M o subvarietate pseudo-umbilicală în \mathbb{R}^n , cu $m \neq 4$. Atunci M este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Teorema 3.13 ([9]). *Fie M o hipersuprafață în \mathbb{R}^4 . Atunci ea este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Teorema 3.14 ([2]). *Fie M o subvarietate în \mathbb{R}^n astfel încât $M \subset \mathbb{S}^{n-1}$. Atunci M nu poate fi biarmonică în \mathbb{R}^n .*

Observația 3.15. Acest rezultat arată că este mai interesant să cercetăm subvarietățile biarmonice în \mathbb{S}^{n-1} și nu în \mathbb{R}^n .

Observația 3.16. Rezultatele de mai sus sugerează:

Conjectura lui Chen Generalizată: *Singurele subvarietăți biarmonice ale unei varietăți N cu $\text{Riem}^N \leq 0$ sunt cele armonice.*

Deci pentru a studia subvarietățile biarmonice și non armonice vom considera spații ambiante de curbura secțională **pozitivă**.

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, va apărea în Israel J. Math., 2002.
- [2] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. math. 17 (1991), 169-188.
- [3] B.Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math. 52, 1998, pp. 167-185.
- [4] I. Dimitric, *Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 (1992), 53-65.
- [5] J. Eells, J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. 86 (1964), 109-160.
- [6] J. Eells, L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1-68.
- [7] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50, (1983).
- [8] D.M. Duc, J. Eells, *On the regularity of biharmonic maps*, International Centre for Theoretical Physics, 1993, 410.
- [9] T. Hasanis, T. Vlachos, *Hypersurfaces in E^4 with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. 172 (1995), 145-169.
- [10] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.
- [11] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [12] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi. Mat. (N.S.).
- [13] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.

CAPITOLUL VI

SUBVARIETĂȚI BIARMONICE ÎN \mathbb{S}^3

1. INTRODUCERE

După cum a fost sugerat în capitolul precedent, vom începe studiul subvarietăților biarmonice în spații de curbura secțională pozitivă. Vom alege cel mai simplu caz, i.e. studiul subvarietăților biarmonice în \mathbb{S}^3 , sfera euclidiană 3-dimensională de rază 1, care are curbura secțională pozitivă constantă 1.

În acest capitol vom da clasificarea tuturor subvarietăților biarmonice și non-armonice ale lui \mathbb{S}^3 . Ele sunt

- dacă $m = 1$, atunci M este fie un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$, fie un anumit tip de elice sferică (Theorem 2.3);
- dacă $m = 2$, atunci M este o hipersferă $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$ (Theorem 3.9).

Această clasificare a fost dată în lucrarea **Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3** , *International Journal of Mathematics*, Vol. 12 (2001), no. 8, 867-876, scrisă în colaborare cu R. Caddeo și S. Montaldo.

2. CURBE BIARMONICE ÎN \mathbb{S}^3

Fie (N^3, h) o varietate riemanniană 3-dimensională, orientabilă, de curbura secțională constantă K și fie $\gamma : I \rightarrow (N^3, h)$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Considerăm $\{T, N, B\}$ reperul lui Frenet asociat curbei γ și avem următoarele ecuații ale lui Frenet

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \nabla_T T &= k_g N \\ \nabla_T N &= -k_g T + \tau_g B \\ \nabla_T B &= -\tau_g N \end{aligned}$$

unde $T = \gamma'$, $k_g = |\tau(\gamma)| = |\nabla_T T|$ este curbura geodezică, τ_g este torsiunea geodezică, iar $\{T, N, B\}$ este pozitiv orientat. Folosind ecuațiile lui Frenet scriem ecuația Euler-Lagrange pentru bienergie:

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, k_g N)T \\ &= (-3k_g k_g')T + (k_g'' - k_g^3 - k_g \tau_g^2 + k_g K)N + (2k_g' \tau_g + k_g \tau_g')B \\ &= 0; \end{aligned}$$

am folosit $R(T, k_g N)T = -k_g K N$. Rezultă că γ este biarmonică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} k_g k_g' = 0 \\ k_g'' - k_g^3 - k_g \tau_g^2 + k_g K = 0 \\ 2k_g' \tau_g + k_g \tau_g' = 0, \end{cases}$$

și deci γ este biarmonică și non-geodezică, i.e. $k_g \neq 0$, dacă și numai dacă

$$(2.2) \quad \begin{cases} k_g = \text{constant} \neq 0 \\ k_g^2 + \tau_g^2 = K \\ \tau_g = \text{constant}. \end{cases}$$

În funcție de semnul curburii secționale K concluzionăm

Propoziția 2.1. *Fie $\gamma : I \rightarrow (N^3, h)$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc, unde (N^3, h) este o varietate riemanniană orientabilă, 3-dimensională, de curbura secțională constantă K . Avem*

- (A) *dacă $K \leq 0$, atunci γ este biarmonică dacă și numai dacă este geodezică;*
- (B) *dacă $K > 0$ și γ este biarmonică și non-geodezică, atunci ea este o elice, i.e. $k_g = \text{constant}$ și $\tau_g = \text{constant}$, iar $k_g \in (0, K]$.*

Vom clasifica acum curbele biarmonice și non-geodezice în \mathbb{S}^3 . Pentru aceasta vom obține mai întâi ecuația de caracterizare pentru astfel de curbe.

Propoziția 2.2. *Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Atunci ea este biarmonică în \mathbb{S}^3 dacă și numai dacă, privită ca o curbă în \mathbb{R}^4 , satisface ecuația*

$$(2.3) \quad \gamma^{IV} + 2\gamma'' + (1 - k_g^2)\gamma = 0,$$

unde k_g este curbura geodezică a lui γ în \mathbb{S}^3 .

Demonstrație. Din ecuația lui Gauss pentru $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ rezultă că pentru orice câmp vectorial X în lungul lui γ , tangent la \mathbb{S}^3 , avem

$$\nabla_T X = X' + \langle T, X \rangle \gamma.$$

Prin urmare obținem

$$\tau(\gamma) = \nabla_T T = \gamma'' + \gamma, \quad \nabla_T \tau(\gamma) = \gamma''' + \gamma' + \langle T, \tau(\gamma) \rangle \gamma = \gamma''' + \gamma',$$

iar

$$\nabla_T \nabla_T \tau(\gamma) = \gamma^{IV} + \gamma'' + \langle T, \nabla_T \tau(\gamma) \rangle \gamma = \gamma^{IV} + \gamma'' - k_g^2 \gamma.$$

Înlocuind acum în ecuația biarmonică obținem (2.3). \square

Din Propoziția 2.1 B) și din Propoziția 2.2, prin integrarea ecuației (2.3) obținem

Teorema 2.3. *Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ o curbă biarmonică non-geodezică parametrizată prin lungimea de arc. Atunci k_g este constantă, $k_g \in (0, 1]$, și avem două cazuri:*

- (A) *$k_g = 1$, și γ este un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$;*
- (B) *$0 < k_g < 1$, și γ este o elice sferică; mai exact, ea este o geodezică în torul lui Clifford $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$.*

Demonstrație. Dacă $k_g = 1$, atunci soluția generală a ecuației (2.3) este

$$\gamma(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t) + c_3 t + c_4.$$

Cum $|\gamma|^2 = 1$ și $|\gamma'|^2 = 1$, obținem $c_3 = 0$, c_1, c_2, c_4 sunt vectori constanți și ortogonali între ei, iar $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$. Deci, pâna la o izometrie a lui \mathbb{S}^3 , curba γ este dată de

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}, d_1, d_2 \right),$$

unde $d_1^2 + d_2^2 = \frac{1}{2}$. Prin urmare γ este un cerc de rază $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dacă $0 < k_g < 1$, soluția generală a ecuației (2.3) este

$$\gamma(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) + c_3 \cos(bt) + c_4 \sin(bt),$$

unde

$$a = \sqrt{1 + k_g}; \quad b = \sqrt{1 - k_g}.$$

Din nou, cum $|\gamma|^2 = 1$ și $|\gamma'|^2 = 1$, rezultă că vectorii $c_i, i = 1, \dots, 4$ sunt ortogonali între ei, iar $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$. Soluția este atunci

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos(at)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(at)}{\sqrt{2}}, \frac{\cos(bt)}{\sqrt{2}}, \frac{\sin(bt)}{\sqrt{2}} \right),$$

care reprezintă o geodezică în torul lui Clifford $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$. \square

3. SUPRAFETE BIARMONICE ÎN \mathbb{S}^3

În această secțiune vom studia suprafețele biarmonice în \mathbb{S}^3 . Primele rezultate sunt valabile și pentru dimensiuni mai mari, așa că vom păstra generalitatea.

Fie M o subvarietate a lui \mathbb{S}^n de dimensiune m și fie $\mathbf{i} : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ incluziunea canonică. Notăm cu B forma a doua fundamentală a subvarietății $M \subset \mathbb{S}^n$, cu A operatorul Weingarten, cu H câmpul vectorial curbura medie al lui M , cu ∇^\perp conexiunea normală și cu Δ^\perp laplacianul în fibratul normal al lui $M \subset \mathbb{S}^n$.

Atunci avem

Teorema 3.1 ([9]). *Aplicația \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă*

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\perp H - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) + mH & = 0 \\ 2 \text{trace } A_{\nabla(\cdot)_H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) & = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Cum

$$\text{trace } R^{\mathbb{S}^n}(d\mathbf{i}, \tau(\mathbf{i}))d\mathbf{i} = -m\tau(\mathbf{i}),$$

aplicația \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă

$$(3.2) \quad \tau_2(\mathbf{i}) = \text{trace } \nabla d\tau(\mathbf{i}) + m\tau(\mathbf{i}) = m\{\text{trace } \nabla dH + mH\} = 0.$$

Pentru a demonstra teorema, fie $\{x^i\}_{i=1}^m$ un sistem de coordonate normale în jurul unui punct arbitrar $p \in M$. Notăm $e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, și în p avem

$$\begin{aligned} \text{trace } \nabla dH &= \sum_{i=1}^m \nabla_{e_i}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{e_i}^{\mathbb{S}^n} H = \sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^{\mathbb{S}^n} [\nabla_{e_i}^\perp H - A_H(e_i)] \} \\ &= \sum_{i=1}^m \{ \nabla_{e_i}^\perp \nabla_{e_i}^\perp H - A_{\nabla_{e_i}^\perp H}(e_i) - \nabla_{e_i} A_H(e_i) - B(e_i, A_H(e_i)) \} \\ &= -\Delta^\perp H - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) - \sum_{i=1}^m [A_{\nabla_{e_i}^\perp H}(e_i) + \nabla_{e_i} A_H(e_i)]. \end{aligned}$$

Mai mult, un calcul direct arată că în p se obține

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m [A_{\nabla_{e_i}^\perp H}(e_i) + \nabla_{e_i} A_H(e_i)] &= 2 \sum_{i=1}^m A_{\nabla_{e_i}^\perp H}(e_i) + \frac{m}{2} (d|H|^2)^\sharp \\ &= 2 \text{trace } A_{\nabla(\cdot)^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2), \end{aligned}$$

unde $\sharp : T^*M \rightarrow TM$ este izomorfismul muzical care identifică, prin intermediul metricii, 1-formele cu vectorii. Deci, înlocuind expresia lui $\text{trace } \nabla dH$ în (3.2), rezultă că \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă

$$(3.3) \quad -\Delta^\perp H - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) + mH = 2 \text{trace } A_{\nabla(\cdot)^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2).$$

Cum partea stângă a lui (3.3) este normală la M , iar partea dreaptă este tangentă la M , demonstrația se încheie. \square

Corolarul 3.2. *Fie M o subvarietate a lui \mathbb{S}^n cu $\nabla^\perp H = 0$. Atunci incluziunea canonică \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă $mH = \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot)$.*

Dacă M este o hipersuprafață, condiția (3.1) ia o formă mai simplă.

Propoziția 3.3. *Fie M o hipersuprafață a lui \mathbb{S}^n non-minimală. Atunci aplicația de incluziune \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă*

$$(3.4) \quad \begin{cases} \Delta^\perp H = (m - |B|^2)H \\ 2A(\text{grad}(|H|)) + m|H| \text{grad}(|H|) = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie $\{X_i\}_{i=1}^m \subset C(TM)$ un câmp de repere ortonormate și $\eta \in C(NM)$ cu $|\eta| = 1$. Avem $H = \frac{1}{m}(\text{trace } A)\eta$, $A_H = \frac{1}{m}(\text{trace } A)A$ iar

$$\begin{aligned} \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) &= \frac{1}{m}(\text{trace } A) \text{trace } B(\cdot, A \cdot) \\ &= \frac{1}{m}(\text{trace } A) \sum_{i=1}^m B(X_i, A(X_i)). \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
B(X_i, A(X_i)) &= \sum_{j=1}^m B(X_i, \langle B(X_i, X_j), \eta \rangle X_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \langle B(X_i, X_j), \eta \rangle B(X_i, X_j) = \sum_{j=1}^m (\langle B(X_i, X_j), \eta \rangle)^2 \eta \\
&= \sum_{j=1}^m |B(X_i, X_j)|^2 \eta.
\end{aligned}$$

Deci $\text{tr} B(\cdot, A_H \cdot) = \frac{1}{m} (\text{tr} A) |B|^2 \eta = |B|^2 H$.

Printr-un calcul direct se arată că dacă M este o hipersuprafață și $H \neq 0$, atunci

$$2 \text{tr} A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) = 2A(\text{grad}(|H|)) + m|H| \text{grad}(|H|).$$

□

Acum, fie $M = \mathbb{S}^m(a) \times \{b\} = \{p = (x^1, \dots, x^{m+1}, b), |(x^1)^2 + \dots + (x^{m+1})^2 = a^2, a^2 + b^2 = 1, 0 < a < 1\}$ o hipersferă în \mathbb{S}^{m+1} . Atunci avem

Propoziția 3.4. $M = \mathbb{S}^m(a) \times \{b\}$ este o subvarietate biarmonică a lui \mathbb{S}^{m+1} dacă și numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Demonstrație. Mulțimea secțiunilor în fibratul tangent al lui M este

$$C(TM) = \{X = (X^1, \dots, X^{m+1}, 0) \in \mathbb{R}^{m+2} \mid x^1 X^1 + \dots + x^{m+1} X^{m+1} = 0\}.$$

Considerăm $\xi = (x^1, \dots, x^{m+1}, -\frac{a^2}{b})$. Atunci ξ satisface

$$\langle \xi, X \rangle = 0, \quad \langle \xi, p \rangle = 0, \quad |\xi|^2 = a^2 + \frac{a^4}{b^2} = c^2, \quad c > 0,$$

și deci ξ este o secțiune în fibratul normal NM al lui M în \mathbb{S}^{m+1} . Dacă notăm $\eta = \frac{1}{c} \xi$ avem

$$\begin{aligned}
\nabla_X^{\mathbb{S}^{m+1}} \eta &= \nabla_X^\perp \eta - A(X) \\
&= \frac{1}{c} \nabla_X^{\mathbb{S}^{m+1}} \xi = \frac{1}{c} \{ \nabla_X^{\mathbb{R}^{m+2}} \xi + \langle \xi, X \rangle p \} \\
&= \frac{1}{c} \nabla_{(X^1, \dots, X^{m+1}, 0)}^{\mathbb{R}^{m+2}} (x^1, \dots, x^{m+1}, -\frac{a^2}{b}) \\
&= \frac{1}{c} X.
\end{aligned}$$

Aceasta implică $A = -\frac{1}{c} I$ și $\nabla^\perp \eta = 0$. Câmpul vectorial curbura medie este

$$H = \frac{1}{m} (\text{tr} A) \eta = -\frac{1}{c} \eta,$$

și prin urmare

$$A_H = A_{-\frac{1}{c} \eta} = \frac{1}{c^2} I.$$

Folosind acum Corolarul 3.2 obținem că M este biarmonică dacă și numai dacă $c^2 = 1$, i.e. dacă și numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. \square

Ne întoarcem acum la cazul suprafețelor în \mathbb{S}^3 . Din ultima propoziție vedem că $M = \mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ este o subvarietate biarmonică și non-armonică a lui \mathbb{S}^3 . Vom arăta că, de fapt, ea reprezintă unicul tip de astfel de subvarietate.

În cazul curbelor în \mathbb{S}^3 am văzut că curbele biarmonice și non-geodezice au curbura geodezică constantă. Următoare teoremă arată că acest rezultat rămâne adevărat și pentru curbura medie a suprafețelor biarmonice și non-armonice în \mathbb{S}^3 .

Teorema 3.5. *Fie M o suprafață în \mathbb{S}^3 . Atunci M este biarmonică și non-armonică dacă și numai dacă $|H|$ este constant și $|B|^2 = 2$.*

Demonstrație. Vom urmări îndeaproape demonstrația dată de B.Y. Chen, în [3], pentru suprafețe biarmonice în \mathbb{R}^3 .

Presupunem că M este biarmonică și non-armonică. Fie $\{X_1, X_2\}$ un câmp local de repere ortonormate și fie η un câmp vectorial local, normal și unitar. Presupunem că $H = f\eta$, unde $f \in C^\infty(M)$ și $f > 0$. În aceste condiții (3.4) devine

$$(3.5) \quad \Delta f = (2 - |A|^2)f,$$

$$(3.6) \quad A(\text{grad } f) + f \text{ grad } f = 0.$$

Fie $U = \{p \in M \mid (\text{grad } f^2)(p) \neq 0\}$. Vom arăta că $U = \emptyset$.

Presupunem că $U \neq \emptyset$ și fie $X_1 = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$. Avem

$$(3.7) \quad X_2 f = 0, \quad \text{grad } f = (X_1 f)X_1,$$

iar a doua formă fundamentală B a lui M este dată de

$$(3.8) \quad B(X_1, X_1) = -f\eta, \quad B(X_1, X_2) = 0, \quad B(X_2, X_2) = 3f\eta,$$

deci

$$(3.9) \quad |A|^2 = 10f^2.$$

Cum \mathbb{S}^3 are curbura secțională constantă și M este o hipersuprafață, ecuațiile lui Codazzi dau

$$(3.10) \quad X_2 f = -4f\omega_2^1(X_1), \quad 3X_1 f = -4f\omega_1^2(X_2),$$

unde $\{\omega^1, \omega^2\}$ sunt 1-formele duale lui $\{X_1, X_2\}$, iar ω_i^j sunt 1-formele de conexiune date de $\nabla X_i = \omega_i^j X_j$. Acum, (3.7) și (3.10) implică $\omega_2^1(X_1) = 0$ și $d\omega^1 = 0$. Deci $X_2 f = 0$ și vom demonstra că și $X_1 f = 0$, i.e. f este constantă de-a lungul curbelor integrale ale lui X_1 . Desigur, aceasta va implica că f este constantă. Considerăm deci o curbă integrală arbitrară a lui X_1 și vom nota cu f' și f'' prima și a doua derivată a lui f în lungul acestei curbe. Prin urmare, a doua formulă a lui (3.10) implică

$$(3.11) \quad 4f\omega_1^2 = -3f'\omega^2.$$

Din nou, (3.7) și (3.10) dau

$$(3.12) \quad 4f\Delta f = 3(f')^2 - 4ff'',$$

și, din (3.5) și (3.9), obținem

$$(3.13) \quad 4ff'' - 3(f')^2 + 8f^2 - 40f^4 = 0.$$

Dacă notăm $(f')^2 = y$, condiția (3.13) dă

$$(3.14) \quad 2f \frac{dy}{df} - 3y = 40f^4 - 8f^2,$$

care implică

$$(3.15) \quad (f')^2 = 8f^4 - 8f^2 + Cf^{\frac{3}{2}},$$

unde C este o constantă.

Pe de altă parte, ecuația lui Gauss

$$K = 1 + \det A$$

dă

$$(3.16) \quad \begin{cases} K = 1 - 3f^2 \\ d\omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2 \end{cases}$$

unde K este curbura gaussiană a lui M . Din (3.8), (3.11) și (3.16), obținem

$$(3.17) \quad 4ff'' - 7(f')^2 + 16f^4 - \frac{16}{3}f^2 = 0.$$

Dar (3.13) și (3.17) implică

$$(3.18) \quad (f')^2 = 14f^4 - \frac{10}{3}f^2.$$

În sfârșit, condițiile (3.15) și (3.18) implică că f trebuie să satisfacă o ecuație polinomială cu coeficienți constanți, deci f este constantă.

Prin urmare M are curbura medie constantă și $|A|^2 = |B|^2 = 2$.

Reciprocă este imediată. \square

Pentru a obține clasificarea suprafețelor biarmonice și non-armonice în \mathbb{S}^3 avem nevoie de următorul rezultat

Teorema 3.6. *Fie M o suprafață în \mathbb{S}^3 de curbura medie constantă și cu $|B|^2 = 2$. Avem*

- dacă M nu este compactă, atunci ea este a subvarietate deschisă a hipersferei $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$ sau a torului $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$.*
- dacă M este compactă și orientabilă, atunci ea este fie $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$, fie $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$.*

Demonstrație. Din condițiile $|H| = \text{constant}$ și $|B| = 2$ rezultă că valorile proprii ale operatorului Weingarten al lui $M \subset \mathbb{S}^3$ sunt fie $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, fie $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$. Primul caz este satisfăcut de $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$, iar cel de al doilea este satisfăcut de $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Folosind teorema fundamentală

a lui Bonnet pentru suprafețe în spații de curbură secțională constantă (de exemplu vezi [5]), demonstrația se încheie. \square

Observația 3.7. Se observă că în cazul $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ rezultă că M este pseudo-umbilicală și de curbură medie constantă 1, ceea ce, conform unui rezultat al lui B.Y. Chen și K. Yano ([4]), va implica $M = \mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$. În cazul $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$ rezultă că M este armonică.

Observația 3.8. Folosind o metodă diferită, Teorema 3.6 a fost de asemenea demonstrată de Z.H. Hou în [6].

Cum torul lui Clifford $\mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$ este armonic în \mathbb{S}^3 , din Teorema 3.5 și Teorema 3.6, putem enunța

Teorema 3.9. *Fie M o suprafață biarmonică și non-armonică a lui \mathbb{S}^3 .*

- a) *Dacă M nu este compactă, atunci ea este o subvarietate deschisă a lui $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$.*
- b) *Dacă M este compactă și orientabilă, atunci $M = \mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$.*

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3* , Vol. 12 (2001), no. 8, 867-876.
- [2] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. Math., 17 (1991), 169-188.
- [3] B.Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math., 52, 1998, 167-185.
- [4] B.Y. Chen, K. Yano, *Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere*, Tensor (N.S.), 22 (1971), 369-373.
- [5] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish, 1990.
- [6] Z.H. Hou, *Hypersurfaces in a sphere with constant mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 1193-1196.
- [7] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.
- [8] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [9] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi.

CAPITOLUL VII

SUBVARIETĂȚI BIARMONICE ÎN S^n

1. INTRODUCERE

În prima parte a acestui capitol vom da un rezultat de non-existență a subvarietăților biarmonice și non-armonice în $N^3(-1)$, varietate de dimensiune 3 și de curbură secțională constantă -1 (Teorema 2.6).

Apoi vom continua cu studiul subvarietăților biarmonice și non-armonice în S^n , unde $n > 3$. În acest caz, familia acestor subvarietăți este mult mai largă decât în cazul precedent, S^3 . Vom demonstra că orice subvarietate minimală în $S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset S^n$ este o subvarietate biarmonică și non-armonică în S^n (Theorem 3.5). Deci, folosind subvarietăți minimale cunoscute, putem obține o clasă largă de subvarietăți biarmonice și non-armonice în S^n . În particular, ca o consecință a unui cunoscut rezultat al lui Lawson ([11]), rezultă că există în S^4 suprafețe orientabile biarmonice și non-armonice, de orice gen. Pe de altă parte, scufundarea minimală Veronese a lui $P^2(\mathbb{R})$ în S^4 induce în S^5 o suprafață non-orientabilă biarmonică și non-minimală.

Vom da o teoremă de clasificare a subvarietăților biarmonice în S^n ce au curbura medie constantă.

De asemeni vom scrie și rezolva ecuația biarmonică pentru curbe în S^n .

Toate aceste rezultate sunt cuprinse în articolul **Biharmonic submanifolds in spheres**, acceptat spre publicare în *Israel Journal of Mathematics*, scris în colaborare cu R. Caddeo și S. Montaldo.

2. TEOREME DE NON-EXISTENȚĂ

Vom începe cu prezentarea unor rezultate privind non-existența subvarietăților biarmonice și non-armonice în spații de curbură secțională constantă negativă -1 .

Fie deci $N(-1)$ o varietate de curbură secțională constantă -1 , M o subvarietate a sa, și fie $i : M \rightarrow N(-1)$ incluziunea canonică. Atunci avem

Teorema 2.1. *Aplicația de incluziune $i : M \rightarrow N(-1)$ este biarmonică dacă și numai dacă*

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\perp H - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) - mH & = 0 \\ 2 \text{trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) & = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Demonstrația este analoagă celei de la Teorema 3.1, capitolul precedent. \square

În Capitolul 5 am demonstrat că dacă $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ este o imersie riemanniană cu $|\tau(\phi)| = \text{constant}$, iar $\text{Riem}^N \leq 0$, atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă este minimală. Vom redemonstra acest rezultat, pentru situația de acum.

Teorema 2.2. *Fie M o subvarietate a lui $N(-1)$ de curbură medie constantă. Atunci ea este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Demonstrație. Presupunem că M este biarmonică și rezultă

$$\Delta^\perp H = -mH - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot),$$

de unde

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\perp H, H \rangle &= -m|H|^2 - \langle \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot), H \rangle \\ &= -m|H|^2 - \langle \frac{1}{m} \sum_{i,\alpha} (\text{trace } A_\alpha) B(X_i, A_\alpha(X_i)), H \rangle \\ &= -m|H|^2 - \langle \sum_{i,j,\alpha} \frac{1}{m} (\text{trace } A_\alpha) \langle \eta_\alpha, B(X_i, X_j) \rangle B(X_i, X_j), H \rangle \\ &= -m|H|^2 - \sum_{i,j} (\langle H, B(X_i, X_j) \rangle)^2. \end{aligned}$$

Sau

$$\begin{aligned} \langle \Delta^\perp H, H \rangle &= -m|H|^2 - \sum_i \langle B(X_i, A_H(X_i)), H \rangle \\ &= -m|H|^2 - \sum_i \langle A_H(X_i), A_H(X_i) \rangle \\ &= -m|H|^2 - |A_H|^2. \end{aligned}$$

Deci, dacă M este biarmonică și de curbură medie constantă, din formula lui Weitzenböck

$$\frac{1}{2} \Delta |H|^2 = \langle \Delta^\perp H, H \rangle - |\nabla^\perp H|^2$$

rezultă $H = 0$.

□

Vom considera acum subvarietățile pseudo-umbilicale, i.e. acele subvarietăți ce satisfac $A_H = |H|^2 I$. Avem

Teorema 2.3. *Fie M o subvarietate a lui $N(-1)$, m -dimensională, pseudo-umbilicală și cu $m \neq 4$. Atunci ea este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Demonstrație. Fie $\{x^i\}_{i=1}^m$ un sistem de coordonate normale în jurul unui punct arbitrar $p \in M$, și fie $\{e_i\}_{i=1}^m$ câmpurile vectoriale de coordonate corespunzătoare. În p avem

$$\text{trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) = \sum_i \nabla_{e_i} A_H(e_i) - \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2).$$

Cum M este pseudo-umbilicală, primul termen din partea dreaptă a ecuației de mai sus devine

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_{e_i} A_H(e_i) &= \sum_i \nabla_{e_i} (|H|^2 e_i) = \sum_i e_i |H|^2 e_i \\ &= \text{grad}(|H|^2), \end{aligned}$$

și deci

$$(2.2) \quad \text{trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) = \left(1 - \frac{m}{2}\right) \text{grad}(|H|^2).$$

Presupunem că M este biarmonică. Substituind (2.2) în a doua ecuație a lui (2.1) rezultă

$$(4 - m) \text{grad}(|H|^2) = 0,$$

și prin urmare, pentru $m \neq 4$, curbura medie $|H|$ este constantă. Folosind acum Teorema 2.2 demonstrația se încheie. \square

În particular avem

Corolarul 2.4. *Fie $\gamma : I \rightarrow N(-1)$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Atunci γ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.*

În [4], B.Y. Chen and S. Ishikawa au demonstrat că orice suprafață biarmonică în spațiul euclidian 3-dimensional \mathbb{R}^3 este minimală. Următoarea teoremă arată că acest rezultat rămâne adevărat și dacă substituim \mathbb{R}^3 cu $N^3(-1)$.

Teorema 2.5. *Fie M o suprafață a lui $N^3(-1)$. Atunci M este biarmonică dacă și numai dacă este minimală.*

Demonstrație. Presupunem că M este biarmonică și non-minimală. La fel ca la Teorema 3.5, capitolul precedent, se demonstrează că M are curbura medie constantă, ceea ce conduce la o contradicție. \square

Din Teorema 2.5 și Corolarul 2.4 obținem

Teorema 2.6. *Fie M o subvarietate a lui $N^3(-1)$. Atunci M este biarmonică dacă și numai dacă ea este armonică.*

3. SUBVARIETĂȚI BIARMONICE ÎN \mathbb{S}^n

Următorul exemplu netrivial de subvarietate biarmonică a lui \mathbb{S}^n a fost dat de G.Y. Jiang în primele sale două lucrări de teoria aplicațiilor biarmonice.

Exemplul 3.1 ([8, 9]). Fie m_1, m_2 două numere întregi strict pozitive cu $m = m_1 + m_2$ și fie r_1, r_2 două numere reale strict pozitive cu $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Avem două cazuri:

1. $m_1 \neq m_2$ și atunci $\mathbb{S}^{m_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{m_2}(r_2)$ este o subvarietate biarmonică și non-minimală a lui \mathbb{S}^{m+1} dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
2. $m_1 = m_2 = q$ și atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - $\mathbb{S}^q(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2)$ este o subvarietate biarmonică a lui \mathbb{S}^{2q+1} ,

- $\mathbb{S}^q(r_1) \times \mathbb{S}^q(r_2)$ este o subvarietate minimală a lui \mathbb{S}^{2q+1} ,
- $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Notăm că în cazul $m = 2$, așa cum am văzut în capitolul precedent, singurele suprafețe biarmonice și non-armonice sunt $\mathbb{S}^2(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Reamintim următorul exemplu dat în capitolul anterior.

Exemplul 3.2. Fie $M = \mathbb{S}^m(a) \times \{b\} = \{p = (x^1, \dots, x^{m+1}, b), |(x^1)^2 + \dots + (x^{m+1})^2 = a^2, a^2 + b^2 = 1, 0 < a < 1\}$ o hipersferă a lui \mathbb{S}^{m+1} . Atunci $M = \mathbb{S}^m(a) \times \{b\}$ este o subvarietate biarmonică și non-minimală a lui \mathbb{S}^{m+1} dacă și numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Notăm că $\mathbb{S}^{m_1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^{m_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $m_1 \neq m_2$ nu este o subvarietate pseudo-umbilicală a lui \mathbb{S}^{m+1} , în timp ce $\mathbb{S}^m(a) \times \{b\}$ este pseudo-umbilicală.

În această secțiune vom da două metode de a construi noi exemple de subvarietăți biarmonice și non-minimale în \mathbb{S}^n . Vom începe reamintind următorul rezultat

Teorema 3.3 ([12]). *Fie M o subvarietate a lui \mathbb{S}^n și fie $i : M \rightarrow \mathbb{S}^n$ incluziunea canonică. Atunci aplicația i este biarmonică dacă și numai dacă*

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta^\perp H - \text{trace } B(\cdot, A_H \cdot) + mH &= 0 \\ 2 \text{trace } A_{\nabla_{(\cdot)}^\perp H}(\cdot) + \frac{m}{2} \text{grad}(|H|^2) &= 0. \end{cases}$$

Din Teorema 3.3, care este analoagă cu Teorema 2.1, rezultă că o subvarietate a lui \mathbb{S}^n care are câmpul vectorial curbura medie paralel și de normă 1 este biarmonică. Notăm faptul că o astfel de subvarietate este armonică într-o hipersferă a lui \mathbb{S}^n , așa cum arată următorul rezultat

Teorema 3.4. *Fie M o subvarietate pseudo-umbilicală a lui \mathbb{S}^n având câmpul vectorial curbura medie paralel și de normă 1. Atunci*

1. M este biarmonică în \mathbb{S}^n ;
2. M este o subvarietate minimală în hipersfera $\mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^n$.

Demonstrație. Vom folosi o idee a lui B.Y. Chen și K. Yano (vezi [5]). Notăm cu \tilde{H} câmpul vectorial curbura medie al lui M în \mathbb{R}^{n+1} . Pentru orice $p \in M$ avem $\tilde{H}(p) = H(p) - p$, iar pentru orice câmp vectorial X tangent la M avem

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{H} &= \tilde{\nabla}_X^\perp \tilde{H} - \tilde{A}_{\tilde{H}}(X) \\ &= (\nabla_X^{\mathbb{S}^n} H - \langle X, H \rangle p) - \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} p \\ &= \nabla_X^\perp H - A_H(X) - X. \end{aligned}$$

Deci, folosind ipoteza, rezultă

$$\tilde{\nabla}^\perp \tilde{H} = \nabla^\perp H = 0 \quad \text{și} \quad \tilde{A}_{\tilde{H}} = 2I.$$

Considerăm acum aplicația $\Psi \in C^\infty(M; \mathbb{R}^{n+1})$ dată de $\Psi(p) = p + \frac{1}{2}\tilde{H}(p)$.
Avem

$$X(\Psi) = \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \Psi = \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} p + \frac{1}{2} \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{H} = 0,$$

deci Ψ este un vector constant.

Deoarece

$$|p - \Psi|^2 = \frac{1}{4} |\tilde{H}|^2 = \frac{1}{2},$$

rezultă $M \subset \mathbb{S}^n(\Psi; \frac{1}{\sqrt{2}})$. Cum $|\Psi| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, fără a pierde generalitatea, putem presupune că $\Psi = (0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R}^{n+1}$; deci $M \subset \mathbb{S}^n(\Psi; \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

În final, cum pentru orice $p \in M$, vectorul $(p - \Psi)$ este paralel cu $\tilde{H}(p)$, rezultă că M este armonică în $\mathbb{S}^n(\Psi; \frac{1}{\sqrt{2}})$, și deci, este armonică în $\mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. \square

Teorema anterioară ne sugerează să căutăm subvarietățile biarmonice și non-armonice printre subvarietățile armonice în hipersfere. Într-adevăr, avem

Teorema 3.5. *Fie M o subvarietate armonică a lui $\mathbb{S}^n(a) \times \{b\}$, unde $a^2 + b^2 = 1$, $0 < a < 1$. Atunci M este o subvarietate biarmonică și non-armonică a lui \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Demonstrație. În raport cu produsul scalar euclidian \langle, \rangle pe \mathbb{R}^{n+2} , mulțimea secțiunilor în fibratul tangent al lui $\mathbb{S}^n(a) \times \{b\}$ este

$$\{X = (X^1, \dots, X^{n+1}, 0) \in \mathbb{R}^{n+2} \mid x^1 X^1 + \dots + x^{n+1} X^{n+1} = 0\}.$$

Fie acum $\xi = (x^1, \dots, x^{n+1}, -\frac{a^2}{b})$ și $p = (x^1, \dots, x^{n+1}, b)$. Atunci avem

$$\langle \xi, X \rangle = 0, \quad \langle \xi, p \rangle = 0, \quad |\xi|^2 = a^2 + \frac{a^4}{b^2} = c^2, \quad c > 0,$$

și deci ξ este o secțiune în fibratul normal al lui $\mathbb{S}^n(a) \times \{b\}$ în \mathbb{S}^{n+1} . Notăm $\eta = \frac{1}{c}\xi$ și avem

$$\begin{aligned} \nabla_X^{\mathbb{S}^{n+1}} \eta &= \nabla_X^\perp \eta - A(X) \\ &= \frac{1}{c} \nabla_X^{\mathbb{S}^{n+1}} \xi = \frac{1}{c} \{ \nabla_X^{\mathbb{R}^{n+2}} \xi + \langle \xi, X \rangle p \} \\ &= \frac{1}{c} \nabla_{(X^1, \dots, X^{n+1}, 0)}^{\mathbb{R}^{n+2}} (x^1, \dots, x^{n+1}, -\frac{a^2}{b}) \\ &= \frac{1}{c} X. \end{aligned}$$

Aceasta implică $A = -\frac{1}{c}I$ și $\nabla^\perp \eta = 0$.

Notăm $\mathbf{i} : M \rightarrow \mathbb{S}^n(a) \times \{b\}$ și $\mathbf{i}_1 : \mathbb{S}^n(a) \times \{b\} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ aplicațiile de incluziune. Fie $\{X_i\}_{i=1}^m$ o bază geodezică într-un punct arbitrar $p \in M$. În

p avem

$$\tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) = \sum_{i=1}^m \nabla d\mathbf{i}_1(X_i, X_i) = \sum_i -\frac{1}{c} \langle X_i, X_i \rangle \eta = -\frac{m}{c} \eta \neq 0,$$

și

$$\begin{aligned} \tau_2(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) &= -\Delta\tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) + m\tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) \\ &= \sum_i \nabla_{X_i}^{\mathbb{S}^{n+1}} \nabla_{X_i}^{\mathbb{S}^{n+1}} \left(-\frac{m}{c}\eta\right) - \frac{m^2}{c}\eta \\ &= -\frac{m}{c} \sum_i \nabla_{X_i}^{\mathbb{S}^{n+1}} [\nabla_{X_i}^\perp \eta - A(X_i)] - \frac{m^2}{c}\eta \\ &= -\frac{m}{c^2} \sum_i \nabla_{X_i}^{\mathbb{S}^{n+1}} X_i - \frac{m^2}{c}\eta \\ &= \frac{m^2}{c} \left(\frac{1}{c^2} - 1\right)\eta. \end{aligned}$$

Deci $\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}$ nu poate fi armonică, și este biarmonică dacă și numai dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. \square

Observația 3.6. Notăm că dacă M este armonică în $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{2}})$, atunci ea este pseudo-umbilicală în \mathbb{S}^{n+1} ; în plus, $\nabla^\perp \tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) = 0$ și $|\tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i})| = m$.

Cum proiecția radială

$$\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n(r) \quad x \mapsto rx, \quad r > 0,$$

este o omotetie, o subvarietate minimală în \mathbb{S}^n după compunerea cu proiecția radială devine o subvarietate minimală în $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Deci, combinând Teorema 3.5 cu un rezultat binecunoscut al lui H.B. Lawson, care afirmă că există suprafețe orientabile, închise, scufundate minimal în \mathbb{S}^3 , de orice gen (vezi [11]), obținem

Teorema 3.7. *Există suprafețe orientabile, închise, scufundate biarmonic și non-minimal în \mathbb{S}^4 , de orice gen.*

Această teoremă arată existența unei largi clase de suprafețe biarmonice în \mathbb{S}^4 , spre deosebire de cazul \mathbb{S}^3 .

Exemplul 3.8. Pentru a obține un exemplu non-orientabil considerăm suprafața Veronese în \mathbb{S}^4 . Aplicația $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ dată de

$$\begin{aligned} \phi(x^1, x^2, x^3) &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}x^2x^3, \frac{1}{\sqrt{6}}x^1x^3, \frac{1}{\sqrt{6}}x^1x^2, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\sqrt{6}}((x^1)^2 - (x^2)^2), \frac{1}{6\sqrt{2}}((x^1)^2 + (x^2)^2 - 2(x^3)^2), \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

definește o scufundare biarmonică și non-minimală a lui $P^2(\mathbb{R})$ în \mathbb{S}^5 .

O întrebare naturală este dacă s-ar putea obține subvarietăți biarmonice în \mathbb{S}^{n+1} pornind de la subvarietăți non-minimale în $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Rezultatul de mai jos răspunde la această întrebare

Teorema 3.9. *Presupunem că M este o subvarietate în $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Atunci M este biarmonică în \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă este armonică în $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.*

Demonstrație. Dacă $M \subset \mathbb{S}^n(a) \times \{b\}$, avem $\tau(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) = \tau(\mathbf{i}) - \frac{m}{c}\eta \neq 0$ și

$$(3.2) \quad \tau_2(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) = \tau_2(\mathbf{i}) + m(1 - \frac{1}{a^2})\tau(\mathbf{i}) + \frac{1}{c}\{|\tau(\mathbf{i})|^2 - \frac{m^2}{c^2}(c^2 - 1)\}\eta.$$

Dacă $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ecuația (3.2) se reduce la

$$\tau_2(\mathbf{i}_1 \circ \mathbf{i}) = \tau_2(\mathbf{i}) - m\tau(\mathbf{i}) + |\tau(\mathbf{i})|^2\eta,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Același raționament ca la Teorema 3.5 conduce la

Propoziția 3.10. *Fie M o subvarietate armonică a lui $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, cu $0 < m < n_1$, sau $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1)$, și fie $b \in \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, unde $r_1^2 + r_2^2 = 1$ iar $n = n_1 + n_2$. Atunci $M \times \{b\}$ este armonică în $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, și este biarmonică și non-armonică în \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Observația 3.11. Fie M o subvarietate armonică a lui $\mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, cu $0 < m < n_1$, sau $M = \mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, și fie $b \in \mathbb{S}^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$; $n = n_1 + n_2$, Atunci $M \times \{b\}$ este armonică în $\mathbb{S}^n(A, \frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$, unde $A = (0, b) \in \mathbb{R}^{n+2}$, iar $\mathbb{S}^n(A, \frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \langle x - A, A \rangle = 0\}$.

Putem da acum un criteriu de clasificare pentru subvarietățile biarmonice în \mathbb{S}^n ce au curbura medie constantă.

Teorema 3.12. *Fie M o subvarietate a lui \mathbb{S}^n cu $|H| = \text{constant}$. Avem*

- dacă $|H| > 1$, atunci M nu poate fi biarmonică;
- dacă $|H| = 1$, atunci M este biarmonică dacă și numai dacă M este pseudo-umbilicală și $\nabla^\perp H = 0$, i.e. M este minimală în hipersfera $\mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^n$.

In particular, dacă M este o hipersuprafață a lui \mathbb{S}^n cu $|H| = 1$, atunci M este biarmonică dacă și numai dacă $M = \mathbb{S}^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Demonstrație. Fie M o subvarietate biarmonică a lui \mathbb{S}^n . Am văzut anterior că aceasta implică

$$\langle \Delta^\perp H, H \rangle = m|H|^2 - |A_H|^2,$$

iar din formula lui Weitzenböck, cum $|H| = \text{constant}$, obținem

$$(3.3) \quad m|H|^2 = |A_H|^2 + |\nabla^\perp H|^2.$$

Fie $\{X_i\}$ o bază ortonormată astfel încât $A_H(X_i) = \lambda_i X_i$. Rezultă

$$\lambda_i = \langle A_H(X_i), X_i \rangle = \langle B(X_i, X_i), H \rangle,$$

și

$$\sum_i \lambda_i = m|H|^2, \quad |A_H|^2 = \sum_i (\lambda_i)^2.$$

Prin urmare, înlocuind în (3.3) obținem

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i (\lambda_i)^2 + |\nabla^\perp H|^2.$$

Mai departe avem

$$(3.4) \quad \sum_i \lambda_i = \sum_i (\lambda_i)^2 + |\nabla^\perp H|^2 \geq \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)^2}{m} + |\nabla^\perp H|^2,$$

și deci

$$m|H|^2 \geq m|H|^4 + |\nabla^\perp H|^2.$$

Prin urmare, dacă $|H| > 1$ atunci ultima inegalitate conduce la o contradicție. Dacă $|H| = 1$, atunci ultima inegalitate implică $\nabla^\perp H = 0$ și înlocuind în (3.4) obținem egalitate, ceea ce implică $\lambda_1 = \dots = \lambda_m$, i.e. M este pseudo-umbilicală. \square

Observația 3.13. Un rezultat asemănător a fost dat în [12].

Toate subvarietățile construite anterior sunt pseudo-umbilicale. Dorim acum să construim subvarietăți biarmonice în \mathbb{S}^n care nu sunt de acest tip.

Pentru aceasta, fie n_1, n_2 două numere întregi strict pozitive astfel încât $n = n_1 + n_2$, și fie r_1, r_2 două numere reale strict pozitive astfel încât $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Fie M_1 o subvarietate minimală a lui $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ de dimensiune m_1 , cu $0 < m_1 < n_1$, și fie M_2 o subvarietate minimală a lui $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ de dimensiune m_2 , cu $0 < m_2 < n_2$. Atunci avem

Teorema 3.14. *Varietatea $M_1 \times M_2$ este o subvarietate biarmonică și non-armonică a lui \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iar $m_1 \neq m_2$.*

Demonstrație. Demonstrația este asemănătoare celei de la Teorema 3.5. \square

Observația 3.15. Dacă $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $m_1 \neq m_2$, atunci $|\tau(\mathbf{j})| = |m_2 - m_1| < m_1 + m_2$, unde $\mathbf{j}: M_1 \times M_2 \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ este incluziunea canonică.

Observația 3.16. Când $r_1 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $m_1 \neq m_2$, $M_1 \times M_2$ nu este pseudo-umbilicală în \mathbb{S}^{n+1} .

În finalul acestei secțiuni, la fel ca în Teorema 3.9, dăm

Teorema 3.17. *Fie n_1, n_2 două numere întregi pozitive astfel încât $n = n_1 + n_2$. Fie M_1 o subvarietate a lui $\mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ de dimensiune m_1 , cu $0 <$*

$m_1 < n_1$, și fie M_2 o subvarietate a lui $\mathbb{S}^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ de dimensiune m_2 , cu $0 < m_2 < n_2$. Atunci $M_1 \times M_2$ este biarmonică în \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă

$$\begin{cases} \tau_2(\mathbf{i}_1) + (m_2 - m_1)\tau(\mathbf{i}_1) = 0 \\ \tau_2(\mathbf{i}_2) + (m_1 - m_2)\tau(\mathbf{i}_2) = 0 \\ |\tau(\mathbf{i}_1)| = |\tau(\mathbf{i}_2)|, \end{cases}$$

unde $\mathbf{i}_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ și $\mathbf{i}_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{S}^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$ sunt incluziunile canonice.

Desigur, dacă M_1 este armonică în $\mathbb{S}^{n_1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$, atunci $M_1 \times M_2$ este biarmonică în \mathbb{S}^{n+1} dacă și numai dacă M_2 este armonică în $\mathbb{S}^{n_2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. CURBE BIARMONICE ÎN \mathbb{S}^n

În această ultimă secțiune vom studia curbele biarmonice în \mathbb{S}^n . Pentru a obține ecuația curbelor biarmonice vom demonstra următorul rezultat mai general

Propoziția 4.1. Fie $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ o imersie riemanniană și fie $\varphi = \mathbf{i} \circ \phi$, unde $\mathbf{i} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ este incluziunea canonică. Atunci avem

$$(4.1) \quad \tau_2(\phi) = \tau_2(\varphi) + 2m\tau(\varphi) + \{2m^2 - |\tau(\varphi)|^2\}\varphi.$$

Demonstrație. Considerăm un sistem de coordonate normale într-un punct arbitrar $p \in M$. În p avem

$$(4.2) \quad \tau_2(\phi) = \sum_i \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) + m\tau(\phi).$$

Cum $\tau(\varphi) = \tau(\phi) - m\varphi$, obținem

$$\begin{aligned} \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) &= \nabla_{d\varphi(e_i)}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tau(\phi) - B(d\phi(e_i), \tau(\phi)) \\ &= \nabla_{d\varphi(e_i)}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tau(\phi) = \nabla_{d\varphi(e_i)}^{\mathbb{R}^{n+1}} (\tau(\varphi) + m\varphi), \end{aligned}$$

și deci, în p , avem

$$\begin{aligned} \sum_i \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) &= \sum_i \{ \nabla_{d\varphi(e_i)}^{\mathbb{R}^{n+1}} \nabla_{d\varphi(e_i)}^{\mathbb{R}^{n+1}} (\tau(\varphi) + m\varphi) - B(d\phi(e_i), \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi)) \} \\ &= \tau_2(\varphi) + m\tau(\varphi) + \sum_i \langle d\phi(e_i), \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) \rangle \varphi. \end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned} \sum_i \langle d\phi(e_i), \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) \rangle &= -|\tau(\phi)|^2 = -|\tau(\varphi) + m\varphi|^2 \\ &= -|\tau(\varphi)|^2 + m^2. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\sum_i \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi) = \tau_2(\varphi) + m\tau(\varphi) + (-|\tau(\varphi)|^2 + m^2)\varphi.$$

Inlocuim acum expresia lui $\sum_i \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{d\phi(e_i)}^{\mathbb{S}^n} \tau(\phi)$ în (4.2) și obținem (4.1). \square

În cazul particular când M este o curbă, i.e. $m = 1$, ecuația biarmonică dată de anularea lui (4.1) reprezintă ecuația căutată.

Corolarul 4.2. *Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Atunci γ este biarmonică în \mathbb{S}^n dacă și numai dacă*

$$(4.3) \quad \gamma^{IV} + 2\gamma'' + (1 - k_g^2)\gamma = 0,$$

unde $k_g = |\nabla_{\gamma'}^{\mathbb{S}^n} \gamma'|$ este curbura geodezică a lui γ în \mathbb{S}^n .

Observația 4.3. Ecuația (4.3) poate fi obținută direct, analog ca în cazul \mathbb{S}^3 .

Vom demonstra acum că curbura geodezică a unei curbe biarmonice este constantă și atunci ecuația (4.3) va putea fi integrată.

Propoziția 4.4. *Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$ o curbă biarmonică non-geodezică parametrizată prin lungimea de arc. Atunci k_g este constantă și $0 < k_g \leq 1$.*

Demonstrație. Din a doua ecuație a lui (3.1) obținem că k_g este constantă.

Pentru a demonstra că $0 < k_g \leq 1$, fie $T = \gamma'$ și $\tau(\gamma) = \nabla_T^{\mathbb{S}^n} T = k_g N$. Avem $|T| = 1$ și $\langle N, T \rangle = 0$. De asemenea, fie $\nabla_T^{\mathbb{S}^n} N = fT + W$, unde W este un câmp vectorial în lungul lui γ astfel încât $\langle W, T \rangle = 0$, iar $f \in C^\infty(I)$. Rezultă că $f = -k_g$. În continuare, din

$$\nabla_T^{\mathbb{S}^n} \tau(\gamma) = -k_g^2 T + k_g W,$$

rezultă că $A_{\tau(\gamma)}(T) = k_g^2 T$, unde A este operatorul Weingarten, și $\nabla_T^\perp \tau(\gamma) = k_g W$. Cum γ este biarmonică, rezultă

$$\Delta^\perp \tau(\gamma) = \tau(\gamma) - B(T, A_{\tau(\gamma)}(T)) = k_g(1 - k_g^2)N.$$

Acum, din formula lui Weitzenböck

$$\frac{1}{2} \Delta^\perp |\tau(\gamma)|^2 = \langle \Delta^\perp \tau(\gamma), \tau(\gamma) \rangle - |\nabla^\perp \tau(\gamma)|^2,$$

obținem $1 - k_g^2 = |W|^2$, iar aceasta încheie demonstrația. \square

Observația 4.5. Propoziția anterioară admite și o demonstrație directă, ca în cazul \mathbb{S}^3 , folosind reperul Frenet generalizat.

Astfel, fie $\gamma : I \rightarrow N(K)$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc, unde N este o varietate riemanniană de curbura secțională constantă K . Considerăm pentru γ reperul lui Frenet generalizat $\{N_i\}_{i=0}^{n-1}$, unde $N_0 = T$, $N_1 = N$ și ecuațiile lui Frenet generalizate

$$\nabla_T N_i = -k_i N_{i-1} + k_{i+1} N_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

unde $k_0 N_{-1} = k_n N_n = 0$, iar $k_1 = k_g$. Prin calcul direct se obține că γ este biarmonică dacă și numai dacă

$$\begin{cases} k_1 k_1' = 0 \\ k_1'' - k_1^3 + k_1 K - k_1 k_2^2 = 0 \\ 2k_1' k_2 + k_2' k_1 = 0 \\ k_1 k_2 k_3 = 0. \end{cases}$$

Prin urmare putem formula

- (A) dacă $K \leq 0$, atunci γ este biarmonică dacă și numai este geodezică (vezi Corolarul 2.4),
 (B) dacă $K > 0$, iar γ este biarmonică și non-geodezică, atunci $k_1 = k_g = \text{constant}$ și $0 < k_g \leq K$.

Integrând acum (4.3) concluzionăm

Propoziția 4.6. Fie $\gamma : I \rightarrow S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc și de curbura geodezică k_g . Avem

1. dacă $k_g = 1$, atunci cercul

$$\gamma(t) = \cos(\sqrt{2}t)c_1 + \sin(\sqrt{2}t)c_2 + c_4$$

este o curbă biarmonică și non-geodezică, unde c_1, c_2, c_4 sunt vectori constanți, ortogonali între ei, iar $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$;

2. dacă $0 < k_g < 1$, atunci

$$\gamma(t) = \cos(at)c_1 + \sin(at)c_2 + \cos(bt)c_3 + \sin(bt)c_4$$

este o curbă biarmonică și non-geodezică, unde c_1, c_2, c_3, c_4 sunt vectori constanți, ortogonali între ei, iar $|c_1|^2 = |c_2|^2 = |c_3|^2 = |c_4|^2 = \frac{1}{2}$, și $a^2 + b^2 = 2$, $a^2 \neq b^2$. În acest caz $k_g^2 = 1 - a^2 b^2 \in (0, 1)$.

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of S^3* , Internat. J. Math., Vol. 12 (2001), no. 8, 867-876.
- [2] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, va apărea în Israel J. Math., 2002.
- [3] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. math. 17 (1991), 169-188.
- [4] B.Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math. 52, 1998, pp. 167-185.
- [5] B.Y. Chen, K. Yano, *Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere*, Tensor (N.S.), 22 (1971), 369-373.
- [6] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).
- [7] H. Gluck, *Geodesics in the unit tangent bundle of a round sphere*, L'Enseignement Mathématique, t.34 (1988), p. 233-246.
- [8] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.

- [9] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [10] J. Langer, D.A. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geometry, 20 (1984), 1-22.
- [11] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. (2) 92 (1970), 335-374.
- [12] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi. Mat. (N.S.).

CAPITOLUL VIII

SUBVARIETĂȚI BIARMONICE ÎN GRUPUL HEISENBERG

1. INTRODUCERE

În capitolele precedente am studiat subvarietățile biarmonice în S^n , $n \geq 3$, și în $N(-1)$, spații de curbura secțională constantă pozitivă, respectiv negativă. Acum este natural să studiem subvarietățile biarmonice ale unei varietăți N ce nu are curbura secțională constantă. Desigur, în acest caz va spori complexitatea calculelor, anumite formule ne mai având o formă simplă.

Am ales ca varietate N grupul Heisenberg H_3 . Am făcut această alegere deoarece H_3 are multe proprietăți interesante. Grupul izometriilor sale are dimensiunea 4, maximum posibil pentru o varietate 3-dimensională și de curbura secțională non-constantă, ceea ce ne dă speranța că ecuația biarmonică va putea fi prelucrată. De asemeni, H_3 a fost preferat și de alți matematicieni pentru a studia cum se comportă anumite rezultate atunci când curbura secțională nu mai este constantă (de exemplu vezi [5]).

În prima parte vom studia curbele biarmonice în H_3 și vom obține o familie de elici biarmonice și non-geodezice (Teorema 3.2). Acest rezultat este asemănător cu cel obținut pentru curbele biarmonice în S^3 .

În partea a doua vom studia suprafețele biarmonice în H_3 . Vom da o teoremă de non-existență a suprafețelor biarmonice și non-minimale (Teorema 4.11). Acest rezultat este adevărat pentru o clasă largă de suprafețe și este asemănător cu cel obținut pentru suprafețele biarmonice în \mathbb{R}^3 sau în $N^3(-1)$.

Rezultatele din acest capitol sunt cuprinse în lucrarea **On biharmonic submanifolds of the Heisenberg group**, de R. Caddeo, C. Oniciuc și P. Piu, preprint.

2. STRUCTURA RIEMANNIANNĂ A LUI H_3

Fie $H_3 = (\mathbb{R}^3, g)$ grupul Heisenberg înzestrat cu metrica riemanniannă g dată de

$$(2.1) \quad g = dx^2 + dy^2 + \left(dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy\right)^2.$$

Metrica g este invariantă în raport cu translațiile la stânga și cu rotațiile în jurul axei Oz .

Produsul pe H_3 este dat de

$$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(x, y, z) = (\tilde{x} + x, \tilde{y} + y, \tilde{z} + z + \frac{1}{2}\tilde{x}y - \frac{1}{2}\tilde{y}x).$$

Vom folosi câmpul de repere ortonormate global definit, dat de

$$\theta^1 = dx, \quad \theta^2 = dy, \quad \theta^3 = dz + \frac{y}{2}dx - \frac{x}{2}dy,$$

și câmpul corespunzător de repere duale

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Conexiunea Levi-Civita a metricii g este dată de

$$(2.2) \quad \begin{cases} \nabla_{e_1}e_1 = 0, & \nabla_{e_1}e_2 = \frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_1}e_3 = -\frac{1}{2}e_2, \\ \nabla_{e_2}e_1 = -\frac{1}{2}e_3, & \nabla_{e_2}e_2 = 0, & \nabla_{e_2}e_3 = \frac{1}{2}e_1, \\ \nabla_{e_3}e_1 = -\frac{1}{2}e_2, & \nabla_{e_3}e_2 = \frac{1}{2}e_1, & \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{cases}$$

De asemeni, croșetele câmpurilor e_1 , e_2 și e_3 sunt date de

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_3, e_1] = [e_2, e_3] = 0.$$

Reamintim acum convenția de semn pentru câmpul tensorului de curbură

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z,$$

iar câmpul tensorului Riemann-Christoffel și câmpul tensorului Ricci sunt date de

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z), \quad \text{Ricci}(X, Y) = (\text{trace } Z \rightarrow R(Z, X)Y),$$

unde X, Y, Z, W sunt câmpuri vectoriale pe \mathbb{R}^3 . În acest capitol vom folosi notațiile din lucrările [4] și [5], și anume

$$R_{abc} = R(e_a, e_b)e_c, \quad R_{abcd} = R(e_a, e_b, e_c, e_d), \quad \text{Ricci}_{ab} = \text{Ricci}(e_a, e_b),$$

unde indicii a, b, c, d iau valorile 1, 2, 3. Componentele nenule ale câmpurilor tensoriale de curbură, Riemann-Christoffel și Ricci sunt, respectiv

$$(2.3) \quad \begin{cases} R_{121} = \frac{3}{4}e_2, & R_{131} = -\frac{1}{4}e_3, & R_{122} = -\frac{3}{4}e_1, & R_{232} = -\frac{1}{4}e_3, \\ R_{133} = \frac{1}{4}e_1, & R_{233} = \frac{1}{4}e_2, \end{cases}$$

$$(2.4) \quad R_{1212} = -\frac{3}{4}, \quad R_{1313} = R_{2323} = \frac{1}{4},$$

$$(2.5) \quad \text{Ricci}_{11} = \text{Ricci}_{22} = -\frac{1}{2}, \quad \text{Ricci}_{33} = \frac{1}{2}.$$

3. ELICI BIARMONICE ÎN H_3

Fie $\gamma : I \rightarrow H_3$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Considerăm câmpul de baze ortonormate $\{T, N, B\}$ în H_3 definit în lungul lui γ , unde $T = \gamma'$ este câmpul vectorial unitar tangent la γ , N este câmpul vectorial unitar normal, de aceeași direcție cu $\nabla_T T$, iar B este ales astfel încât $\{T, N, B\}$ să fie o bază ortonormată pozitiv orientată. Avem ecuațiile lui Frenet

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \nabla_T T &= k_g N \\ \nabla_T N &= -k_g T - \tau_g B \\ \nabla_T B &= \tau_g N \end{aligned}$$

unde $k_g = |\tau(\gamma)| = |\nabla_T T|$ este curbura geodezică a lui γ , iar τ_g este torsiunea ei geodezică. Folosind ecuațiile lui Frenet (3.1) și expresia tensorului de curbura (2.3) obținem ecuația biarmonică a lui γ :

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) &= \nabla_T^3 T - R(T, k_g N)T \\ &= (-3k'_g k_g)T + (k''_g - k_g^3 - k_g \tau_g^2 + \frac{k_g}{4} - k_g B_3^2)N \\ &\quad + (-2k'_g \tau_g - k_g \tau'_g + k_g N_3 B_3)B \\ &= 0, \end{aligned}$$

unde $N = N_1 e_1 + N_2 e_2 + N_3 e_3$, iar $B = B_1 e_1 + B_2 e_2 + B_3 e_3$. Putem deci formula

Teorema 3.1. *Fie $\gamma : I \rightarrow H_3$ o curbă parametrizată prin lungimea de arc. Atunci γ este o curbă biarmonică și non-geodezică dacă și numai dacă*

$$(3.2) \quad \begin{cases} k_g = \text{constant} \neq 0 \\ k_g^2 + \tau_g^2 = \frac{1}{4} - B_3^2 \\ \tau'_g = N_3 B_3 \end{cases}$$

Notăm că dacă γ este biarmonică și $N_3 = 0$ atunci γ este o elice în H_3 , i.e. $k_g = \text{constant}$ și $\tau_g = \text{constant}$; în plus rezultă că și $B_3 = \text{constant}$. Această observație ne sugerează că pentru a găsi exemple de curbe biarmonice și non-armonice este indicat să căutăm printre elicile din H_3 .

Pentru aceasta vom considera familia de elici din \mathbb{R}^3

$$\gamma(s) = (r \cos(as), r \sin(as), c(as)),$$

unde $r > 0$, $c \neq 0$, $a \neq 0$. Câmpul vectorial unitar tangent la γ este

$$T(s) = \gamma'(s) = -ra \sin(as)e_1 + ra \cos(as)e_2 + Aae_3,$$

unde $A = c - \frac{1}{2}r^2$. Din condiția $|\gamma'(s)| = 1$ rezultă $\frac{1}{a^2} = r^2 + A^2$. Folosind (2.2) obținem

$$\nabla_T T = a^2 r(A - 1) \cos(as)e_1 + a^2 r(A - 1) \sin(as)e_2.$$

Presupunem acum că $A > 1$. Rezultă

$$k_g = a^2 r(A - 1), \quad N = \cos(as)e_1 + \sin(as)e_2.$$

Să notăm că $N_3 = 0$. Mai departe obținem

$$\begin{aligned}\nabla_T N + k_g T &= \frac{a^2}{2}(A^2 - 2A - r^2)\{aA \sin(as)e_1 - aA \cos(as)e_2 + rae_3\} \\ &= -\tau_g B,\end{aligned}$$

unde

$$\tau_g = \frac{a^2}{2}(A^2 - 2A - r^2), \quad B = T \times N = -aA \sin(as)e_1 + aA \cos(as)e_2 - rae_3.$$

Prin urmare elicile γ din \mathbb{R}^3 au curbura geodezică și torsiunea geodezică constante în H_3 , deci ele sunt elici și în H_3 . Acum din Teorema 3.1 obținem

Teorema 3.2. *Fie γ elicea*

$$\gamma(s) = (r \cos(as), r \sin(as), c(as)),$$

unde $r > 0$, $c = \frac{3r^2}{2} + 1$ și $\frac{1}{a^2} = r^2 + (1 + r^2)^2$. Atunci ea este biarmonică și non-geodezică.

Observația 3.3. Dacă $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, atunci γ este o curbă biarmonică și non-geodezică cu $\tau_g = 0$.

In continuare vom considera cazul cercurilor și al dreptelor.

Propoziția 3.4. *Fie γ cercul*

$$\gamma(s) = (r \cos(as), r \sin(as), c),$$

unde $r > 0$, $\frac{1}{a^2} = r^2(1 + \frac{1}{4}r^2)$. Atunci γ nu este o curbă biarmonică și nici geodezică.

Demonstrație. Printr-un calcul direct obținem

$$T(s) = \gamma'(s) = -ra \sin(as)e_1 + ra \cos(as)e_2 - \frac{1}{2}r^2ae_3,$$

și $|\gamma'(s)|^2 = 1$. Atunci

$$\nabla_T T = -ra^2(1 + \frac{r^2}{2})\{\cos(as)e_1 + \sin(as)e_2\},$$

deci $k_g = ra^2(1 + \frac{r^2}{2})$ și $N = -\cos(as)e_1 - \sin(as)e_2$. Cum $k_g \neq 0$, curba γ nu este geodezică. Pentru a obține expresia torsiunii geodezice a lui γ calculăm

$$\begin{aligned}\nabla_T N + k_g T &= -\frac{2}{r^2}(1 + \frac{r^2}{4} - k_g r)\left(-\frac{r^2}{2}a \sin(as)e_1\right) \\ &\quad -\frac{2}{r^2}(1 + \frac{r^2}{4} - k_g r)\left(\frac{r^2}{2}a \cos(as)e_2\right) + \frac{1}{2}(1 - k_g r)(rae_3) \\ &= -\tau_g B,\end{aligned}$$

unde $B = T \times N = -\frac{r^2}{2}a \sin(as)e_1 + \frac{r^2}{2}a \cos(as)e_2 + rae_3$ și deci $\tau_g = -\frac{1}{2}(1 - k_g r) = \frac{r^2}{2(4+r^2)}$. Acum avem relația

$$k_g^2 + \tau_g^2 + B_3^2 = \frac{r^4 + 28r^2 + 16}{4r^2(4+r^2)} > \frac{1}{4},$$

și prin urmare γ nu este biarmonică. \square

Propoziția 3.5. *Fie γ dreapta*

$$\gamma(s) = (as, bs, cs) = \exp(sX),$$

unde $X = ae_1(0) + be_2(0) + ce_3(0)$ și $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Atunci γ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.

Demonstrație. Avem

$$T(s) = \gamma'(s) = ae_1 + be_2 + ce_3, \quad |T| = 1, \quad \nabla_T T = c(be_1 - ae_2).$$

Presupunem acum că γ nu este armonică și $c \in (0, 1)$. Atunci

$$k_g = c\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{și} \quad N = \frac{be_1 - ae_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Calculând $\nabla_T N$ obținem

$$\begin{aligned} \nabla_T N + k_g T &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \left(\frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} e_1 + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} e_2 - \sqrt{a^2 + b^2} e_3 \right) \\ &= -\tau_g B, \end{aligned}$$

unde $B = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + b^2}} e_1 + \frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} e_2 - \sqrt{a^2 + b^2} e_3$ și $\tau_g = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$. Cum

$$k_g^2 + \tau_g^2 = \frac{1}{4} \quad \text{și} \quad B_3 \neq 0,$$

rezultă că γ nu este biarmonică. \square

Observația 3.6. Spre deosebire de cazul \mathbb{S}^n , obținerea ecuației de caracterizare a curbelor biarmonice în H_3 presupune calcule lungi și oricum nu se mai obține o ecuație diferențială cu coeficienți constanți care să poată fi integrată cu ușurință.

4. SUPRAFETE BIARMONICE ÎN H_3

Deoarece curbura secțională a lui H_3 nu este constantă, nu mai putem folosi aceleași tehnici pentru studiul suprafețelor biarmonice în H_3 ca în cazul \mathbb{S}^n , $n \geq 3$. Vom studia aceste suprafețe prin intermediul foliațiilor 2-dimensionale.

O foliație 2-dimensională poate fi dată de o 1-formă integrabilă

$$\omega = g_1\theta^1 + g_2\theta^2 + g_3\theta^3,$$

unde g_1, g_2, g_3 sunt funcții netede pe U , U fiind un deschis din \mathbb{R}^3 .

În cele ce urmează vom studia 3 cazuri.

A) Fie 1-forma ω dată de

$$\omega = \theta^1 + g\theta^2,$$

unde g este o funcție netedă definită pe un deschis din \mathbb{R}^3 . Câmpurile vectoriale $u = ge_1 - e_2$ și $v = e_3$ formează un câmp de repere ortogonale pentru distribuția $\ker \omega$, iar $N = \frac{e_1 + ge_2}{\sqrt{1+g^2}}$ este un câmp vectorial unitar normal la foile distribuției.

Distribuția este integrabilă dacă și numai dacă $e_3g = 0$, i.e. $g = g(x, y)$. Notăm cu $g_x = e_1g = \frac{\partial g}{\partial x}$, $g_y = e_2g = \frac{\partial g}{\partial y}$, și cu F o foaie arbitrară a distribuției. Printr-un calcul direct obținem

$$(4.1) \quad \begin{cases} \nabla_u u = (ug)e_1, \quad \nabla_u^F u = \frac{g(ug)}{1+g^2}u, \quad B(u, u) = b(u, u)N = \frac{ug}{\sqrt{1+g^2}}N, \\ \nabla_v v = 0, \quad \nabla_v^F v = 0, \quad B(v, v) = b(v, v)N = 0, \\ \nabla_u v = \nabla_v u = -\frac{\sqrt{1+g^2}}{2}N, \\ \nabla_u N = -fu + \frac{\sqrt{1+g^2}}{2}v, \quad \nabla_v N = \frac{1}{2\sqrt{1+g^2}}u, \end{cases}$$

unde ∇^F este conexiunea indusă pe foaia F , iar B este a doua formă fundamentală a lui F .

Propoziția 4.1. *Foile sunt armonice dacă și numai dacă $ug = 0$.*

Demonstrație. Din (4.1) obținem

$$\tau(\mathbf{i}) = \frac{1}{1+g^2}b(u, u)N = \frac{ug}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}N = fN,$$

unde $\mathbf{i} : F \rightarrow H_3$ este aplicația de incluziune, iar $f = \frac{ug}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}$. Deci $\tau(\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow ug = 0$. \square

Observația 4.2. Soluții ale ecuației $ug = 0$ sunt $g = \text{constant}$ și $g(x, y) = -\frac{ax+b}{ay+c}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.3. *Foile sunt biarmonice dacă și numai dacă ele sunt armonice.*

Demonstrație. Presupunem că foile sunt biarmonice. Avem

$$\begin{aligned} \tau_2(\mathbf{i}) &= \frac{1}{1+g^2} \{ \nabla_u \nabla_u \tau(\mathbf{i}) - \nabla_{\nabla_u^F u} \tau(\mathbf{i}) \} + \nabla_v \nabla_v \tau(\mathbf{i}) - \nabla_{\nabla_v^F v} \tau(\mathbf{i}) \\ &\quad + \text{Ricci } \tau(\mathbf{i}) \\ &= \tau_2(\mathbf{i})_u u + \tau_2(\mathbf{i})_v v + \tau_2(\mathbf{i})_N N \\ &= 0. \end{aligned}$$

Din (2.5) rezultă că $\text{Ricci}(\tau(\mathbf{i})) = -\frac{1}{2}\tau(\mathbf{i})$, și folosind (4.1) obținem

$$(4.2) \quad \begin{cases} \tau_2(\mathbf{i})_u = -\frac{3}{(1+g^2)}f(uf) = 0, \\ \tau_2(\mathbf{i})_v = \frac{1}{1+g^2} \left\{ (uf)\sqrt{1+g^2} + \frac{f}{2} [u(\sqrt{1+g^2})] - \frac{gf^2(1+g^2)}{2} \right\} = 0, \\ \tau_2(\mathbf{i})_N = \frac{u(uf)}{1+g^2} - f(1+f^2) - \frac{gf(uf)}{\sqrt{1+g^2}} = 0. \end{cases}$$

Acum, din prima și a treia ecuație a sistemului (4.2) rezultă că \mathbf{i} este biarmonică dacă și numai dacă $f = 0$, i.e. \mathbf{i} este armonică. \square

Observația 4.4. Cazul

$$\omega = g\theta^1 + \theta^2$$

este similar, i.e. foile foliației determinate de ω sunt biarmonice dacă și numai dacă ele sunt armonice.

B) Fie 1-forma ω integrabilă dată de

$$\omega = g\theta^2 - \theta^3.$$

Câmpurile vectoriale $u = e_1$ și $v = e_2 + ge_3$ formează un câmp de repere ortogonale pentru distribuția $\ker \omega$, iar $N = \frac{ge_2 - e_3}{\sqrt{1+g^2}}$ este un câmp vectorial unitar normal la foile distribuției.

Distribuția este integrabilă dacă și numai dacă $e_1g = -1$. Printr-un calcul direct obținem

$$(4.3) \quad \begin{cases} \nabla_u u = 0, \quad \nabla_u^F u = 0, \quad B(u, u) = b(u, u)N = 0, \\ \nabla_v v = gu + (vg)e_3, \quad \nabla_v^F v = gu + \frac{g(vg)}{1+g^2}v, \quad B(v, v) = b(v, v)N = -\frac{vg}{\sqrt{1+g^2}}N, \\ \nabla_u v = \nabla_v u = -\frac{g}{1+g^2}v + \frac{1-g^2}{2\sqrt{1+g^2}}N, \\ \nabla_u N = \frac{g^2-1}{2(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}v, \quad \nabla_v N = \frac{g^2-1}{2\sqrt{1+g^2}}u - fv. \end{cases}$$

Propoziția 4.5. Foile sunt armonice dacă și numai dacă $vg = 0$.

Demonstrație. Din (4.3) rezultă

$$\tau(\mathbf{i}) = \frac{1}{1+g^2}b(v, v)N = -\frac{vg}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}N = fN,$$

unde $f = -\frac{vg}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}$. Prin urmare $\tau(\mathbf{i}) = 0 \Leftrightarrow vg = 0$. \square

Observația 4.6. O soluție a sistemului

$$e_1g = -1 \text{ și } vg = 0$$

este $g = -x$.

Propoziția 4.7. *Foile au curbura medie constantă dacă și numai dacă sunt minimale.*

Demonstrație. Foile au curbura medie constantă dacă și numai dacă $uf = vf = 0$. Cum $f = -\frac{(e_2g)+g(e_3g)}{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}$ obținem

$$-uf = \frac{\left\{ [e_1(e_2g)] + (e_1g)(e_3g) + g[e_1(e_3g)] \right\} (1+g^2)^{\frac{3}{2}} - 3(vg)(1+g^2)^{\frac{1}{2}}g(e_1g)}{(1+g^2)^3}.$$

Folosind $e_1g = -1$ și $e_1(e_2g) = [e_1, e_2]g + e_2(e_1g) = e_3g$, $e_1(e_3g) = [e_1, e_3]g + e_3(e_1g) = 0$, obținem

$$uf = \frac{3gf}{1+g^2}.$$

Cum $e_1g = -1$, funcția g nu poate fi constantă. Deci $uf = 0$ implică $f = 0$, i.e. fibrele sunt minimale. \square

Observația 4.8. Propoziția 4.7 nu este adevărată în cazul A). De exemplu, dacă $g = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ atunci $\tau(\mathbf{i}) = N$ și deci foile foliației determinate de $\omega = \theta^1 + g\theta^2$ au curbura medie constantă $\frac{1}{2}$.

Teorema 4.9. *Foile sunt biarmonice dacă și numai dacă ele sunt armonice.*

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \tau_2(\mathbf{i}) &= \nabla_u \nabla_u \tau(\mathbf{i}) - \nabla_{\nabla_u^F} \tau(\mathbf{i}) + \frac{1}{1+g^2} \{ \nabla_v \nabla_v \tau(\mathbf{i}) - \nabla_{\nabla_v^F} \tau(\mathbf{i}) \} \\ &\quad + \text{Ricci } \tau(\mathbf{i}) \\ &= \tau_2(\mathbf{i})_u u + \tau_2(\mathbf{i})_v v + \tau_2(\mathbf{i})_N N. \end{aligned}$$

Printr-un calcul direct obținem

$$\begin{aligned} (1+g^2)\tau_2(\mathbf{i})_u &= \frac{g^2-1}{\sqrt{1+g^2}}vf - 3gf^2 \\ &= \frac{1-g^2}{(1+g^2)^2}v(vg) - 3gf^2(2-g^2), \end{aligned}$$

iar

$$\begin{aligned} \tau_2(\mathbf{i})_N &= u(uf) - \frac{(1-g^2)^2}{4(1+g^2)^2}f \\ &\quad + \frac{1}{1+g^2} \left\{ v(vf) - \frac{(1-g^2)^2}{4(1+g^2)}f + \frac{vg}{\sqrt{1+g^2}}f^2 - g(uf) - \frac{(vg)(vf)}{1+g^2}g \right\} \\ &\quad + \frac{1-g^2}{2(1+g^2)}f. \end{aligned}$$

Presupunem acum că \mathbf{i} este biarmonică și non-armonică. Deoarece

$$uf = \frac{3g}{1+g^2}f, \quad u(uf) = \frac{12g^2-3}{(1+g^2)^2}f,$$

folosind

$$vf = 3\frac{\sqrt{1+g^2}}{g^2-1}gf^2, \quad \frac{1}{1+g^2}v(vf) = 3\frac{9g^2+1}{(1-g^2)^2}f^3,$$

obținem

$$(4.4) \quad 0 = \tau_2(\mathbf{i})_N = f\left\{\frac{-g^4+10g^2-3}{(1+g^2)^2} + \frac{2g^4+26g^2+2}{(1-g^2)^2}f^2\right\}.$$

Din $\tau_2(\mathbf{i})_u = 0$ rezultă că

$$\frac{1-g^2}{(1+g^2)^2}v(vg) - 3gf^2(2-g^2) = 0,$$

deci obținem

$$(4.5) \quad vg = C(1-g^2)^{-\frac{3}{4}}(1+g^2)^{\frac{9}{4}}, \quad f^2 = C\frac{(1+g^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-g^2)^{\frac{3}{2}}},$$

unde C este o constantă pozitivă. Acum, din (4.4) și din a doua ecuația a lui (4.5) rezultă că g satisface o ecuație polinomială cu coeficienți constanți, deci g este constantă. Dar aceasta este o contradicție deoarece $e_1g = -1$. \square

C) Fie 1-forma ω dată de

$$\omega = -(\sin \varphi)g\theta^1 + (\cos \varphi)g\theta^2 - \theta^3,$$

unde $\varphi \in \mathbb{R}$. Considerăm rotația în jurul axei Oz

$$R_\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad R_\varphi(x, y, z) = ((\cos \varphi)x - (\sin \varphi)y, (\sin \varphi)x + (\cos \varphi)y, z),$$

și 1-forma $\tilde{\omega}$ dată de

$$\tilde{\omega} = \tilde{g}\theta^2 - \theta^3,$$

unde $\tilde{g} = g \circ R_\varphi$. Deoarece R_φ este o izometrie, iar $dR_\varphi(\ker \tilde{\omega}) = \ker \omega$, avem același tip de rezultat pentru ω ca și pentru $\tilde{\omega}$. Notăm că pentru $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ obținem $\omega = g\theta^1 - \theta^3$.

Incheiem această secțiune reamintind următorul rezultat

Teorema 4.10 ([2]). *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație biarmonică. Dacă ϕ este armonică pe o submulțime deschisă V a lui M , atunci ea este armonică.*

Acum, folosind rezultatul de mai sus, din cazurile A), B), C), rezultă

Teorema 4.11. *Fie M o suprafață în H_3 . Presupunem că există o submulțime deschisă V a lui M astfel încât câmpul normal $N = N^1e_1 + N^2e_2 + N^3e_3$ la M în H_3 satisface pe V una din următoarele ipoteze*

(A) $N^1 = 0,$

(B) $N^2 = 0,$

(C) $N^3 = 0,$

(D) $N = age_1 + bge_2 - e_3$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$, iar $g \in C^\infty(V)$.

Atunci M este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.

BIBLIOGRAFIE

- [1] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of \mathbb{S}^3* , Internat. J. Math., 12 (2001), no. 8, 867-876.
- [2] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, va apărea în Israel J. Math., 2002.
- [3] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu, *On biharmonic submanifolds of the Heisenberg group*, preprint.
- [4] P. Piu, A. Sanini, *One-parameter subgroups and minimal surfaces in the Heisenberg group*, Note di Matematica Vol. 18-n. 1, 143-153 (1998).
- [5] A. Sanini, *Gauss map of a surface of the Heisenberg group*, Bollettino U.M.I. (7) 11-B (1997), Suppl. fasc. 2, 79-93.

CAPITOLUL IX

A DOUA FORMULĂ VARIAȚIONALĂ PENTRU APLICAȚII BIARMONICE

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom studia variația a doua a bienergiei pentru aplicații biarmonice cu valori în sfera \mathbb{S}^n . Mai întâi vom găsi expresia hessianei pentru o aplicație biarmonică $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ (Teorema 2.1), apoi vom particulariza pentru cazul cel mai natural $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ imersie riemanniană armonică, arătând că ea este slab stabilă și găsim forma nucleului (Corolarul 2.2). În continuare vom considera cele mai simple aplicații biarmonice cu valori în \mathbb{S}^n , și anume: aplicația identitate $\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ și aplicația incluziune $\mathbf{i} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$. Acestea fiind aplicații total geodezice, ele sunt armonice și deci sunt slab stabile, și vom calcula nulitatea lor (Teorema 2.4 și Teorema 2.5).

Aceste rezultate constituie obiectul lucrării **On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere**, de C. Oniciuc, acceptată spre publicare în *Publicationes Mathematicae Debrecen*.

2. A DOUA FORMULĂ VARIAȚIONALĂ PENTRU BIENERGIE

Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație netedă între două varietăți riemanniene. Presupunem că M este compactă și orientabilă. Reamintim că *bienergia* este dată de

$$E_2(\phi) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g,$$

iar $\tau_2(\phi)$ este dat de

$$(2.1) \quad \tau_2(\phi) = -\Delta\tau(\phi) - \text{trace } R^N(d\phi \cdot, \tau(\phi))d\phi \cdot \cdot$$

Presupunem acum că $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ este o aplicație biarmonică. Considerăm o variație netedă a sa $\{\phi_{s,t}\}_{s,t \in \mathbb{R}}$ cu doi parametri s și t , i.e. considerăm aplicația Φ dată de

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad \Phi(s, t, p) = \phi_{s,t}(p),$$

unde $\Phi(0, 0, p) = \phi_{0,0}(p) = \phi(p)$, $\forall p \in M$.

Câmpurile vectoriale variaționale corespunzătoare acestei variații, V și W , sunt date de

$$V(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \phi_{s,0}(p) = d\Phi_{(0,0,p)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) \in T_{\phi(p)}\mathbb{S}^n,$$

și

$$W(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_{0,t}(p) = d\Phi_{(0,0,p)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \in T_{\phi(p)} \mathbb{S}^n.$$

V și W sunt secțiuni în $\phi^{-1}T\mathbb{S}^n$, i.e. $V, W \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$.

Hessiana lui E_2 în punctul sau critic ϕ este definită de

$$H(E_2)_\phi(V, W) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(s,t)=(0,0)} E_2(\phi_{s,t}).$$

Următorul rezultat ne dă forma explicită a hessienei.

Teorema 2.1. *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ o aplicație biarmonică. Atunci hessiana bienergiei E_2 în ϕ este dată de*

$$H(E_2)_\phi(V, W) = \int_M \langle I(V), W \rangle v_g,$$

unde

$$\begin{aligned} I(V) &= \Delta(\Delta V) + \Delta\{\text{trace} \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot - |d\phi|^2 V\} \\ &\quad + 2 \langle d\tau(\phi), d\phi \rangle V + |\tau(\phi)|^2 V \\ &\quad - 2 \text{trace} \langle V, d\tau(\phi) \cdot \rangle d\phi \cdot - 2 \text{trace} \langle \tau(\phi), dV \cdot \rangle d\phi \cdot \\ &\quad - \langle \tau(\phi), V \rangle \tau(\phi) + \text{trace} \langle d\phi \cdot, \Delta V \rangle d\phi \cdot \\ &\quad + \text{trace} \langle d\phi \cdot, \text{trace} \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot \\ &\quad - 2|d\phi|^2 \text{trace} \langle d\phi \cdot, V \rangle d\phi \cdot \\ (2.2) \quad &\quad + 2 \langle dV, d\phi \rangle \tau(\phi) - |d\phi|^2 \Delta V + |d\phi|^4 V. \end{aligned}$$

Demonstrație. Vom începe prin a calcula $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} E_2(\phi_{s,t})$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} E_2(\phi_{s,t}) &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} \int_M |\tau(\phi_{s,t})|^2 v_g \\ &= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_{s,t}), \tau(\phi_{s,t}) \rangle \Big|_{t=0} v_g. \end{aligned}$$

Pentru a calcula $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_{s,t})$, fie $\{X_i\}_{i=1}^m$ o bază geodezică într-un punct arbitrar $p \in M$. Obținem

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_{s,t}) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} d\phi_{s,t}(X_i) - d\phi_{s,t}(\nabla_{X_i} X_i)) \right\} \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left\{ \sum_{i=1}^m (\nabla_{X_i} d\Phi_s(X_i) - d\Phi_s(\nabla_{X_i} X_i)) \right\}, \end{aligned}$$

unde $\Phi_s(t, p) = \Phi(s, t, p)$. Mai departe folosim formula

$$\nabla_{\tilde{X}} d\Phi_s(\tilde{Y}) - \nabla_{\tilde{Y}} d\Phi_s(\tilde{X}) = d\Phi_s([\tilde{X}, \tilde{Y}]), \quad \forall \tilde{X}, \tilde{Y} \in C(\Phi_s^{-1}T\mathbb{S}^n),$$

și obținem, în p și pentru $t = 0$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \tau(\phi_{s,t}) &= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{X_i} d\Phi_s(X_i) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_s(\nabla_{X_i} X_i) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{X_i} d\Phi_s(X_i) - \nabla_{\nabla_{X_i} X_i} d\Phi_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) - d\Phi_s\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, \nabla_{X_i} X_i\right]\right) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla_{X_i} d\Phi_s(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ R^{\mathbb{S}^n} \left(d\Phi_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), d\Phi_s(X_i) \right) d\Phi_s(X_i) + \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{X_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} d\Phi_s(X_i) + \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial t}, X_i\right]} d\Phi_s(X_i) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m \left\{ R^{\mathbb{S}^n} (W_s, d\Phi_s(X_i)) d\Phi_s(X_i) + \right. \\
&\quad \left. + \nabla_{X_i} (\nabla_{X_i} d\Phi_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + d\Phi_s\left(\left[\frac{\partial}{\partial t}, X_i\right]\right)) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n} (W_s, d\Phi_s(X_i)) d\Phi_s(X_i) + \sum_{i=1}^m \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} W_s \\
&= -\Delta W_s - \sum_{i=1}^m R^{\mathbb{S}^n} (d\Phi_s(X_i), W_s) d\Phi_s(X_i),
\end{aligned}$$

unde

$$W_s(p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_{s,t}(p) = d\Phi_{s,(0,p)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \quad W_s \in C(\phi_{s,0}^{-1}T\mathbb{S}^n), \quad W_0 = W.$$

Deci $\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} E_2(\phi_{s,t})$ este dat de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} E_2(\phi_{s,t}) &= \int_M \langle -\Delta W_s - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n} (d\phi_{s,0\cdot}, W_s) d\phi_{s,0\cdot}, \tau(\phi_{s,0}) \rangle v_g \\
&= \int_M \langle -\Delta \tau(\phi_{s,0}) - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n} (d\phi_{s,0\cdot}, \tau(\phi_{s,0})) d\phi_{s,0\cdot}, W_s \rangle v_g.
\end{aligned}$$

Cum ϕ este biarmonică, din (2.1) rezultă

$$\begin{aligned}
H(E_2)_\phi(V, W) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \int_M \langle -\Delta \tau(\phi_{s,0}) - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n} (d\phi_{s,0\cdot}, \tau(\phi_{s,0})) d\phi_{s,0\cdot}, W_s \rangle v_g \\
&= \int_M \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \{ -\Delta \tau(\phi_{s,0}) - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n} (d\phi_{s,0\cdot}, \tau(\phi_{s,0})) d\phi_{s,0\cdot} \} \Big|_{s=0}, W \rangle v_g \\
&= \int_M \langle I(V), W \rangle v_g,
\end{aligned}$$

unde

$$(2.3) \quad I(V) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \{ -\Delta \tau(\phi_{s,0}) - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n} (d\phi_{s,0\cdot}, \tau(\phi_{s,0})) d\phi_{s,0\cdot} \} \Big|_{s=0}.$$

În continuare, cum

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tau(\phi_{s,0}) \Big|_{s=0} = -\Delta V - \text{trace } R^{\mathbb{S}^n}(d\phi \cdot, V)d\phi \cdot$$

și

$$\text{trace } R^{\mathbb{S}^n}(d\phi \cdot, V)d\phi \cdot = \text{trace } \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot - |d\phi|^2 V,$$

obținem

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \{-\Delta \tau(\phi_{s,0})\} \Big|_{s=0} &= \Delta(\Delta V) + \Delta\{\text{trace } \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot - |d\phi|^2 V\} \\ &\quad + 2 \langle d\tau(\phi), d\phi \cdot \rangle V + |\tau(\phi)|^2 V \\ &\quad + \text{trace } \langle \tau(\phi), d\phi \cdot \rangle dV \cdot - 2 \text{trace } \langle V, d\tau(\phi) \cdot \rangle d\phi \cdot \\ &\quad - \text{trace } \langle \tau(\phi), dV \cdot \rangle d\phi \cdot - \langle \tau(\phi), V \rangle \tau(\phi), \end{aligned} \tag{2.4}$$

și

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \{-\text{trace } R^{\mathbb{S}^n}(d\phi_{s,0} \cdot, \tau(\phi_{s,0}))d\phi_{s,0} \cdot\} \Big|_{s=0} &= \\ -\text{trace } \langle \tau(\phi), dV \cdot \rangle d\phi \cdot + \text{trace } \langle d\phi \cdot, \Delta V \rangle d\phi \cdot \\ + \text{trace } \langle d\phi \cdot, \text{trace } \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot \\ - |d\phi|^2 \text{trace } \langle d\phi \cdot, V \rangle d\phi \cdot - \text{trace } \langle \tau(\phi), d\phi \cdot \rangle dV \cdot \\ + 2 \langle dV, d\phi \cdot \rangle \tau(\phi) - |d\phi|^2 \Delta V - |d\phi|^2 \text{trace } \langle V, d\phi \cdot \rangle d\phi \cdot + |d\phi|^4 V. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Înlocuind acum (2.4) și (2.5) în (2.3), obținem (2.2). \square

Vom particulariza rezultatul de mai sus pentru cea mai naturală situație.

Corolarul 2.2. *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$ o imersie riemanniană armonică. Atunci operatorul I corespunzător lui ϕ este simetric, semi-pozitiv, iar*

$$\ker I = \{V \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n) \mid \Delta V = mV - V^T\}, \tag{2.6}$$

unde $V = V^T + V^N$, $V^T \in C(TM)$ și $V^N \in C(NM)$.

Demonstrație. Din (2.2) rezultă

$$\begin{aligned} I(V) &= \Delta(\Delta V) - 2m\Delta V + m^2V \\ &\quad + \Delta V^T + (\Delta V)^T + (1 - 2m)V^T. \end{aligned}$$

Prima oară arătăm că I este simetric, i.e. $(I(V), W) = (V, I(W))$, $\forall V, W \in C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$, unde $(V, W) = \int_M \langle V, W \rangle v_g$ este produsul scalar uzual pe spațiul vectorial real $C(\phi^{-1}T\mathbb{S}^n)$. Cum Δ este un operator simetric și $\langle V^T, W \rangle = \langle W^T, V \rangle$, pentru a arăta că I este simetric trebuie să demonstrăm că

$$\int_M \langle \Delta V^T + (\Delta V)^T, W \rangle v_g = \int_M \langle \Delta W^T + (\Delta W)^T, V \rangle v_g.$$

Dar

$$\begin{aligned}\int_M \langle \Delta V^T, W \rangle v_g &= \int_M \langle V^T, \Delta W \rangle v_g = \int_M \langle V^T, (\Delta W)^T \rangle v_g \\ &= \int_M \langle V, (\Delta W)^T \rangle v_g,\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\int_M \langle (\Delta V)^T, W \rangle v_g &= \int_M \langle (\Delta V)^T, W^T \rangle v_g = \int_M \langle \Delta V, W^T \rangle v_g \\ &= \int_M \langle V, \Delta W^T \rangle v_g.\end{aligned}$$

Deci I este un operator simetric.

Pentru a arăta că J este semi-pozitiv, i.e. $(I(V), V) \geq 0$, vom face mai întâi următoarele observații

$$\int_M \langle \Delta V^T, V \rangle v_g = \int_M \langle (\Delta V)^T, V \rangle v_g,$$

și

$$\begin{aligned}I(V) &= \Delta \Delta V^T + \Delta \Delta V^N - 2m \Delta V^T - 2m \Delta V^N + m^2 V^T + m^2 V^N \\ &\quad + \Delta V^T + (\Delta V)^T + (1 - 2m) V^T.\end{aligned}$$

Prin urmare avem

$$\begin{aligned}(I(V), V) &= \int_M \{ \langle \Delta(\Delta V^T), V \rangle + 2(1 - m) \langle \Delta V^T, V \rangle + (m - 1)^2 \langle V^T, V \rangle \\ &\quad + \langle \Delta(\Delta V^N), V \rangle - 2m \langle \Delta V^N, V \rangle + m^2 \langle V^N, V \rangle \} v_g \\ &= \int_M \{ \langle \Delta(\Delta V^T), V^T \rangle + 2(1 - m) \langle \Delta V^T, V^T \rangle + (m - 1)^2 |V^T|^2 \\ &\quad + \langle \Delta(\Delta V^N), V^N \rangle - 2m \langle \Delta V^N, V^N \rangle + m^2 |V^N|^2 \\ &\quad + \langle \Delta(\Delta V^T), V^N \rangle + 2(1 - m) \langle \Delta V^T, V^N \rangle \\ &\quad + \langle \Delta(\Delta V^N), V^T \rangle - 2m \langle \Delta V^N, V^T \rangle \} v_g \\ &= \int_M \{ |\Delta V^T + (1 - m)V^T|^2 + |\Delta V^N - mV^N|^2 \\ &\quad + 2(\langle \Delta V^T, \Delta V^N \rangle + (1 - 2m) \langle \Delta V^T, V^N \rangle) \} v_g \\ &= \int_M |\Delta V^T + (1 - m)V^T + \Delta V^N - mV^N|^2 v_g \\ &= \int_M |\Delta V - mV + V^T|^2 v_g.\end{aligned}$$

Din relația de mai sus rezultă că I este semi-pozitiv, iar $\ker I$ este dat de (2.6). \square

Observația 2.3. Cum o aplicație armonică este un minim absolut pentru E_2 , rezultatul de mai sus este firesc.

În continuare vom considera cele mai simple două cazuri de aplicații biarmonice $\phi : (M, g) \rightarrow \mathbb{S}^n$. Aceste aplicații sunt imersii riemanniene armonice, deci ele sunt slab stabile, i.e. operatorul I este semi-pozitiv. Va rămâne atunci de calculat nulitatea lor.

Teorema 2.4. *Aplicația identitate $\mathbf{1} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ este slab stabilă și*

- a) *dacă $n = 2$ atunci $\text{nullity}(\mathbf{1}) = 6$,*
- b) *dacă $n > 2$ atunci $\text{nullity}(\mathbf{1}) = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Demonstrație. În acest caz $C(\mathbf{1}^{-1}T\mathbb{S}^n) = C(T\mathbb{S}^n)$ și $\Delta V = -\text{trace} \nabla^2 V$. Vom folosi X pentru a nota un câmp vectorial tangent la \mathbb{S}^n . Din Corolarul 2.2, operatorul I este dat de

$$I(X) = \Delta(\Delta X) - 2(n-1)\Delta X + (n-1)^2 X,$$

și

$$I(X) = 0 \Leftrightarrow \Delta X = (n-1)X.$$

Teorema de descompunere a lui Hodge pentru $C(T\mathbb{S}^n)$ afirmă că

$$C(T\mathbb{S}^n) = \{X \in C(T\mathbb{S}^n) \mid \text{div} X = 0\} \oplus \{\text{grad} f \mid f \in C^\infty(\mathbb{S}^n)\}.$$

Această descompunere a lui $C(T\mathbb{S}^n)$ este ortogonală în raport cu produsul scalar de pe spațiul vectorial real $C(T\mathbb{S}^n)$, iar Δ_H conservă invariant aceste subspații, unde, folosind izomorfismele muzicale,

$$\Delta_H(X) = (\overline{\Delta} X^\flat)^\sharp,$$

$\overline{\Delta}$ fiind laplacianul ce acționează pe $\Lambda^1(\mathbb{S}^n)$.

Se știe că

$$\Delta X = \Delta_H(X) - (n-1)X$$

(vezi [1, 6]), deci

$$I(X) = 0 \Leftrightarrow \Delta_H(X) = 2(n-1)X.$$

Din teorema de descompunere a lui Hodge putem scrie $X = Y + \text{grad} f$, $\text{div} Y = 0$, și obținem

$$\Delta_H(X) = 2(n-1)X \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_H(Y) = 2(n-1)Y \\ \Delta_H \text{grad} f = 2(n-1) \text{grad} f. \end{cases}$$

Prin urmare

$$J(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Y \text{ este un câmp Killing} \\ \Delta f = 2(n-1)f. \end{cases}$$

Se știe că primele valori proprii ale lui Δ ce acționează pe $C^\infty(\mathbb{S}^n)$ sunt 0 , n , $2(n+1)$, iar valoarea proprie n are multiplicitatea $n+1$. Deci $2(n-1)$ este valoare proprie dacă și numai dacă $n = 2$, și în acest caz, multiplicitatea ei este 3.

Este bine cunoscut faptul că

$$\dim\{Y \in C(T\mathbb{S}^n) \mid Y \text{ este un câmp Killing}\} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Cu aceasta demonstrația se încheie. □

Teorema 2.5. *Aplicația de incluziune $\mathbf{i} : \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n$ este slab stabilă și*

- a) *dacă $m = 2$ atunci $\text{nullity}(\mathbf{i}) = 3n$,*
 b) *dacă $m > 2$ atunci $\text{nullity}(\mathbf{i}) = (n - m)(m + 1) + \frac{m(m+1)}{2}$.*

Demonstrație. Fie $V \in C(NS^m)$ și $X, Y \in C(TS^m)$. Deoarece \mathbf{i} este o aplicație total geodezică, rezultă că

$$\nabla_X V = \nabla_X^\perp V, \Delta V = \Delta^\perp V, \nabla_X Y = \nabla_X Y, \Delta X = -\text{trace}^{\mathbb{S}^m} \nabla^2 X.$$

Din nou, din Corolarul 2.2, operatorul I este dat de

$$\begin{cases} I(V) = \Delta^\perp(\Delta^\perp V) - 2m\Delta^\perp V + m^2 V \in C(NS^m) \\ I(X) = \Delta(\Delta X) - 2(m-1)\Delta X + (m-1)^2 X \in C(TS^m), \end{cases}$$

iar

$$\begin{cases} I(V) = 0 \Leftrightarrow \Delta^\perp V = mV \\ I(X) = 0 \Leftrightarrow \Delta X = (m-1)X. \end{cases}$$

Fie acum $\{E_{m+1}, \dots, E_n\}$ câmpurile vectoriale care dau trivializarea lui NS^m . Avem

$$(2.7) \quad \nabla_X E_{m+1} = \dots = \nabla_X E_n = 0, \quad \forall X \in C(TS^m).$$

Cum orice $V \in C(NS^m)$ poate fi scris ca

$$V = f^1 E_{m+1} + \dots + f^{n-m} E_n,$$

unde $f^1, \dots, f^{n-m} \in C^\infty(\mathbb{S}^m)$, din (2.7) obținem

$$\Delta^\perp V = mV \Leftrightarrow \Delta f^1 = m f^1, \dots, \Delta f^{n-m} = m f^{n-m}.$$

Prin urmare obținem

$$\dim\{V \in C(NS^m) | I(V) = 0\} = (n - m)(m + 1).$$

Folosind acum Teorema 2.4 obținem concluzia dorită. \square

BIBLIOGRAFIE

- [1] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).
- [2] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.
- [3] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [4] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere*, va apărea în Publicaiones Mathematicae Debrecen.
- [5] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.
- [6] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Translations of Mathematical Monographs, 1993, vol. 132.

CAPITOLUL X

SUBMERSII RIEMANNIENE BIARMONICE

1. INTRODUCERE

În acest capitol vom studia submersiile riemanniene biarmonice. Mai întâi vom da formula de caracterizare a submersiilor riemanniene biarmonice ce au câmpul de tensiune bazic (Teorema 2.1). Apoi vom da câteva rezultate privind non-existența submersiilor riemanniene biarmonice și non-armonice. Rezultatul principal al acestui capitol este o teoremă ce dă exemple de submersii riemanniene biarmonice și non-armonice (Teorema 2.9). Vom încheia cu studiul biarmonicității proiecției canonice $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$, care este o submersie riemanniană, unde g^S este o metrică riemanniană de tip Sasaki pe fibratul tangent.

Aceste rezultate sunt cuprinse în lucrarea **Biharmonic maps between Riemannian manifolds**, de C. Oniciuc, va apărea în *An. Stiint. "A.I. Cuza" Iasi*.

2. SUBMERSII RIEMANNIENE BIARMONICE

Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o submersie riemanniană și fie $p \in M$; avem $T_p M = T_p^H M \oplus T_p^V M$, unde $T_p^V M = \ker d\phi_p$, iar $T_p^H M$ este complementul ortogonal al lui $T_p^V M$ în raport cu metrica g . Fie W o submulțime deschisă în N astfel încât $\phi(p) \in W$. Notăm $U = \phi^{-1}(W)$ și fie $\{\tilde{X}_\alpha\}$ un câmp de repere ortonormate pe W . Considerăm $X_\alpha = (\tilde{X}_\alpha)^H$ și $\{X_a\}_{a=n+1}^m$ un câmp de repere ortonormate în $T^V U$. Avem relația cunoscută (de exemplu vezi [3])

$$\tau(\phi)(p) = - \sum_{a=n+1}^m d\phi_p(\nabla_{X_a} X_a) = -(m-n)d\phi_p(H(p)),$$

unde $H(p)$ câmpul vectorial curbură medie, în p , al subvarietății $\phi^{-1}(\phi(p)) \subset M$.

În tot acest capitol vom presupune că ϕ are câmpul de tensiune bazic, i.e. $\tau(\phi)(p) = \tau(\phi)(q)$ ori de câte ori $\phi(p) = \phi(q)$. Deci $\tau(\phi)$ poate fi gândit ca un câmp vectorial pe N .

Teorema 2.1. *Fie $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o submersie riemanniană având câmpul de tensiune bazic. Atunci*

$$(2.1) \quad \tau_2(\phi) = \text{trace}^N \nabla^2 \tau(\phi) + {}^N \nabla_{\tau(\phi)} \tau(\phi) + \text{Ricci}^N \tau(\phi).$$

Demonstrație. Folosind câmpurile de baze ortonormate definite anterior $\{X_i\}_{i=1}^m$ și $\{\tilde{X}_\alpha\}_{\alpha=1}^n$, obținem

$$\begin{aligned}
\text{trace } \nabla^2 \tau(\phi) &= \sum_{\alpha=1}^n \{ \nabla_{X_\alpha}^{\phi^{-1}(TN)} \nabla_{X_\alpha}^{\phi^{-1}(TN)} \tau(\phi) - \nabla_{\nabla_{X_\alpha} X_\alpha}^{\phi^{-1}(TN)} \tau(\phi) \} \\
&\quad + \sum_{a=n+1}^n \{ \nabla_{X_a}^{\phi^{-1}(TN)} \nabla_{X_a}^{\phi^{-1}(TN)} \tau(\phi) - \nabla_{\nabla_{X_a} X_a}^{\phi^{-1}(TN)} \tau(\phi) \} \\
&= \sum_{\alpha=1}^n \{ {}^N \nabla_{\tilde{X}_\alpha} {}^N \nabla_{\tilde{X}_\alpha} \tau(\phi) - {}^N \nabla_{d\phi(\nabla_{X_\alpha} X_\alpha)} \tau(\phi) \} \\
&\quad + \sum_{a=n+1}^n \{ {}^N \nabla_{-d\phi(\nabla_{X_a} X_a)} \tau(\phi) \} \\
&= \text{trace}^N \nabla^2 \tau(\phi) + {}^N \nabla_{\tau(\phi)} \tau(\phi),
\end{aligned}$$

și

$$\text{trace } R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi = -\text{Ricci}^N(\tau(\phi)).$$

Prin urmare, înlocuind valorile lui $\text{trace } \nabla^2 \tau(\phi)$ și $\text{trace } R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi$ în expresia lui $\tau_2(\phi)$, obținem relația dorită. \square

În continuare vom da câteva rezultate privind non-existența submersiilor riemanniene biarmonice.

Teorema 2.2. *Presupunem că M este compactă și orientabilă, iar $\text{Ricci}^N \leq 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.*

Demonstrație. Dacă ϕ este biarmonică, atunci din formula lui Weitzenböck obținem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta |\tau(\phi)|^2 &= \langle \Delta \tau(\phi), \tau(\phi) \rangle - |d\tau(\phi)|^2 \\
&= \langle \text{Ricci}^N \tau(\phi), \tau(\phi) \rangle - |d\tau(\phi)|^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Cum M este compactă, iar $\text{Ricci}^N \leq 0$, aplicând principiul de maxim rezultă $d\tau(\phi) = 0$. Încheiem prin

$$0 = \int_M \langle d\tau(\phi), d\phi \rangle v_g = \int_M \langle \tau(\phi), d^* d\phi \rangle v_g = - \int_M |\tau(\phi)|^2 v_g,$$

\square

Propoziția 2.3. *Presupunem că $\text{Ricci}^N < 0$. Dacă $|\tau(\phi)| = \text{constant}$, atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.*

Propoziția 2.4. *Presupunem că N este compactă, iar $\text{Ricci}^N < 0$. Atunci ϕ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.*

Demonstrație. Presupunem că ϕ este biarmonică. Din nou, din formula lui Weitzenböck, rezultă

$$\frac{1}{2} \Delta |\tau(\phi)|^2 \leq 0,$$

unde Δ acționează pe $C^\infty(M)$. Cum $\tau(\phi)$ poate fi gândit ca un câmp vectorial pe N , iar N este compactă, atunci $\exists p_0 \in M$ astfel încât $|\tau(\phi)|(p_0) \geq |\tau(\phi)|(p)$, $\forall p \in M$. Deci folosind principiul de maxim și faptul că $\text{Ricci}^N < 0$, din formula lui Weitzenböck rezultă că ϕ este armonică. \square

Vom da acum două rezultate privind existența submersiilor riemanniene biarmonice.

Propoziția 2.5. *Presupunem că $\text{Ricci}^N = 0$. Dacă $\tau(\phi) \neq 0$ și ${}^N\nabla\tau(\phi) = 0$, atunci ϕ este o submersie riemanniană biarmonică și non-armonică.*

Observația 2.6. Dacă ${}^N\nabla\tau(\phi) = 0$ și $\tau(\phi) \neq 0$, atunci $\tau(\phi)$ este un câmp vectorial pe N fără singularități. Sunt bine cunoscute următoarele rezultate (de exemplu vezi [4]). Dacă M este compactă și orientabilă, existența unui câmp vectorial fără singularități este echivalentă cu anularea caracteristicii sale Euler-Poincaré. Dacă M este compactă, orientabilă și de dimensiune impară, atunci caracteristica sa Euler-Poincaré se anulează.

Observația 2.7. Referitor la existența câmpurilor vectoriale paralele pe varietăți Ricci-plate avem următorul rezultat cunoscut (de exemplu vezi [1]).

Teorema 2.8. *Fie (M, g) o varietate riemanniană orientabilă, compactă și Ricci-plată, i.e. $\text{Ricci} = 0$. Atunci $\dim\{X \in C(TM) | \nabla X = 0\} = b_1(M)$, unde $b_1(M)$ este primul număr al lui Betti. Mai mult, $b_1(M) \leq m$ și avem egalitate dacă și numai dacă (M, g) este izometrică cu un tor plat.*

Teorema 2.9. *Presupunem că $\text{Ricci}^N > 0$. Dacă $|\tau(\phi)| = \text{constant}$ și $\tau(\phi)$ este un câmp Killing pe N , atunci ϕ este biarmonică.*

Demonstrație. Ipoteza $\tau(\phi)$ câmp Killing implică

$$\text{trace}^N \nabla^2 \tau(\phi) + \text{Ricci}^N(\tau(\phi)) = 0,$$

iar dacă, în plus, $\tau(\phi)$ are norma constantă, obținem ${}^N\nabla_{\tau(\phi)}\tau(\phi) = 0$. Cu aceasta demonstrația se încheie. \square

Observația 2.10. Pe sfera unitate euclidiană de dimensiune impară se pot construi câmpuri Killing unitare.

3. BIARMONICITATEA PROIECȚIEI CANONICE $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$

În această secțiune vom studia biarmonicitatea proiecției canonice $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$ obținând exemple ce verifică ipotezele Propoziției 2.5 și Teoremei 2.9.

Fie (M, g) o varietate riemanniană m -dimensională și fie $\pi : TM \rightarrow M$ fibratul ei tangent. În Capitolul 2, subsecțiunea 2.1., am definit, prin intermediul unei conexiuni neliniare arbitrare pe fibratul tangent, o metrică g^S de tip Sasaki pe TM prin

$$g^S(X^V, Y^V) = g^S(X^H, Y^H) = g(X, Y), \quad g^S(X^V, Y^H) = 0.$$

Notăm că proiecția canonică $\pi : (TM, g^S) \rightarrow (M, g)$ este o submersie riemanniană. Din Propoziția 2.4., Capitolul 2, avem

$$(3.1) \quad \begin{cases} S\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^i}} \frac{\partial}{\partial y^j} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial N_k^l}{\partial y^i} g_{lj} + \frac{\partial N_k^l}{\partial y^j} g_{li} \right) g^{kh} \frac{\delta}{\delta x^h} \\ S\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}} \frac{\delta}{\delta x^j} = \Gamma_{ij}^h \frac{\delta}{\delta x^h} + \frac{1}{2} R_{ji}^h \frac{\partial}{\partial y^h}, \end{cases}$$

unde Γ_{jk}^i sunt simbolii Christoffel, $N_j^i(x, y)$ sunt coeficienții de conexiune ai conexiunii neliniare considerate, iar $R_{jk}^i = \frac{\delta N_k^i}{\delta x^j} - \frac{\delta N_j^i}{\delta x^k}$.

În continuare vom considera următoarele trei cazuri

A) $N_j^i = \Gamma_{jk}^i y^k - B_j^i(x)$, unde $B_j^i(x)$ sunt componentele unui tensor pe M de tip $(1, 1)$. Din Propoziția 2.5., Capitolul 2, obținem

Corolarul 3.1. *Aplicația π este armonică și deci biarmonică.*

B) $N_j^i = (\Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \xi_k + \delta_k^i \xi_j) y^k$, unde ξ este un câmp vectorial pe M și $\xi_i = g_{ij} \xi^j$ (o schimbare proiectivă a conexiunii Levi-Civita ∇). Aplicând Teorema 2.1, obținem

$$(3.2) \quad \begin{cases} \tau(\pi) = -(m+1)\xi, \\ \tau_2(\pi) = -(m+1)\{\text{trace } \nabla^2 \xi + \text{Ricci}(\xi) - (m+1)\nabla_\xi \xi\}. \end{cases}$$

Prin urmare avem

Propoziția 3.2. a) *Dacă ξ este un câmp vectorial Killing de normă constantă, atunci π este biarmonică și non-armonică.*

b) *Dacă $\nabla \xi = 0$ și $\xi \neq 0$, atunci π este o aplicație biarmonică și non-armonică.*

C) $N_j^i = (\Gamma_{jk}^i + \delta_j^i \alpha_k + \delta_k^i \alpha_j - g_{jk} \alpha^i) y^k$, unde $\alpha_k = \frac{\partial f}{\partial x^k}$ și $f \in C^\infty(M)$, $f \neq \text{constant}$ (o schimbare conformă a conexiunii ∇). Din nou, aplicând Teorem 2.1, obținem

$$(3.3) \quad \begin{cases} \tau(\pi) = -m \text{grad } f, \\ \tau_2(\pi) = -m\{\text{trace } \nabla^2 \text{grad } f + \text{Ricci}(\text{grad } f) - m \nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f\}. \end{cases}$$

Deci concluzionăm

Propoziția 3.3. *Dacă M nu este compactă și orientabilă, iar f este un potențial Killing, atunci π este o aplicație biarmonică și non-armonică.*

BIBLIOGRAFIE

- [1] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
- [2] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).

- [3] J. Eells, A. Ratto, *Harmonic maps and minimal immersions with symmetries; Method of ordinary differential equations applied to elliptic variational problems*, Ann. Math. Studies 130, Princeton Univ. Press, 1993.
- [4] C. Godbillon, *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [5] C. Oniciuc, *Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N.6, 1999, 109-122.
- [6] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi.
- [7] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian Geometry*, M. Dekker, Inc. New-York, 1970.

BIBLIOGRAFIE GENERALĂ

- [1] A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
- [2] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds of S^3* , Internat. J. Math., 12 (2001), no. 8, 867-876.
- [3] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic submanifolds in spheres*, va apărea în Israel J. Math., 2002.
- [4] R. Caddeo, S. Montaldo, C. Oniciuc, *Biharmonic immersions into spheres*, va apărea în The Proceedings of the Conference on Differential Geometry, Valencia 2001.
- [5] R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu, *Biharmonic curves on a surface*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 21, Roma (2001), 143-157.
- [6] R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu, *On biharmonic maps*, Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray, M. Fernández, J.A. Wolf, Editors, Contemporary Mathematics, Volume 288.
- [7] R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu, *On biharmonic submanifolds of the Heisenberg group*, preprint.
- [8] R. Caddeo, A. Sanini, *Metriche armoniche indotte da campi vettoriali*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 57 (2), (1987), 123-130.
- [9] I.A. Calinov, C. Gherghe, *Pluriharmonic maps on tangent bundles of a Riemannian or Hermitian manifold*, Ann. Univ. Buc. 46 (1997), 3-8.
- [10] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [11] B.Y. Chen, *Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type*, Soochow J. math. 17 (1991), 169-188.
- [12] B.Y. Chen, S. Ishikawa, *Biharmonic pseudo-Riemannian submanifolds in pseudo-Euclidean spaces*, Kyushu J. Math. 52, 1998, pp. 167-185.
- [13] B.Y. Chen, T. Nagano, *Harmonic metrics, harmonic tensor and Gauss maps*, J. Math. Soc. Japan 36 (2) (1984), 295-313.
- [14] B.Y. Chen, K. Yano, *Minimal submanifolds of a higher dimensional sphere*, Tensor (N.S.), 22 (1971), 369-373.
- [15] M. Craioveanu, M. Puta, *Introducere în geometria spectrală*, Editura Academiei Române, 1988.
- [16] M. Dajczer, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Mathematics Lecture Series 13, Publish or Perish, 1990.
- [17] I. Dimitric, *Submanifolds of E^m with harmonic mean curvature vector*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 20 (1992), 53-65.
- [18] D.M. Duc, J. Eells, *On the regularity of biharmonic maps*, International Centre for Theoretical Physics, 1993, 410.
- [19] J. Eells, L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc., 10 (1978), 1-68.
- [20] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Conf. Board Math. Sci 50 (1983).
- [21] J. Eells, L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 385-524.
- [22] J. Eells, A. Ratto, *Harmonic maps and minimal immersions with symmetries; Method of ordinary differential equations applied to elliptic variational problems*, Ann. Math. Studies 130, Princeton Univ. Press, 1993.

- [23] J. Eells, J.H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 86 (1964), 109-160.
- [24] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Harmonic endomorphism fields*, Illinois J. Math. 41 (1997), 23-30.
- [25] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Tangent bundles of order r and harmonicity of induced maps*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 11-A (1997), 809-813.
- [26] E. García-Río, L. Vanhecke, M.E. Vázquez-Abal, *Harmonic connections*, Acta Sci. Math. (Szeged) 62 (1996), 583-607.
- [27] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale*, Vol. 2, Editura Academiei Române, 1979.
- [28] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Geometrie diferențială*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977.
- [29] C. Gherghe, *On some submanifolds with harmonic mean curvature vector field*, Math. Rep. (Buc.), 1 (51), (1999), no. 1, 47-51.
- [30] H. Gluck, *Geodesics in the unit tangent bundle of a round sphere*, L'Enseignement Mathématique, t.34 (1988), p. 233-246.
- [31] C. Godbillon, *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [32] T. Hasanis, T. Vlachos, *Hypersurfaces in \mathbb{E}^4 with harmonic mean curvature vector field*, Math. Nachr. 172 (1995), 145-169.
- [33] Z.H. Hou, *Hypersurfaces in a sphere with constant mean curvature*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 1193-1196.
- [34] S. Ianuș, *Geometrie diferențială cu aplicații în teoria relativității*, Editura Academiei Române, 1983.
- [35] S. Ianuș, L. Ornea, V. Vuletescu, *Holomorphic and harmonic maps of locally conformal Kaehler manifolds*, Boll. Un. Mat. Ital. A(7),9, (1995), no. 3, 569-579.
- [36] S. Ianuș, C. Udriște, *On the tangent bundle of a differentiable manifold*, Stud. Cerc. Mat. 22 (1970), 599-611.
- [37] T. Ishihara, *Harmonic sections of tangent bundles*, J. Math. Tokushima Univ., 13, 1979, 23-27.
- [38] G.Y. Jiang, *2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 2, 130-144.
- [39] G.Y. Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), no 4, 389-402.
- [40] J. Langer, D.A. Singer, *The total squared curvature of closed curves*, J. Differential Geometry, 20 (1984), 1-22.
- [41] H.B. Lawson, *Complete minimal surfaces in S^3* , Ann. of Math. (2) 92 (1970), 335-374.
- [42] R. Miron, M. Anastasiei, *Fibrat vectoriale. Spații Lagrange. Aplicații în teoria relativității*, Editura Academiei Române, 1987.
- [43] E. Musso, F. Tricerri, *Riemannian metrics on tangent bundles*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 150 (1988), 1-19.
- [44] O. Nouhau, *Applications harmoniques d'une variété riemannienne dans son fibré tangent. Généralisation*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris 284 (1977), 815-818.
- [45] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., 13 (1966), 459-469.
- [46] C. Oniciuc, *On the harmonic sections of tangent bundles*, An. Univ. Buc., 1, (1998), 67-72.
- [47] C. Oniciuc, *The tangent bundles and harmonicity*, An. St. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi, XLIII, (1997), (1), 151-172.
- [48] C. Oniciuc, *Nonlinear connections on tangent bundle and harmonicity*, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N.6, 1999, 109-122.
- [49] C. Oniciuc, *Pseudo-Riemannian metrics on tangent bundle and harmonic problems*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin, 7, 2000, 443-454.

- [50] C. Oniciuc, *Harmonic sections in the unitary tangent bundle*, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXIV (2001), No 3, 681-692.
- [51] C. Oniciuc, *Biharmonic maps between Riemannian manifolds*, va apărea în An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi.
- [52] C. Oniciuc, *On the second variation formula for biharmonic maps to a sphere*, va apărea în Publicationes Mathematicae Debrecen.
- [53] V. Oproiu, *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 59(2), (1989), 177-184.
- [54] V. Oproiu, *Harmonic maps between tangent bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 47 (1989), no. 1, 47-55.
- [55] V. Oproiu, N. Papaghiuc, *Some results on harmonic sections of cotangent bundles*, An. Stiint. Univ. "Al.I. Cuza" Iasi, Mat. (N.S.) 45 (1999), no. 2, 275-290.
- [56] V. Oproiu, N. Papaghiuc, *A Kaehler structure on the nonzero tangent bundle of a space form*, Differential Geometry and its Applications, 11, (1999), 1-12.
- [57] V. Oproiu, *A Locally Symmetric Kaehler Einstein Structure on the Tangent Bundle of a Space Form*, Contributions to Algebra and Geometry, 40, (1999), No. 2, 363-372.
- [58] V. Oproiu, *A Kaehler Einstein structure on the tangent bundle of a space form*, IJMMS, 25:3 (2001), 183-195.
- [59] V. Oproiu, *Some new geometric structures on the tangent bundle*, Publ. Math. Debrecen, 55/3-4 (1999), 261-281.
- [60] L. Ornea, A. Turtoi, *O introducecere în geometrie*, Fundația Theta, 2000.
- [61] N. Papaghiuc, *Another Kaehler structure on the tangent bundle of a space form*, Demonstratio Mathematica, Vol. 31, F. 4, 1998, 855-866.
- [62] N. Papaghiuc, *A locally symmetric pseudo-Riemannian structure on the tangent bundle*, Publ. Math. Debrecen, 59/3-4 (2001), 303-315.
- [63] P. Piu, *Campi di vettori ed applicazione armoniche*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 52(1), (1982), 85-94.
- [64] P. Piu, A. Sanini, *One-parameter subgroups and minimal surfaces in the Heisenberg group*, Note di Matematica Vol. 18-n. 1, 143-153 (1998).
- [65] A. Sanini, *Gauss map of a surface of the Heisenberg group*, Bollettino U.M.I. (7) 11-B (1997), Suppl. fasc. 2, 79-93.
- [66] J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 88 (1968), 62-105.
- [67] Ph. Tondeur, L. Vanhecke, *Harmonicity of a foliation and of an associated map*, Bull. Austral. Math. Soc. 54, (1996), 241-246.
- [68] F. Tricerri, L. Vanhecke, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 83, Cambridge University Press, 1983.
- [69] C. Udriște, *On almost coquaternion structures*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Mech. 17 (1972), no. 1, 11-20.
- [70] C. Udriște, *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds*, Kluwer Academic Publishers Group, 1994.
- [71] C. Udriște, *Geometric dynamics*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Springer Verlag, 24, 2000, 313-332; Kluwer Academic Publishers Group, 2000.
- [72] C. Udriște, *Nonclassical Lagrangian dynamics and potential maps*, Proceedings of the Conference on Mathematics in Honour of Professor Radu Roşca at the Occasion of his Ninetieth Birthday, Katholieke University Brussel, Katholieke University Leuven, Belgium, Dec. 11-16, 1999, <http://xxx.lanl.gov.math.DS/0007060>, 2000.
- [73] C. Udriște, *Solutions of DEs and PDEs as Potential Maps Using First Order Lagrangians*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 6, 1, 2001, pp.93-108.
- [74] C. Udriște, M. Postolache, *Atlas of Magnetic Geometric Dynamics*, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2001.
- [75] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Translations of Mathematical Monographs, 1993, Vol. 132.

- [76] J.L. Weiner, *On a Problem of Chen, Willmore, et al*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 27, No. 1, 1978, 19-35.
- [77] C.M. Wood, *On the Energy of a Unit Vector Field*, Geometriae Dedicata, 64(1997), 319-330.
- [78] Y.L. Xin, *Geometry of Harmonic Maps*, Birkhäuser Boston, 1996.
- [79] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian Geometry*, M. Dekker, Inc. New-York, 1970.
- [80] K. Yano, S. Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundle*, M. Dekker, New York, 1973.
- [81] K. Yano, T. Nagano, *On geodesic vector fields in a compact orientable Riemannian space*, Comment. Math. Helv. 35 (1), (1961), 55-64.