Differential Geometry - Dynamical Systems
*** **Monographs** # 4 ***

Peter Kellersch

The Iwasawa decomposition for the untwisted group of loops in semisimple Lie groups

Eine Verallgemeinerung der Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen

Ph.D. Thesis, Technische Universität Münich 1999

Geometry Balkan Press
Bucharest, Romania

The Iwasawa decomposition for the untwisted group of loops in semisimple Lie groups [Eine Verallgemeinerung der Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen] (German) * Monographs # 4

Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs # 4
Editor-in-Chief Prof.Dr. Constantin Udrişte
Managing Editor Prof.Dr. Vladimir Balan
University Politehnica of Bucharest

The Iwasawa decomposition for the untwisted group of loops in semisimple Lie groups [Eine Verallgemeinerung der Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen] (German), Peter Kellersch. Bucharest. Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2004

Includes bibliographical references.

Einleitung

Den Ausgangspunkt für diese Arbeit bildet eine Methode von J. Dorfmeister, F. Pedit und H. Wu (DPW-Methode) zur Konstruktion aller Flächen konstanter, mittlerer Krümmung $H \neq 0$. Diese Methode wurde in der Arbeit [DPW] erstmals publiziert und in mehreren Arbeiten fortgesetzt, zum Beispiel in [DoHa].
Es sei hier kurz das Prinzip dieser Methode beschrieben: Es bezeichne D die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Nach einem bekannten Satz von Ruh und Vilms beschreibt eine glatte Immersion $f : D \to \mathbb{R}^3$ genau dann eine Fläche konstanter, mittlerer Krümmung, wenn die zugehörige Gauß-Abbildung $N : D \to S^2$ eine harmonische Abbildung ist, wobei $N(z)$ ein Normalenvektor an die Fläche im Punkt $f(z)$ ist. Die Sphäre S^2 ist isomorph zum kompakten, symmetrischen Raum $SU(2)/U(1)$ mit der einfachen, reellen Lie Gruppe $SU(2)$. Die Untergruppe $U(1)$ ist die Fixpunktgruppe eines involutorischen Automorphismus der $SU(2)$. Das Problem wurde also darauf reduziert, alle harmonischen Abbildungen in den symmetrischen Raum $SU(2)/U(1)$ zu konstruieren.

Allgemein läßt sich die Harmonizität einer glatten Abbildung u von D in einen symmetrischen Raum G/H $(u(0) = H)$ mit einer kompakten, halbeinfachen Lie Gruppe G und der Fixpunktgruppe H einer Involution σ von G wie folgt charakterisieren:
Die glatte Abbildung u besitzt einen Lift $F : D \to G$, das heißt, $u = \iota \circ F$ mit der Surjektion $\iota : G \to G/H$, da das Gebiet D einfach zusammenhängend ist. Das $\mathfrak{g} = Lie(G)$-wertige Differential $\alpha := F^{-1} \cdot dF$, zerlegt sich in die Summe $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$, wobei α_0 Werte in der Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ und α_1 Werte im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{q}$ der Involution σ annimmt, das heißt, α_0 ist eine $\mathfrak{h}$-wertige und α_1 eine $\mathfrak{q}$-wertige Eins-Form. Komplexifiziert man die Lie Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$, so erhält man $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$. Geht man zu den komplexen Eins-Formen $dz = dx + i \cdot dy$, $d\bar{z} = dx - i \cdot dy$ über, so wird $\alpha_1 = \alpha_1' dz + \alpha_1'' d\bar{z}$ mit einer glatten Abbildung $\alpha_1' : D \to \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ und $\alpha_1'' = \tau(\alpha_1')$. Dabei bezeichnet τ die Komplexkonjugation der Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich der reellen Form $\mathfrak{g}$.
Dann ist die Harmonizität der Abbildung u äquivalent dazu, daß die Formen $\alpha_0, \alpha_1' dz$ und $\alpha_1'' d\bar{z}$ der Differentialgleichung $d(\alpha_1' dz) + [\alpha_0 \wedge \alpha_1' dz] = 0$ genügen (Yang-Mills-Higgs Gleichung). Ferner gilt die Integrabilitätsbedingung
$d\alpha_0 + \frac{1}{2}[\alpha_0 \wedge \alpha_0] = -[\alpha_1' dz \wedge \alpha_1'' d\bar{z}]$ für die Gleichung $F^{-1} \cdot dF = \alpha_1' dz + \alpha_0 + \alpha_1'' d\bar{z}$.

Dies ist die bekannte Maurer-Cartan Gleichung. Da das Gebiet D einfach zusammenhängend ist, hat die Differentialgleichung $F^{-1} \cdot dF = \alpha_1' dz + \alpha_0 + \alpha_1'' d\bar{z}$ auch stets eine Lösung auf D, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind.

Der entscheidende Punkt ist nun das „Verloopen" des Problems, das heißt, die Yang-Mills-Higgs Gleichung und die Maurer-Cartan Gleichung werden zu einer zusammengefaßt: Zu jedem λ im Einheitskreis S^1 betrachtet man die $\mathfrak{g}$-wertige Eins-Form $A(z, \bar{z}, \lambda) := \lambda^{-1} \alpha_1' dz + \alpha_0 + \lambda \alpha_1'' d\bar{z}$. Dann sind die Yang-Mills-Higgs und Maurer-Cartan Gleichung äquivalent dazu, daß die Gleichung $dA + \frac{1}{2}[A \wedge A] = 0$ für alle λ erfüllt ist.
Dies bedeutet: Zu jeder Lösung A dieser Gleichung hat die Differentialgleichung $F^{-1} \cdot dF = A$ eine Lösung auf D, und $u := \iota \circ F : D \to G/H$ ist harmonisch für jedes fixierte λ in S^1.

Die Eins-Form A hat Werte in der getwisteten Loop Algebra $\Lambda \mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$. Dies ist die Lie Algebra aller stetigen Abbildungen X der S^1 nach $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, die der Bedingung $\sigma(X(\lambda)) = X(-\lambda)$ und einer Normbedingung genügen. Es bezeichne F^λ eine Lösung der Differentialgleichung $(F^\lambda)^{-1} \cdot dF^\lambda = A$ in der zugehörigen, getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$.

Ziel des Verfahrens ist es nun, eine Parametrisierung all dieser Abbildungen F^λ von D nach $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ zu finden, deren Differential A^λ obiger Gleichung genügt.
In [DPW] wurde gezeigt, daß eine solche Parametrisierung gegeben ist durch alle meromorphen Abbildungen $\xi_0 : D \to \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$, ξ_0 holomorph in 0, für welche die Differentialgleichung $(g_-)^{-1} \cdot dg = \xi := \lambda^{-1} \cdot \xi_0 \cdot dz,\ g_-(0, \lambda) = e\ \forall \lambda \in S^1$ eine Lösung g_- auf D besitzt. Dies ist dann eine meromorphe Abbildung von D in die getwistete Loop Gruppe $\Lambda^- G_\sigma^{\mathbb{C}}$. Weiterhin wurde in [DPW] gezeigt, daß - sofern die Lie Gruppe G kompakt und halbeinfach ist - die getwistete Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ eine globale Iwasawa Zerlegung der Gestalt $\Lambda G_\sigma \cdot \Lambda_B^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ besitzt. Hierbei ist ΛG_σ die Untergruppe aller G-wertigen Loops in $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ und $\Lambda_B^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ ist die Untergruppe aller Loops $h(\lambda)$, die eine holomorphe Fortsetzung nach D besitzen, derart, daß $h(0)$ Werte in einer geeignet gewählten Untergruppe B von $G^{\mathbb{C}}$ hat.
Nimmt man diese Zerlegung für die oben gewonnene Abbildung $g_- : D \to \Lambda^- G_\sigma^{\mathbb{C}}$ punktweise vor, das heißt $g_- = F \cdot V_+$, so erfüllt das Differential $A = F^{-1} \cdot dF$ die oben konstruierte, verschmolzene Gleichung, folglich ist die Abbildung $u := \iota \circ F : D \to G/H$ für jedes λ in S^1 harmonisch. Auf diese Weise entstehen auch alle harmonischen Abbildungen, wie in [DPW] gezeigt wurde.

Das Konstruktionsverfahren hat für beliebige, halbeinfache, symmetrische Räume Gültigkeit. Das heißt, es können mit diesem Verfahren alle harmonischen Abbildungen von D in einen halbeinfachen, symmetrischen Raum G/H konstruiert werden. Das Problem, das in der vorliegenden Arbeit untersucht wird, ist die Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen für nicht kompakte, zugrundeliegende Lie Gruppen G.

Eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse aus [DPW] findet sich in der Vortragssammlung des 20. Kolloquiums über Differentialgeometrie an der TUM ([Dorfm.95]).

In jüngster Zeit wurde die DPW-Methode auch zur Konstruktion anderer geometrischer Objekte modifiziert: In [Hel] wird sie zur Erzeugung von Willmore Flächen benutzt. In einer neueren Arbeit von [Bal] wird unter Zuhilfenahme der auch hier zu entwickelnden Iwasawa Zerlegung für ungetwistete Loop Gruppen die DPW-Methode verallgemeinert zur Konstruktion harmonischer Abbildungen in die Tangentialgruppe einer reduktiven Lie Gruppe.

Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist es, eine Verallgemeinerung der Iwasawa Zerlegung in ungetwisteten und getwisteten Loop Gruppen zu entwickeln. Weiterhin wird eine analoge Zerlegung in den zugehörigen Loop Algebren vorgestellt. Diese Zerlegung nennen wir lokale Iwasawa Zerlegung. Als Vorbereitung dieser dienen die ersten beiden Kapitel, in welchen ausschließlich in endlichdimensionalen, halbeinfachen Lie Algebren gearbeitet wird. Im ersten Kapitel werden die theoretischen Grundlagen bereitgestellt, kompementäre Unteralgebren zu konstruieren. In Kapitel 2 wird diese Konstruktion an ausgewählten Beispielen durchgeführt.
Im dritten Kapitel werden die Loop Algebren über halbeinfachen, endlichdimensionalen Lie Algebren eingeführt mittels der Kac-Moody-Algebren und deren Vervollständigungen. Mit den Ergebnissen aus den ersten beiden Kapiteln wird dann eine lokale Version der Iwasawa Zerlegung erstellt.
Im vierten Kapitel schließlich wird die Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen durchgeführt, das heißt, es wird ein Algorithmus entwickelt, der ein diskretes Vertretersystem der Doppelnebenklassen in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Untergruppen ΛG und $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ liefert. Mit diesem Algorithmus wird auch jedem Loop g in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ der Vertreter s zugeordnet, für welchen g in der Doppelnebenklasse $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ liegt. Ausgehend von dieser Iwasawa Zerlegung in ungetwisteten Loop Gruppen wird für den Spezialfall innerer Involutionen σ die analoge Zerlegung in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ erzeugt.

Im folgenden wird die Arbeit detailliert beschrieben:

Der Gegenstand des ersten Kapitels ist folgende Fragestellung: Es ist eine reelle, halbeinfache Lie Algebra $\mathfrak{g}$ zusammen mit einem involutorischen Automorpismus σ gegeben. Wann und wie läßt sich zur Unteralgebra $\mathfrak{h}$ aller von σ fixierten Elemente eine Unteralgebra $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{g}$ ermitteln, so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \{0\}$ gilt. Das wichtigste Hilfsmittel zur Beantwortung dieser Frage ist ein Ergebnis von Matsuki [Mat] und Rossmann [Ros]. In [Mat] wird das folgende Problem gelöst. In der Lie Gruppe G mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$ wird eine Untergruppe H, deren Lie Algebra $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ ist, und eine minimal parabolische Untergruppe P betrachtet. Man finde ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen in G bezüglich der Untergruppen H und P. Es wird gezeigt, daß die Anzahl der Doppelnebenklassen stets endlich ist, und es werden die (im topologischen Sinne) offenen und abgeschlossenen Doppelnebenklassen charakterisiert. Dazu werden Bedingungen für die zugehörige, minimal parabolische Unteralgebra $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ angegeben. Unser Interesse gilt den Fällen, für welche auf der Algebrenseite $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ gilt. In diesem Fall ist der Schnitt der Unteralgebren $\mathfrak{h}$ und $\mathcal{P}$ stets nicht trivial.

In den Abschitten 1.1 bis 1.3 werden zunächst die notwendigen Grundlagen aus der allgemeinen Lie Theorie zusammengestellt und die Ergebnisse von Matsuki und Rossmann aufgearbeitet. Im Abschnitt 2.5 werden wir klären, in welchen Fällen die minimal parabolische Unteralgebra $\mathcal{P}$ eine Unteralgebra $\mathfrak{s}$ enthält, so daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$ gilt, das heißt, $\mathfrak{s}$ ist eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.
Die entscheidenden Ergebnisse sind hierbei (in Satz 1.75 und Korollar 1.77): Komplementäre Unteralgebren lassen sich stets konstruieren, wenn $\mathfrak{g}$ eine normale, reelle Form ist oder eine komplexe, halbeinfache Lie Algebra, betrachtet als reelle Algebra unter Einschränkung der Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}$. Bekannt ist (siehe [Oni]), daß komlementäre Unteralgebren zur Fixpunktalgebra von Involutionen nie existieren, wenn $\mathfrak{g}$ eine einfache, kompakte Lie Algebra ist.

Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels wird zunächst das Problem, komplementäre Unteralgebren zu konstruieren, zurückgeführt auf einfache Lie Algebren. Dabei wird schlicht davon Gebrauch gemacht, daß ein Automorphismus einer halbeinfachen Lie Algebra jedes einfache Ideal entweder invariant läßt oder zwei (isomorphe) einfache Ideale austauscht. Im zweiten Fall ($\sigma(\mathfrak{i}) = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}$ zwei verschiedene, einfache Ideale von $\mathfrak{g}$) ist im σ-invarianten Ideal $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ stets $\mathfrak{i}$ eine zu $\mathfrak{h} \cap (\mathfrak{i} + \mathfrak{j})$ komplementäre Unteralgebra.
Um schließlich zu konkreten Beispielen zu kommen, wird in Abschnitt 2.2 das bekannte Verfahren zur Erzeugung aller reellen Formen einer einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ aus der Kenntnis aller Konjugiertenklassen von involutorischen Automorphismen von $\mathfrak{l}$ vorgestellt, wie es sich zum Beispiel in dem Standardwerk [Helg] findet.
Im Abschnitt 2.3 wird dann die Konstruktion von komplementären Unteralgebren an ausgewählten Beispielen durchgeführt. Die Beispiele sind dabei so gewählt, daß alle in Satz 1.75 und Korollar 1.77 aufgeführten Fälle abgedeckt sind. Es wird auch ein schnelles Verfahren zur Konstruktion von Komplementen angegeben, wenn $\mathfrak{l}$ eine komplexe, einfache Lie Algebra ist und $\mathfrak{h}$ eine reelle Form (siehe Lemma 2.18, Korollar 2.19 und Proposition 2.20 sowie Bemerkung 2.21 und Satz 2.24)

Im dritten Kapitel werden zunächst aus der Literatur ([Kac] und [Wan]) die Grundlagen der Theorie der Kac-Moody-Algebren zusammengestellt. Dies geschieht, um die Struktur der in Abschnitt 3.2 einzuführenden, polynomialen Loop Algebren zu verstehen. Dabei sind die im ersten Abschnitt über verallgemeinerte Cartan Matrizen abstrakt eingeführten Kac-Moody-Algebren zweidimensionale Erweiterungen von polynomialen Loop Algebren. Die Kac-Moody-Algebren besitzen - ähnlich wie endlichdimensionale, halbeinfache, komplexe Lie Algebren - eine Wurzelraumzerlegung und eine zugehörige Weyl Gruppe. Diese Struktur wird im Abschnitt 3.2 auf

die polynomialen Loop Algebren übertragen.
Um zu einer Iwasawa Zerlegung in getwisteten Loop Algebren in Abschnitt 3.3 zu gelangen, geben wir uns eine Involution σ der reellen, einfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ vor. Diese wird $\mathbb{C}$-linear fortgesetzt auf die Komplexifizierung $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Die getwistete Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ ist dann die Fixpunktalgebra der Involution $\hat{\sigma}$ der polynomialen Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l} = \{X(\lambda) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} A_j \cdot \lambda^j \ : \ A_j \in \mathfrak{l}, \text{ fast alle } A_j = 0\}$. Dabei operiert $\hat{\sigma}$ durch Twistung, das heißt $\hat{\sigma}(X)(\lambda) = \sigma(X(-\lambda))$. Dann ist die Summe der Lie Algebren $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma$ aller $\mathfrak{g}$-wertigen Loops aus $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ und der Unteralgebra $\Lambda^{+pol}\mathfrak{l}_\sigma$ aller Loops mit holomorpher Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe gleich der vollen, getwisteten Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$. Unser Ziel ist es, die Unteralgebra $\Lambda^{+pol}\mathfrak{l}_\sigma$ zu einer Unteralgebra $\mathfrak{x}$ zu verkleinern, so daß $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma = \Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma \oplus \mathfrak{x}$ gilt. Dies geschieht unter Verwendung der Ergebnisse des ersten Kapitels in Satz 3.35.

Die polynomialen Loop Algebren sind allerdings nicht die Lie Algebren der Loop Gruppen, für welche in Kapitel 4 die globale Iwasawa Zerlegung entwickelt wird. Um diese sogenannten Banach Lie Gruppen und Algebren definieren zu können, werden die gewichteten Wiener Algebren $\mathcal{A}_w$ in Abschnitt 3.4.1 eingeführt (siehe [GoWal]). Dies sind vollständige Räume von stetigen Funktionen der S^1 nach $\mathbb{C}$, deren Fourier Reihe einer gewichteten Einsnorm genügt. Die Matrizenalgebra $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ über $\mathcal{A}_w$ wird dann zu einer Banach Lie Algebra gemacht. Wenn die Lie Algebra $\mathfrak{l}$ beziehungsweise die zugehörige Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ in eine geeignete Matrizenalgebra $\mathbb{C}^{n\times n}$ eingebettet wird, so sind die polynomiale Loop Algebra sowie die Loop Gruppe $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$ dichte Untergruppen in den hier zu betrachtenden Banach Loop Algebren und Banach Loop Gruppen.
In Abschnitt 3.4.3 schließlich wird die in Abschnitt 3.3 entwickelte Iwasawa Zerlegung auf die vervollständigte, getwistete Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ übertragen (siehe Satz 3.49).

Im ersten Abschnitt von Kapitel 4 wird zunächst das Auftreten der Loop Gruppen in einen größeren Zusammenhang gestellt. Es ist dies die Theorie der Kac-Moody-Gruppen: Zu den Kac-Moody-Algebren vom endlichen und affinen Typ lassen sich Gruppen definieren sowie eine Exponentialabbildung auf der zugrundeliegenden Kac-Moody-Algebra. Diese ist jedoch nicht auf der ganzen Algebra erklärt. Die Kac-Moody-Gruppen sind eindimensionale Erweiterungen unserer polynomialen Loop Gruppen. Die Kac-Moody-Gruppen werden hier vorgestellt, da für diese einige, für unsere Zwecke wichtige Strukturaussagen bekannt sind (siehe [PetKac]), die sich auf die Banach Loop Gruppen übertragen lassen. Dies geschieht im Abschnitt 4.2. unter Zuhilfenahme einiger wichtiger Resultate aus [DoGrSzm].

Die Strukturaussagen umfassen unter anderem die Birkhoff Zerlegung in den Banach Loop Gruppen (siehe Proposition 4.20, Lemma 4.22 und Proposition 4.23).

Bei der Konstruktion eines Vertretersystems der Doppelnebenklassen in der ungetwisteten Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Untergruppen ΛG und $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ wird wie folgt vorgegangen:

Zu einem beliebigen Loop $g(\lambda)$ aus $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ betrachtet man den τ-symmetrischen Loop $x = \tau(g)^{-1} \cdot g$, wobei τ die Konjugation der komplexen Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ bezüglich G bezeichnet. Die Untergruppe $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ operiert auf der Menge aller τ-symmetrischen Elemente $(x = \tau(x)^{-1})$ vermöge $(v, x) \mapsto \tau(v)^{-1} \cdot x \cdot v$. Mit dieser Operation wird die Menge aller τ-symmetrischen Elemente auf eine diskrete Menge reduziert. Dies vollzieht sich im wesentlichen in zwei Schritten: Im ersten Schritt wird ein Element v in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ bestimmt, so daß $\tau(v)^{-1} \cdot x \cdot v = n$ ein Element des Normalisators einer Cartan Untergruppe in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ist (siehe Proposition 4.36).
Im zweiten Schritt wird wiederum mittels der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ das Element n reduziert auf einen τ-symmetrischen Homomorphismus t der S^1 in einen maximalen Torus, der in einer kompakten, reellen Form U der Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ liegt (siehe Proposition 4.41 und Satz 4.42).
Dieser Homomorphismus läßt sich unter obiger Operation nicht mehr reduzieren. In Satz 4.46 wird gezeigt, wie man eine τ-symmetrische Splittung von t mit einem Loop s in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ konstruiert, das heißt $t = \tau(s)^{-1} \cdot s$. Dann folgt sofort, daß der Loop g, mit dem gestartet wurde, in der Doppelnebenklasse $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ liegt.
Das ganze Verfahren wird im Laufe des Abschnitts 4.3 an ausgewählten Beispielen illustriert.

In Abschnitt 4.4 schließlich werden die Kodimensionen der nicht trivialen Doppelnebenklassen berechnet. Es konnte in Satz 4.57 und Satz 4.58 gezeigt werden, daß diese Kodimensionen stets positiv sind, sofern die kompakte, reelle Form U von $G^{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist. Dies hat in diesem Fall die Konsequenz, daß das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda G^{\mathbb{C}}$ eine offene und dichte Teilmenge der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ist.

Im letzten Abschnitt wird die mit einer inneren Involution σ getwistete Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ in die Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ eingebettet, und das Verfahren aus Abschnitt 4.3 auf den getwisteten Fall angepaßt.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Josef Dorfmeister bedanken, der mich in das interessante Gebiet einführte und mir stets ein freundlicher und hilfsbereiter Betreuer war. Insbesondere danke ich Herrn Dorfmeister für sein persönliches und wissenschaftliches Engagement während meines achtmonatigen Forschungsaufenthalts an der University of Kansas.

Bei Herrn Prof. Dr. Kurt Meyberg bedanke ich mich für sein stetes Interesse an meiner Forschung und am Fortgang der Arbeit.

Für eine sehr freundschaftliche Atmosphäre und viele anregende Gespräche (auch über Mathematik) am Zentrum Mathematik der TU München bedanke ich mich namentlich bei meinen Kollegen und Freunden Dr. Hartmut Führ, Dr. Wolfgang Klopfer, Dr. Matthias Mayer, Dr. Christoph Niessl und Dr. Christian Saller.

Die Arbeit ist meinem Vater Peter und meiner Schwester Bettina Kellersch gewidmet.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Komplementäre Unteralgebren in halbeinfachen Lie Algebren

In diesem Kapitel werden zunächst einige grundlegende Definitionen und Sätze über reelle, halbeinfache Lie Algebren eingeführt, vor allem im Hinblick auf symmetrische Räume. Im Abschnitt 1.2 wird ein Ergebnis von Matsuki vorgestellt, welches im nächsten Abschnitt zur Konstruktion von komplementären Unteralgebren benutzt wird.

Dieses Ergebnis von Matsuki klärt folgende Frage: In einer reellen, halbeinfachen Lie Gruppe G sind ein involutorischer Automorphismus σ und eine minimal parabolische Untergruppe P vorgegeben. Gefragt ist nun ein geeignetes Vertretersystem der Doppelnebenklassen in G bezüglich der Untergruppen P und der Fixpunktgruppe H der Involution σ, sowie die topologischen Eigenschaften der Doppelnebenklassen. Das wichtigste Resultat ist die Endlichkeit der Anzahl der Doppelnebenklassen und eine Anzahlformel mittels Weyl-Gruppen für die offenen sowie die abgeschlossenen Doppelnebenklassen.

Das Interesse an dieser Fragestellung kommt unter anderem aus der Geometrie. Das bekannteste und wohl einfachste Beispiel dafür ist das folgende: Wir betrachten die (transitive) Operation von $G := SL(2, \mathbb{C})$ auf der Riemannschen Zahlenkugel $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via Moebiustransformationen. Die Fixpunktgruppe der 0 in S^2 besteht aus allen unteren Dreiecksmatrizen in G. Dies ist eine minimal parabolische Untergruppe von G, die wir P nennen.
Dann sind G/P und S^2 diffeomorphe Mannigfaltigkeiten mittels der üblichen algebraischen Identifikation. Die Komplexkonjugation auf G ist nun ein involutorischer Automorphismus von G, betrachtet als reelle, halbeinfache Lie Gruppe. Man sieht leicht, daß die Orbits der Fixpunktgruppe $H := SL(2, \mathbb{R})$ auf S^2 die obere Halbebene, die untere Halbebene sowie $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sind. Diese Orbitstruktur spiegelt sich wider als zwei offene und eine abgeschlossene Doppelnebenklasse in der Zerlegung von G bezüglich H und P. Als Vertreter dieser Doppelnebenklassen kann man

etwa wählen

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen dieses Beispiel in gewisser Hinsicht komplettieren: Lassen wir die Gruppe $H' := \{X \in G : X^{-1} = X^T\} = SO(2, \mathbb{C})$ auf S^2 operieren, so haben wir zwei abgeschlossene Bahnen $\{i\}$ und $\{-i\}$ und eine offene Bahn $S^2 \setminus \{\pm i\}$. Dies liefert wieder eine Zerlegung von G in Doppelnebenklassen bezüglich H' und P mit zwei abgeschlossenen und einer offenen Doppelnebenklasse. Diese Zerlegung von G ist in einem Sinne dual zu ersterer; diese Dualität wird in Abschnitt 1.4 erklärt.

Wählen wir schließlich $K = \{x \in G : X^{-1} = \bar{X}^T\} = SU(2)$ als Fixpunktgruppe der kanonischen Cartan Involution, so ist bereits $K \cdot P$ gleich G. Wir haben also nur eine (offene) Doppelnebenklasse.

Betrachten wir in P die Untergruppe $A \cdot N$ aller unteren Dreiecksmatrizen mit reellen Diagonaleinträgen in G. Hierbei sei A die Untergruppe aller reellen Diagonalmatrizen in G, und N die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen in der Diagonalen. Dann ist die Multiplikationsabbildung $K \times A \times N$ nach G sogar ein Diffeomorphismus von Lie Gruppen, das ist die bekannte Iwasawa Zerlegung (siehe zum Beispiel [HilNe], Kapitel III, Satz 6.32). Bei der Konstruktion komplementärer Unteralgebren in Abschnitt 1.5 werden wir einen ähnlichen Trick der geeigneten Verkleinerung von Lie Algebren verwenden.

Der weit wichtigere geometrische Aspekt der Arbeit von Matsuki ist in gewisser Weise die Umkehrung des obigen Beispiels: Der Faktorraum G/H ist ein affiner, symmetrischer Raum, und gesucht ist hierin die Struktur der Orbits der Operation einer minimal parabolischen Untergruppe, wenn diese durch Linksmultiplikation auf G/H operiert.

Doch wir verwenden die Ergebnisse dieser Arbeit in einer anderen Hinsicht: Ist $H \cdot x \cdot P$ eine offene Bahn in G, so ist $H \cdot x \cdot P \cdot x^{-1}$ eine offene Teilmenge von G und Produkt zweier abgeschlossener Untergruppen. Die Summe der zugehörigen Lie Algebren in der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G ergibt ganz $\mathfrak{g}$.
Die Frage ist nun, wann man zur Lie Algebra $\mathfrak{h}$ von H eine komplementäre Lie Unteralgebra in $\mathfrak{g}$ konstruieren kann. Dies ist nicht in allen Fällen möglich. Die Resultate von Matsuki werden das wesentliche Hilfsmittel bei der Klassifikation sein.

Im Unterabschnitt 1.5.3 wird die Konstruktion komplementärer Unteralgebren vorgeführt und geklärt, wann es stets möglich ist, Komplemente zu konstruieren. Für die spätere Anwendung dieser komplementären Unteralgebren in Loop Algebren werden die Resultate dieses Kapitels nicht in der Allgemeinheit verwendet, wie sie hier entwickelt werden. Sie sind jedoch für die Strukturtheorie halbeinfacher Lie Algebren von unabhängigem Interesse.

1.1 Grundlegende Definitionen und Resultate

In diesem Abschnitt werden zunächst die wesentlichen und für uns wichtigen Tatsachen aus der Theorie der halbeinfachen Lie Algebren und Lie Gruppen ohne Beweise zusammengestellt. Dies geschieht nicht zuletzt um die in diesem Kapitel gebrauchten Schreibweisen und Notationen einzuführen. Nachzulesen sind die Sätze in einschlägigen Büchern über Lie'sche Theorie wie [Helg], [Kn], [War] und [Koo].

1.1.1 Reelle und komplexe, halbeinfache Lie Algebren

In diesem Kapitel bezeichne stets $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie Algebra. Mit ad wird wie üblich die adjungierte Darstellung $ad : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}) = gl(\mathfrak{g}), \quad adX(Y) = [XY], \quad X, Y \in \mathfrak{g}$ einer Lie Algebra bezeichnet.
Mit κ werde stets die Killing Form einer Lie Algebra benannt:

$\kappa(X, Y) = Spur(adX \circ adY), \quad X, Y \in \mathfrak{g}$. Sie ist eine assoziative, symmetrische Bilinearform, d.h. $\kappa([XY], Z) = \kappa(X, [YZ])$, bzw. $\kappa(adX(Y), Z) + \kappa(Y, adX(Z)) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Definition 1.1 *Eine Lie Algebra (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) heißt halbeinfach, wenn ihre Killing Form nicht ausgeartet ist.*

Über Körpern der Charakteristik 0 ist die Halbeinfachheit bekanntlich äquivalent dazu, daß die Lie Algebra in die direkte Summe einfacher, nicht abelscher Ideale zerfällt. Dabei heißt eine Lie Algebra einfach, wenn nur $\{0\}$ und die ganze Algebra Ideale sind. Abelsche, einfach Lie Algebren sind eindimensional oder gleich $\{0\}$.

Ist $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie Algebra, so bezeichne $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ die *Komplexifizierung* von $\mathfrak{g}$, d.h. wir führen auf der Lie Algebra $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ die komplexe Struktur $J : (X, Y) \mapsto (-Y, X)$ ein, womit $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$ zu einer komplexen Lie Algebra wird. Es ist dann $dim_{\mathbb{C}}\, \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = dim_{\mathbb{R}}\, \mathfrak{g}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{l}$ eine komplexe Lie Algebra, so bezeichne $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ die ,,Reellifizierung" von $\mathfrak{l}$, also die Algebra, welche entsteht durch Einschränkung der Skalare von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}$. Die reelle Dimension von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ ist zwei mal der $\mathbb{C}$-Dimension von $\mathfrak{l}$.
Nun kommen wir zum wichtigen Konzept der reellen Formen:

Definition 1.2 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine komplexe Lie Algebra und $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{l}$. $\mathfrak{g}$ heißt reelle Form von $\mathfrak{l}$, wenn $\mathfrak{g}$ unter der Einschränkung der Skalarmultiplikation auf $\mathbb{R}$ eine reelle Lie Algebra ist, und $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g} \oplus i \cdot \mathfrak{g}$ gilt.*
Der reelle Automorphismus $\tau(X) = X$, $\tau(iX) = -iX$, $X \in \mathfrak{g}$ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ heißt die Konjugation von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{g}$.

In der Situation von Definition 1.2 lassen sich natürlich die Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{l}$ identifizieren. Der folgende Satz gibt die entscheidenden Aussagen über

Halbeinfachheit und Einfachheit von Lie Algebren sowie die Killing Form: (siehe [Helg], Chapter II, § 6 und Chapter X, Proposition 1.5)

Satz 1.3 *(i) Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Form der komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$, und κ die Killing Form von $\mathfrak{l}$. Dann ist die Killing Form von $\mathfrak{g}$ die Einschränkung von κ auf $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Die Killing Form $\kappa_{\mathbb{R}}$ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ ist gegeben durch $\kappa_{\mathbb{R}}(X,Y) = 2 \cdot Re\,\kappa(X,Y),\ \ X,Y \in \mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$.*
Insbesondere gilt: Wenn $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ halbeinfach ist, so sind alle drei Lie Algebren halbeinfach.
(ii) Die Killing Form eines Ideals $\mathfrak{i}$ einer jeden Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Einschränkung der Killing Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}$.
(iii) Ist $\mathfrak{g}$ eine einfache, reelle Lie Algebra, so ist entweder $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ einfache, komplexe Lie Algebra, oder es gibt eine einfache, komplexe Lie Algebra $\mathfrak{l}$, so dass $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ isomorph zur direkten Summe zweier Kopien von $\mathfrak{l}$.
Die Reellifizierung einer einfachen, komplexen Lie Algebra ist stets einfach.

Das wesentliche Hilfsmittel in der Strukturtheorie halbeinfacher Lie Algebren bilden Cartan Zerlegung:

Definition 1.4 *Ein involutorischer Automorphismus θ einer halbeinfachen, reellen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt Cartan Involution, wenn für die Eigenräume $\mathfrak{k} = Fix(\theta)$ und $\mathfrak{p} = ER_\theta(-1)$ gilt: $\kappa|_{\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}}$ ist negativ definit und $\kappa|_{\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}}$ ist positiv definit. Die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ heißt dann Cartan Zerlegung von $\mathfrak{g}$.*

Gleichwertig zu dieser Definition ist die Forderung, daß die Bilinearform $\kappa_\theta(X,Y) := -\kappa(X,\theta Y),\ X,Y \in \mathfrak{g}$ ein Skalarprodukt ist, wegen der Invarianz der Killing Form bezüglich Automorphismen.
Ist umgekehrt $\mathfrak{g}$ gleich der direkten Summe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ mit einer Unteralgebra $\mathfrak{k}$, einem Unterraum $\mathfrak{p}$, derart daß $[\mathfrak{k},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p},\ [\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ und κ negativ definit ist auf $\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$ und positiv definit auf $\mathfrak{p}\times\mathfrak{p}$, so ist der durch $\theta(X) = X$ und $\theta(Y) = -Y,\ X \in \mathfrak{k},\ Y \in \mathfrak{p}$ definierte Endomorphismus eine Cartan Involution.
Jetzt können wir endlich die wichtigen *kompakten reellen Formen* einführen:

Definition 1.5 *Eine reelle Form $\mathfrak{u}$ der komplexen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ heißt kompakt, wenn $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$ eine Cartan Zerlegung von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ ist.*

Genau die reellen Formen von $\mathfrak{l}$ mit negativ definiter Killing Form sind damit die kompakten reellen Formen.
Die Kompaktheit von Unteralgebren wird im folgenden noch allgemein eingeführt, doch wir brauchen noch etwas Theorie über Automorphismen:

Definition 1.6 *Ist $\mathfrak{g}$ eine reelle Lie Algebra, so bezeichne $Int(\mathfrak{g})$ die von der Menge $\{\exp(ad(X)) : X \in \mathfrak{g}\}$ erzeugte Untergruppe von $GL(\mathfrak{g})$. Diese heißt die Gruppe der inneren Automorphismen.*
Es sei G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann werde mit $I_g \in Aut(G),\ g \in G$ der analytische, innere Automorphismus $I_g(h) = ghg^{-1}$ bezeichnet sowie mit

$Ad(g) \in Aut(\mathfrak{g})$ die Ableitung von I_g beim neutralen Element $e \in G$, d.h. der Automorphismus $Ad(g)X = dI_g(e)X$ von $\mathfrak{g}$.
$Ad : G \to Aut(\mathfrak{g})$ heißt die adjungierte Darstellung der Lie Gruppe G.

Der folgende Satz klärt nun den Zusammenhang zwischen der adjungierten Darstellung und der Gruppe der inneren Automorphismen:
(siehe [Helg], Chapter II, § 5)

Satz 1.7 *(i) Die Gruppe $Int(\mathfrak{g})$ ist Normalteiler von $Aut(\mathfrak{g})$.*
(ii) Für jede Lie Gruppe G ist die Abbildung Ad ein analytischer Homomorphismus von G auf $Int(\mathfrak{g})$, dessen Kern das Zentrum von G ist.
(iii) Die Lie Algebra von $Int(\mathfrak{g})$ in $End(\mathfrak{g})$ ist $ad(\mathfrak{g})$ Wenn das Zentrum von $\mathfrak{g}$ trivial ist, so ist $ad(\mathfrak{g})$ isomorph zu $\mathfrak{g}$, und das Zentrum von $Int(\mathfrak{g})$ ist trivial.

Definition 1.8 *Es sei $\mathfrak{s}$ eine Unteralgebra der Lie Algebra $\mathfrak{g}$, sowie G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Exponentialabbildung* exp. *Die von der Menge $\{\exp(S) : S \in \mathfrak{s}\}$ erzeugte Untergruppe S von G heißt die analytische Untergruppe von G mit Lie Algebra $\mathfrak{s}$.*

Eine Unteralgebra $\mathfrak{u}$ einer reellen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ heißt kompakt eingebettet, wenn die analytische Untergruppe $U := Int_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{u})$ von $Int(\mathfrak{g})$ mit Lie Algebra $ad(\mathfrak{u})$ ($\subset ad(\mathfrak{g})$) kompakt ist.
$\mathfrak{g}$ selbst heißt kompakt, wenn $Int(\mathfrak{g})$ kompakt ist.

Die analytischen Untergruppen einer Lie Gruppe G sind genau die bogenzusammenhängenden Untergruppen; sie sind aber nicht notwendig Untermannigfaltigkeiten. Sie tragen aber mittels der Exponentialabbildung die Struktur einer analytischen Mannigfaltigkeit und sind mit dieser eine Lie Gruppe, deren Topologie im allgemeinen feiner ist als die Relativtopologie, welche von G auf die Untergruppe gesetzt wird. Ist eine analytische Untergruppe jedoch abgeschlossen, so stimmen beide Topologien überein.

Die folgenden Aussagen setzen nun Definition 1.5 und 1.8 zueinander in Beziehung:

Proposition 1.9 *(i) Eine reelle Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist genau dann kompakt, wenn ein assoziatives Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$ existiert, beziehungsweise, wenn eine kompakte Lie Gruppe existiert mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$.*
(ii) Die kompakten, halbeinfachen Lie Algebren sind genau die mit negativ definiter Killing Form.
(iii) Ist $\mathfrak{l}$ eine komplexe, halbeinfache Lie Algebra, so besitzt $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ eine Unteralgebra $\mathfrak{u}$, die kompakt ist (und kompakt eingebettet), so daß $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} \oplus i \cdot \mathfrak{u}$. Dies ist dann eine Cartan Zerlegung; alle Cartan Zerlegungen gehen unter der Wirkung von $Int(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})$ ineinander über.
(iv) Ist τ die Konjugation von $\mathfrak{l}$ bezüglich einer reellen Form $\mathfrak{g}$, so existiert eine kompakte reelle Form von $\mathfrak{l}$, derart, daß die zugehörige Cartan Involution θ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ mit τ vertauscht, das heißt, $\mathfrak{g}$ invariant läßt. $\theta|_{\mathfrak{g}}$ ist dann auch Cartan Involution

von $\mathfrak{g}$.
(v) Ist umgekehrt $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ *eine Cartan Zerlegung der reellen, halbeinfachen Lie Algebra* $\mathfrak{g}$, *so liefert* $\mathfrak{u} := \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{p}$ *eine kompakte reelle Form der Komplexifizierung von* $\mathfrak{g}$.

Der letzte Punkt in diesem Abschnitt betrifft die „Liftbarkeit" von Cartan Involutionen auf Lie Gruppen. Im allgemeinen lassen sich Automorphismen (auch involutorische) von halbeinfachen Lie Algebren nicht auf die Lie Gruppen liften, es sei denn die Lie Gruppe ist einfach zusammenhängend (siehe [Helg], Chapter VI, § 1):

Proposition 1.10 *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine halbeinfache, nicht kompakte Lie Algebra und* G *eine zusammenhängende Lie Gruppe mit* $Lie(G) = \mathfrak{g}$, *sowie* θ *eine Cartan Involution von* $\mathfrak{g}$. *Dann gilt:*
(i) Es existiert ein involutorischer Automorphismus Θ *von* G, *dessen Ableitung* $d\Theta$ *bei* e *gleich* θ *ist.*
(ii) Die Fixpunktgruppe $Fix(\Theta)$ *in* G *ist eine abgeschlossene, zusammenhängende Untergruppe* K *mit Lie Algebra* $\mathfrak{k} = Fix(\theta)$. K *enthält das das Zentrum* $Z(G)$ *von* G. *Dieses ist diskret in* G.
(iii) Jede kompakte Untergruppe von G *läßt sich unter* $Aut(G)$ *in eine Untergruppe von* K *konjugieren.*
(iv) K *ist genau dann kompakt, wenn das Zentrum von* G *endlich ist.*

Bemerkung 1.11 Das Zentrum einer zusammenhängenden Lie Gruppe mit halbeinfacher Lie Algebra ist zumindest für alle linearen Lie Gruppen endlich, d.h. für alle Lie Gruppen, die eine treue Darstellung in einer $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zulassen. Dies ist z.B. nicht der Fall für die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe der $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

1.1.2 Wurzelraumzerlegungen

Die Bedeutung der im letzten Abschnitt eingeführten Cartan Involutionen besteht unter anderem in der Konstruktion von Wurzelraumzerlegungen über $\mathbb{R}$. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ eine Cartan Zerlegung der reellen, halbeinfachen, nicht kompakten Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Involution θ, so sind die Endomorphismen $ad(X)$ für X aus $\mathfrak{p}$ selbstadjungiert bezüglich des Skalarprodukts κ_θ auf $\mathfrak{g}$, und die Endomorphismen $ad(Y)$ für Y aus $\mathfrak{k}$ schiefsymmetrisch. Insbesondere ist für jeden abelschen Unterraum $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ die Menge $\{ad(X) : X \in \mathfrak{a}\}$ ein Vektorraum paarweise vertauschender Endomorphismen von $\mathfrak{g}$, welche (wegen der Selbstadjungiertheit) über $\mathbb{R}$ simultan diagonalisierbar sind.

Fixieren wir nun eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$. Für jede Linearform $\alpha \in \mathfrak{a}^*$ bezeichne $\mathfrak{g}^\alpha$ den Wurzelraum in $\mathfrak{g}$ zur Wurzel α bezüglich $\mathfrak{a}$, d.h. $\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H) \cdot X \quad \forall H \in \mathfrak{a}\}$. Wir setzen $\Sigma := \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}\}$. Dies ist ein Wurzelsystem, welches i.a. nicht reduziert ist, d.h. mit einer Wurzel

$\alpha \in \Sigma$ kann auch $\frac{1}{2}\alpha$ oder $2 \cdot \alpha$ eine Wurzel sein. Σ heißt das auf $\mathfrak{a}$ eingeschränkte Wurzelsystem.
$\mathfrak{g}$ zerlegt sich nun wie folgt in die direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^{\alpha}. \tag{1.1}$$

Hierbei bezeichnet $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{Y \in \mathfrak{k} : [Y, \mathfrak{a}] = 0\}$ den Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$. Es ist also $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, und $\mathfrak{g}^0$ ist der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$.

Für eine Wurzel α wird $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}$ die Vielfachheit von α genannt.

Da die Einschränkung der Killing Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ eine assoziative, negativ definite Bilinearform liefert, ist $\mathfrak{k}$ eine kompakte Lie Algebra, damit auch $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ als Unteralgebra nach Proposition 1.9 Teil (i). Insbesondere ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ eine reduktive Lie Algebra, das heißt gleich der direkten Summe seines Zentrums und eines halbeinfachen Ideals (siehe [HilNe], Lemma III. 5. 2). Dieses ist eindeutig bestimmt und kompakt.

Die Struktur von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ wird für unsere Konstruktion komplementärer Unteralgebren von großer Wichtigkeit sein. Zum Abschluß dieses Abschnitts seien noch einige wichtige Tatsachen über maximal abelsche Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ erwähnt:

Proposition 1.12 *(i) Es sei G eine Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ in Cartan Zerlegung Weiter sei K die analytische Untergruppe von G mit Lie Algebra $\mathfrak{k}$. Dann sind je zwei maximal abelsche Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ zueinander konjugiert unter der Wirkung von $Ad_G(K) = Int_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{k})$.*
(ii) Für jede maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ ist $\mathfrak{p}$ die Vereinigung aller $Ad(k)(\mathfrak{a})$ $k \in K$.
(iii) Ist $\mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ so ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, deren Elemente unter ad halbeinfach auf $\mathfrak{g}$ operieren. Insbesondere ist der von $\mathfrak{a} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ erzeugte $\mathbb{C}$-Unterraum $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eine Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$, das heißt $\mathfrak{c}$ operiert halbeinfach auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und ist maximal abelsch.
(iv) Die Einschränkung auf $\mathfrak{a}$ der Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{c}$, welche auf $\mathfrak{a}$ nicht verschwinden, liefert das eingeschränkte Wurzelsystem Σ.

Bemerkung 1.13 Teil (i) und (ii) der Proposition verallgemeinern den bekannten Satz aus der linearen Algebra, daß kommutierende, reelle, symmetrische beziehungsweise hermitsche Matrizen simultan durch orthogonale (bzw. unitäre) Matrizen auf reelle Diagonalmatrizen transformiert werden können.
(ii) folgt aus (i), da jedes $X \in \mathfrak{p}$ in einer maximal abelschen Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ liegt.

1.1.3 Die Weyl Gruppe

Die Weyl Gruppe einer reellen, halbeinfachen, nicht kompakten Lie Algebra $\mathfrak{g}$ bezüglich einer Cartan Involution von $\mathfrak{g}$ wird eine sehr wichtige Rolle spielen bei der Bestimmung der offenen und abgeschlossenen Doppelnebenklassen.

Wir fixieren eine Cartan Involution der reellen, halbeinfachen, nicht kompakten Lie Algebra $\mathfrak{g}$ sowie eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ des -1-Eigenraums $\mathfrak{p}$ von θ.

Definition 1.14 *Eine Teilmenge* $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *von* Σ *heißt Basis des Wurzelsystems, wenn* Π *eine Vektorraumbasis von* $\mathfrak{a}^*$ *ist, und für jede Wurzel* α *die Koeffizienten* k_i *in der Linearkombination* $\alpha = \sum_{i=1}^{l} k_i \cdot \alpha_i$ *in* $\mathbb{Z}$ *liegen und alle entweder nicht negativ oder nicht positiv sind.*

Bekanntlich existieren stets Basen (siehe zum Beispiel [Helg], Chapter X, Theorem 3.6); zu ihrer Konstruktion kommen wir später.

Proposition 1.15 *(i) Zu jeder Linearform* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *existiert genau ein* $A_\lambda \in \mathfrak{a}$*, so daß* $\lambda(H) = \kappa(H, A_\lambda)$ *gilt für alle* $H \in \mathfrak{a}$*.*
(ii) Die Abbildung $\varphi : \mathfrak{a}^* \to \mathfrak{a}$, $\varphi : \lambda \mapsto A_\lambda$ *ist ein Isomorphismus. Wenn* Π *eine Basis des Wurzelsystems* Σ *ist, so ist insbesondere* $\{A_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ *eine* $\mathbb{R}$*-Basis von* $\mathfrak{a}$*.*
(iii) Es gilt $\alpha(A_\alpha) = \kappa(A_\alpha, A_\alpha) \neq 0$ *für alle* $\alpha \in \Sigma$
(iv) Durch $(\lambda, \mu) := \kappa(A_\lambda, A_\mu)$ *wird auf* $\mathfrak{a}^*$ *ein Skalarprodukt definiert, und* φ *ist (nach Konstruktion) eine Isometrie.*

Die Beweise dieser Proposition basieren fast ausschließlich darauf, daß die Killing Form eingeschränkt auf $\mathfrak{a}$ ein Skalarprodukt ist.

Definition 1.16 *(i) Zu jedem* $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ *bezeichne* $s_\lambda \in Aut(\mathfrak{a}^*)$ *die Reflexion an* λ *bezüglich des Skalarprodukts* $(\cdot,\cdot)$ *aus obiger Proposition, das heißt* $s_\lambda(\mu) = \mu - \frac{2(\mu,\lambda)}{(\lambda,\lambda)} \cdot \lambda$*.*
(ii) Die von der Menge $\{s_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ *in* $Aut(\mathfrak{a}^*)$ *erzeugte Gruppe* W *heißt die Weyl Gruppe des Wurzelsystems* Σ*.*

Alle Cartan Involutionen sind unter $\mathrm{Int}\,(\mathfrak{g})$ zueinander konjugiert, d.h. zu je zwei Cartan Involutionen θ, θ' existiert ein $\phi \in \mathrm{Int}\,(\mathfrak{g})$ mit $\theta' = \phi^{-1} \circ \theta \circ \phi$. Wegen der Invarianz der Killing Form bezüglich $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ bilden die Cartan Involutionen also eine volle Konjugationsklasse in $\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{g})$.
Damit ist wegen Proposition 1.12 (i) die oben definierte Weyl Gruppe nur von der reellen, halbeinfachen Lie Algeba $\mathfrak{g}$ abhängig.
Die Weyl Gruppe läßt das Wurzelsystem Σ invariant, und weil Σ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{a}^*$ ist, liegt ein Weyl Gruppenelement fest durch seine Bilder auf Σ. Insbesondere ist die Ordnung der Weyl Gruppe ein Teiler der Ordnung der Gruppe der Permutationen von Σ, also endlich.

Für diese Arbeit wird noch ein anderes Modell der Weyl Gruppe von Bedeutung sein. In diesem wird die Weyl Gruppe W als Faktorgruppe zweier Untergruppen in einer Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$ dargestellt. Doch zunächst klären wir noch, wie obige Weyl Gruppe auf der Unteralgebra $\mathfrak{a}$ operiert:
Zu jedem $\alpha \in \Sigma$ definieren wir die lineare Involution
$\tilde{s}_\alpha(H) := H - \frac{2\cdot\alpha(H)}{\alpha(A_\alpha)}A_\alpha$ für alle H aus $\mathfrak{a}$.
Mit dem Isomorphismus φ aus Proposition 1.15 (ii) gilt dann: $\varphi \circ s_\alpha = \tilde{s}_\alpha \circ \varphi$.
Für die Gruppe $\tilde{W} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$, welche von den $\tilde{s}_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$ erzeugt wird, gilt dann $\tilde{W} = \varphi W \varphi^{-1}$. Dies erlaubt uns $\tilde{W}$ mit W zu identifizieren.

Definition 1.17 *Es sei G eine zusammenhängende Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ eine Cartan Zerlegung von $\mathfrak{g}$ sowie K die analytische Untergruppe von G mit Lie Algebra $\mathfrak{k}$.*
Dann werde mit M der Zentralisator einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ in K bezeichnet, d.h.

$$M = \{g \in K : Ad(g)(H) = H \text{ für alle } H \in \mathfrak{a}\}$$

sowie mit M^* der Normalisator:

$$M^* = \{g \in K : Ad(g)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}$$

Hier folgen die ersten wichtigen Eigenschaften über M^* und M: (siehe [Helg], Chapter VII, § 2)

Proposition 1.18 *(i) M ist eine normale Untergruppe von M^**
(ii) M und M^* haben dieselbe Lie Algebra, nämlich $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$. Die Gruppe M ist eine abgeschlossene Untergruppe von G, und ist im allgemeinen nicht zusammenhängend.
(iii) Die Faktorgruppe M^*/M ist endlich.
(iv) Die Abbildung $m^* \mapsto Ad(m^*)|_\mathfrak{a}$, $m^* \in M^*$ ist eine Darstellung von M^* in $GL(\mathfrak{a})$, deren Kern genau M ist. Insbesondere induziert die Abbildung $m^* \mapsto Ad(m^*)|_\mathfrak{a}$ eine treue Darstellung von M^*/M auf $\mathfrak{a}$.

Teil (ii) dieser Proposition folgt im wesentlichen aus der Tatsache, daß der Normalisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$ (!) gleich $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$ ist.

Der folgende Satz besagt, daß die Faktorgruppe M^*/M genau die Weyl Gruppe von $\mathfrak{g}$ ist, wenn wir diese wie oben beschrieben auf $\mathfrak{a}$ operieren lassen: (siehe z.B. [Koo] II, 5.4 ff)

Satz 1.19 *(i) Ist $\alpha \in \Sigma$ eine Wurzel bezüglich der maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$, und $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ normiert, so daß $\kappa_\theta(X_\alpha, X_\alpha) = \frac{2}{(\alpha,\alpha)}$, so gilt mit $Z_\alpha := X_\alpha + \theta(X_\alpha)$:*
Z_α liegt in $\mathfrak{k}$, $\exp(\frac{1}{2}\pi Z_\alpha)$ ist in M^* und $Ad(\frac{1}{2}\pi Z_\alpha)|_\mathfrak{a} = \tilde{s}_\alpha$.
(ii) Das Bild von M^*/M in $GL(\mathfrak{a})$ wird von $\{Ad(\frac{1}{2}\pi Z_\alpha)|_\mathfrak{a} : \alpha \in \Sigma\}$ erzeugt.
(iii) Die Abbildung $\tilde{s}_\alpha$ $(\in \tilde{W}) \mapsto Ad(\frac{1}{2}\pi Z_\alpha)|_\mathfrak{a}$ induziert einen Gruppenisomorphismus von $\tilde{W}$ auf M^*/M.

1.1.4 Minimal parabolische Untergruppen

In diesem Abschnitt werden einzelne Aussagen nicht nur zitiert, sondern zum Teil auch bewiesen, da dies das Verständnis und die Darstellung der restlichen Abschnitte erleichtert. Bevor die Definition der minimal parabolischen Unteralgebren und Untergruppen gegeben werden kann, müssen noch einige zusätzliche Konzepte eingeführt werden. Wenn wir den Dualraum $\mathfrak{a}^*$ einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ zu einem geordneten, reellen Vektorraum machen, so bezeichnet man für jede solche fixierte Ordnung mit Σ^+ die Menge der positiven Wurzeln in Σ. Dann ist die Vereinigung $\Sigma = \Sigma^+ \cup (-\Sigma^+)$ disjunkt, und es gelten die bekannten, fundamentalen Aussagen (siehe [HilNe], Kapitel III, Satz 6.32):

Satz 1.20 *Es sei* $\mathfrak{g}$ *eine reelle, halbeinfache Lie Algebra und* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ *eine Cartan Zerlegung und* $\mathfrak{a}$ *eine maximal abelsche Unteralgebra von* $\mathfrak{p}$*. Weiterhin sei* Σ *das Wurzelsystem von* $\mathfrak{g}$ *bezüglich* $\mathfrak{a}$ *und* Σ^+ *positive Wurzeln. Dann gelten die folgenden Aussagen:*
(i) $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha\in\Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha$ *ist eine nilpotente Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$*.*
(ii) $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ *ist eine auflösbare Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$*.*
(iii) $\mathfrak{g}$ *zerlegt sich in die direkte Summe* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ *(lokale Iwasawa Zerlegung)*
(iv) Ist G *eine zusammenhängende Lie Gruppe mit Lie Algebra* $\mathfrak{g}$*, sowie* A *und* N *die analytischen Untergruppen von* G *mit Lie Algebra* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{n}$*, so sind* A *und* N *einfach zusammenhängend, und die (Produkt-) Abbildung* $K \times A \times N \to G$ *ist ein Diffeomorphismus. (globale Iwasawa Zerlegung)*

Wichtig in diesem Zusammenhang ist die sogenannte Polarzerlegung einer Lie Gruppe (siehe [Helg], Chapter VI, Theorem 1.1 (iii) und Proposition 5.3)

Proposition 1.21 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.20. Dann gilt:*
(i) Die Einschränkung der Exponentialabbildung der Lie Gruppe G *auf* $\mathfrak{p}$ *ist injektiv.*
(ii) Die Abbildung $K \times \mathfrak{p} \to G, \quad (k, X) \mapsto k \cdot \exp(X)$ *ist ein Diffeomorphismus. (Polarzerlegung)*
(iii) Es sei Θ *der Lift auf* G *der auf* $\mathfrak{g}$ *gegebenen Cartan Involution. Dann liefert die Abbildung*
$\psi : A \cdot N \to \exp(\mathfrak{p}), \quad \psi : s \mapsto \Theta(s) \cdot s^{-1}$ *einen Diffeomorphismus von Mannigfaltigkeiten.*

Die folgende Proposition führt direkt zur Definition minimal parabolischer Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ und minimal parabolischer Untergruppen in einer Lie Gruppe G. (siehe [Koo], Chapter I, Lemma 5.7 und Corollar 5.8, sowie [War], Proposition 1.2.1.12)

Proposition 1.22 *Es gelten wieder die Voraussetzungen von Satz 1.20. Dann gilt:*
(i) Die Unteralgebra $\mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$ *operiert via der adjungierten Darstellung ad für jede Wurzel* $\alpha \in \Sigma$ *irreduzibel auf dem Wurzelraum* $\mathfrak{g}^\alpha$*.*
(ii) $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+) := \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ *ist für jede Wahl eines Systems positiver Wurzeln*

Σ^+ in Σ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die selbstnormalisierend ist. Diese Unteralgebren heißen minimal parabolisch.
(iii) Es sei M der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in K. Dann ist die Produktabbildung $M \times A \times N \to G$ ein Diffeomorphismus auf eine abgeschlossene, selbstnormalisierende Untergruppe P von G, deren Lie Algebra $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ ist. Diese Untergruppen heißen minimal parabolische Untergruppen von G.

Bemerkung 1.23 Es sei ϕ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$, der mit der Cartan Involution θ vertauscht, das heißt, er bildet die Summanden $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ der Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ jeweils in sich ab. Wenn ϕ auch die Unteralgebra $\mathfrak{a}$ invariant läßt, so operiert ϕ auf der Menge der Wurzelräume $\{\mathfrak{g}^\alpha : \alpha \in \Sigma\}$, da $[H, \phi(X)] = \phi([\phi^{-1}(H), X] = \alpha(\phi^{-1}(H)) \cdot \phi(X), \ \forall X \in \mathfrak{g}^\alpha$ und $\forall H \in \mathfrak{a}$.
Definiert man $\phi \cdot \alpha$ durch $\phi \cdot \alpha(\cdot) := \alpha(\phi^{-1}(\cdot))$, so gilt $\phi(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\phi \cdot \alpha}$, und ϕ permutiert die Sätze positiver Wurzeln von Σ.
Offensichtlich gilt $\phi(A_\alpha) = A_{\phi \cdot \alpha}$, wegen der Invarianz der Killing Form.

Dies kann man auf die Cartan Involution θ anwenden. Sie wirkt auf $\mathfrak{a}$ als die negative Identität, und bildet damit jede Wurzel α in die Wurzel $-\alpha$ ab.

Auch die Automorphismen $Ad(m^*)$, $m^* \in M^*$ genügen den obigen Voraussetzungen. Die zugehörige Operation der Weyl Gruppe M^*/M auf Σ liefert eine scharf, einfach transitive Operation auf allen Sätzen positiver Wurzeln von Σ.

Wegen der Konjugiertheit aller Cartan Zerlegungen von $\mathfrak{g}$ unter $Int(\mathfrak{g})$ und Proposition 1.12 (i) liefert die letzte Bemerkung den folgenden ,,Konjugationssatz":

Satz 1.24 *(i) Je zwei minimalparabolische Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ lassen sich unter einem Automorphismus aus $Int(\mathfrak{g})$ ineinander überführen.*
(ii) Die minimal parabolischen Untergruppen der Lie Gruppe G bilden eine Konjugationsklasse von G.

Klären wir noch das Aussehen der minimal parabolischen Unteralgebren der komplexen, halbeinfachen Lie Algebren.

Definition 1.25 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine halbeinfache, komplexe Lie Algebra mit Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ und zugehörigem Wurzelsystem Δ.*
(i) Der von der Menge $\{T_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ erzeugte reelle Unterverktorraum $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ heißt die kanonische, reelle Form von $\mathfrak{c}$. Hier bei werden die T_α wie die Elemente A_α über die Einschränkung der Killing Form auf $\mathfrak{c}$ definiert.
(ii) Für jedes System positiver Wurzeln Δ^+ in Δ heißt die Unteralgebra $\mathfrak{b} := \mathfrak{c} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{l}^\alpha$ eine Borel Unteralgebra von $\mathfrak{l}$.

Es gelten nun die folgenden Aussagen (siehe [Helg], Chapter VI, Lemma 3.2):

Proposition 1.26 *(i) Die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ zerlegt sich in die direkte Summe $\mathfrak{c} = i \cdot \mathfrak{c}_{\mathbb{R}} + \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, und die Killing Form von $\mathfrak{l}$ eingeschränkt auf $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ ist positiv definit. Insbesondere liegt $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ stets in $\mathfrak{p}$ für jede Cartan Involution, die $\mathfrak{c}$ invariant*

läßt.
(ii) Es existiert eine Cartan Involution θ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$, so daß $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} \leq ER_\theta(-1)$.
(iii) Für jede Cartan Zerlegung $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{u} + i \cdot \mathfrak{u}$ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ und einen maximal abelschen Unterraum $\mathfrak{a}$ von $i \cdot \mathfrak{u}$ gilt: $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}) = i \cdot \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ ist eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$ mit kanonischer, reeller Form $\mathfrak{a}$.
(iv) Die minimal parabolischen Unteralgebren von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{u}+i\cdot\mathfrak{u}$ und der Unteralgebra $\mathfrak{a}$ sind genau die Borel Unteralgebren bezüglich $\mathfrak{c}$. Diese sind stets auflösbar.

Bemerkung 1.27 Die Kommutatorunteralgebra $[\mathcal{P}, \mathcal{P}]$ einer minimal parabolischen Unteralgebra $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ einer reellen, halbeinfachen, Lie Algebra ist gleich $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})] + \mathfrak{n}$. Da $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ eine reduktive Algebra ist, ist der Kommutator von $\mathcal{P}$ genau dann nilpotent, wenn $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ abelsch ist. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\mathcal{P}$ auflösbar ist.

Nun kommen wir zu einem wesentlichen Satz in der Strukturtheorie halbeinfacher Lie Algebren, den wir später auch benötigen werden, die **Bruhat Zerlegung** einer Lie Gruppe bezüglich einer minimal parabolischen Unteralgebra (siehe [Helg], Chapter IX, Theorem 1.4 ff):

Satz 1.28 *Es sei G eine Lie Gruppe mit halbeinfach, reeller Lie Algebra $\mathfrak{g}$ und $P = M \cdot A \cdot N$ eine minimal parabolische Untergruppe von G. Zu jedem $w \in M^*/M = W$ sei m_w^* ein Vertreter in M^*. Dann gilt*
(i) Die Nebenklasse $m_w^* \cdot P$ hängt nur von w ab.
(ii) G ist die disjunkte Vereinigung aus Doppelnebenklassen

$$G = \bigcup_{w \in W} P \cdot m_w^* \cdot P$$

Es bezeichne $w_0 \in W$ das (eindeutig bestimmte) Weyl Gruppenelement, welches den gewählten Satz positiver Wurzeln Σ^+ auf $-\Sigma^+$ abbildet. Dann gilt:

$P \cdot m_{w_0}^* \cdot P$ ist offen dichte Untermannigfaltigkeit von G.
Unter den Doppelnebenklassen bezüglich P hat genau eine minimale Dimension, nämlich $\dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \mathfrak{n})$; sie ist auch die einzige abgeschlossene Doppelnebenklasse.

Bemerkung 1.29 (i) Das Weyl Gruppenelement w_0 existiert, da die Weyl Gruppe transitiv auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln operiert. Es ist auch eindeutig, da die Operation scharf ist.
(ii) Das Produkt $M \cdot A \cdot N$ der Untergruppen M, A und N kommutiert, weil A die Gruppe N normalisiert und M die Gruppen A und N normalisiert.
(iii) Die Gruppe M^* normalisiert M und A. Damit läßt sich jede Doppelnebenklasse $P \cdot m_w^* \cdot P$ auch schreiben als $N \cdot m_w^* \cdot P$.
(iv) Für die offen dichte Doppelnebenklasse $N \cdot m_{w_0}^* \cdot P$ gilt:
Die Abbildung $N \times P \to G, \quad (n,p) \mapsto n \cdot m_{w_0}^* \cdot p$ ist ein Diffeomorphismus auf

die offen dichte Untermannigfaltigkeit von G.
(v) Wegen (iv) ist $(m^*_{w_0})^{-1} \cdot N \cdot m^*_{w_0} \cdot P$ Produkt zweier abgeschlossener Untergruppen mit trivialem Schnitt. Daher kann man die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ als ein direkte Summe schreiben:
$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus (\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \mathfrak{n})$. Dabei ist $\mathfrak{n}^- := Ad(m^*_{w_0})(\mathfrak{n}) = \sum_{\alpha \in -\Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha$.

Multiplizieren wir in der Bruhat Zerlegung von G die disjunkte Vereinigung von links mit $m^*_{w_0}$ und indizieren die Vereinigung über die Weyl Gruppe W um, so erhalten wir

$$G = \bigcup_{w \in W} N^- \cdot m^*_w \cdot P\,,$$

Für $G = SL(n, \mathbb{R})$ erhält man die aus der linearen Algebra bekannte Aussage, daß jede Matrix in $SL(n, \mathbb{R})$ Produkt einer unteren Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen, einer Permutationsmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix ist.

Auch in einer beliebigen Doppelnebenklasse $N \cdot m^*_w \cdot P, \quad w \in W$ kann man eine Eindeutigkeit erreichen. Dies geschieht indem man N zu einer (von w) abhängigen analytischen Untergruppe N_w von N verkleinert. Dies ändert nicht die ursprüngliche Doppelnebenklasse, aber die Abbildung
$N_w \times P \;\to\; P \cdot m^*_w \cdot P, \quad (n_w, p) \mapsto n_w \cdot m^*_w \cdot p$ wird ein Diffeomorphismus.
Es wird hier nicht näher auf dieses „Zurückschneiden" eingegangen, da uns dieses Phänomen auch bei den Kac-Moody-Gruppen wieder begegnen wird, wo es im Detaill diskutiert wird.

1.1.5 Normale, reelle Formen

Unter den reellen Formen von halbeinfachen, komplexen Lie Algebren sind manche durch besondere Eigenschaften ausgezeichnet. Die normalen, reellen Formen bilden eine solche, besonders ausgezeichnete Klasse. In gewissem Sinne sind kompakte, reelle Formen und normale, reelle Formen die entgegengesetzten Extreme unter den reellen Formen.

Definition 1.30 *Eine reelle Form* $\mathfrak{g}$ *einer halbeinfachen, komplexen Lie Algebra heißt normale reelle Form , wenn* $\mathfrak{g}$ *eine Cartan Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ *besitzt derart, daß ein maximal abelscher Unterraum* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{p}$ *schon maximal abelsch in ganz* $\mathfrak{g}$ *ist.*

Diese Definition hängt wegen Proposition 1.9 Teil (iii) und (iv) und Proposition 1.12 (i) nicht von der zu wählenden Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ ab und auch nicht von der gewählten Cartan Zerlegung von $\mathfrak{g}$, folglich nur von $\mathfrak{g}$ selbst.
Wir tragen im folgenden einige, wesentliche Eigenschaften von normalen reellen Formen zusammen (siehe [Helg] Chapter IX, Theorem 5.10 und Theorems 6.1 und 6.2 ff):

Proposition 1.31 *Es sei $\mathfrak{g}$ eine normale, reelle Form der komplexen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$. Dann gilt:*
(i) Die Komplexifizierung $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{l}$ ist eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$ mit kanonischer, reeller Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}$.
(ii) Es seien wieder Σ die Wurzel von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$. Dann sind die Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in \Sigma$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ reell-eindimensional, und die Menge der Wurzeln Δ von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{c}$ sind die $\mathbb{C}$-linearen Fortsetzungen der Wurzeln aus Σ auf $\mathfrak{c}$.
(iii) Für jede Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ gilt: $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{p} - dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{k} = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a} = dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{c}$.
(iv) Die Differenz der $\mathbb{R}$-Dimensionen von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{k}$ ist maximal für die normalen reellen Formen, und wird nur von diesen angenommen für eine fixierte, komplexe, halbeinfache Lie Algebra $\mathfrak{l}$.
(v) Jede komplexe, halbeinfache Lie Algebra $\mathfrak{l}$ besitzt normale, reelle Formen. Diese sind alle zueinander konjugiert unter $Int(\mathfrak{l})$.

Bemerkung 1.32 (i) Geben wir uns eine beliebige, halbeinfache, reelle Lie Algebra $\mathfrak{g}$ vor mit Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ zur Cartan Involution θ mit maximal abelschem Unterraum $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$, sowie einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$.
Dann ist nach Proposition 1.9 (v) $\mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{p}$ eine kompakte, reelle Form der Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ von $\mathfrak{g}$. Die zugehörige Cartan Involution von $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$ ist die $\mathbb{C}$-antilineare Fortsetzung von θ auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
Die Komplexifizierung $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{a}$ ist eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, deren kanonische, reelle Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ genau $i \cdot \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{a}$ ist. Im Fall normaler, reeller Formen ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ trivial. Dies klärt den Teil (i) der Proposition.

(ii) In der allgemeinen Situation in Teil (i) dieser Bemerkung sei Σ das Wurzelsystem bezüglich $\mathfrak{a}$. Dann ist für jedes $\alpha \in \Sigma$ die Summe $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$ direkt. Da θ diese beiden Wurzelräume austauscht, läßt θ die Summe invariant, und diese zerfällt in die Summe aus den Schnitten mit $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$, welche gleiche Dimension haben. Daher gilt angesichts der Wurzelraumzerlegung in Gleichung (1.1) von $\mathfrak{g}$ stets

$$dim\,(\mathfrak{p}) - dim\,(\mathfrak{k}) = dim\,(\mathfrak{a}) - dim\,(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}))$$

Für die normalen, reellen Formen ist $dim\,(\mathfrak{a})$ maximal, nämlich gleich dem Rang (das ist die Dimension einer Cartan Unteralgebra) von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und $dim\,(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}))$ ist minimal, nämlich gleich 0. Dies illustriert Punkt (iii) der Proposition.

Wegen ihrer Wichtigkeit werden wir hier kurz das übliche Konstruktionsverfahren für kompakte und normalen, reellen Formen skizzieren: (siehe z.B. [Hum] Proposition 25.2, oder [Helg], Ch. III, Th. 5.5)

Satz 1.33 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine komplexe, halbeinfach Lie Algebra und $\mathfrak{c}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$, sowie Δ das Wurzelsystem bezüglich $\mathfrak{c}$. Weiterhin seien T_α, $\alpha \in \Delta$ so gewählt, daß $\kappa(H, T_\alpha) = \alpha(H)$ gilt für alle $H \in \mathfrak{c}$.*

Dann existiert für jedes $\alpha \in \Delta$ ein $X_\alpha \in \mathfrak{l}^\alpha \setminus \{0\}$ so, daß $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha$ gilt, und $[X_\alpha, X_\beta] = N_{\alpha,\beta} \cdot X_{\alpha+\beta}$, falls $\alpha, \beta, \alpha+\beta$ Wurzeln sind, wobei $N_{\alpha,\beta}$ reelle Konstanten sind, für die $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ gilt.
Ist B eine Basis von Δ, so ist $\{T_\alpha : \alpha \in B\} \cup \{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ eine Basis von $\mathfrak{l}$. Diese heißt eine Weyl Basis.

Bemerkung 1.34 (i) Die Konstanten $N_{\alpha,\beta}$ sind notwendigerweise reell. Es folgt nämlich aus den anderen, geforderten Eigenschaften an die X_α, daß $N^2_{\alpha,\beta} = \frac{q\cdot(1-p)}{2}\alpha(T_\alpha)$ gilt, wobei sich die ganzen Zahlen p und q aus der α-Reihe durch β bestimmen: $\beta + n \cdot \alpha \in \Delta, \quad p \leq n \leq q$. Insbesondere ist also $N_{\alpha,\beta}$ für linear unabhängige Wurzeln α, β reell, da $p \leq 0 \leq q$ und $\alpha(T_\alpha) > 0$ gilt.
(ii) Die Konstruktion einer Weyl Basis ist der erste Schritt zur Konstruktion einer Chevalley Basis. Dies ist eine Weyl Basis, die unter Einschränkung der Skalare auf $\mathbb{Z}$ eine Lie Algebra über $\mathbb{Z}$ erzeugt, welche als $\mathbb{Z}$-Modul frei ist mit Rang $dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{l}$. Kurzum, alle Kommutatoren von Elementen einer Chevalley Basis sind Linearkombinationen über $\mathbb{Z}$ von Basiselementen. Wir werden in dieser Arbeit aber mit Weyl Basen auskommen.

Jetzt können wir die Konstruktion sowohl von normalen als auch von kompakten, reellen Formen beschreiben:

Satz 1.35 *Es sei $\{T_\alpha : \alpha \in B\} \cup \{X_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ eine Weyl Basis der komplexen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Dann gilt:*

(i) $\mathfrak{u} := \sum_{\alpha\in B} \mathbb{R} \cdot (i\,T_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathbb{R} \cdot (X_\alpha - X_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathbb{R} \cdot i \cdot (X_\alpha + X_{-\alpha})$ *ist eine kompakte, reelle Form von $\mathfrak{l}$.*

(ii) $\mathfrak{g} := \sum_{\alpha\in B} \mathbb{R} \cdot T_\alpha + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R} \cdot X_\alpha$
ist eine normale, reelle Form von $\mathfrak{l}$.

Die durch $\theta(T_\alpha) = -T_\alpha \ \alpha \in B,\ \theta(X_\alpha) = -X_{-\alpha},\ (\alpha \in \Delta)$ definierte, $\mathbb{R}$-lineare Selbstabbildung von $\mathfrak{g}$ ist eine Cartan Involution.

Tatsächlich ist Teil (i) der in der Literatur übliche Weg, die Existenz kompakter, reeller Formen beziehungsweise von Cartan Involutionen halbeinfacher, komplexer Lie Algebren zu zeigen.

1.2 Symmetrische Räume

In der klassischen Theorie werden global symmetrische Räume definiert als zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten M mit der Eigenschaft, daß zu jedem Punkt p in M eine Isometrie s_p von M existiert, welche involutorisch ist und p als isolierten Fixpunkt hat. Diese Involution ist dann eindeutig und in einer Umgebung von p die geodätische Spiegelung an p. Setzt man auf die Gruppe $I(M)$ aller Isometrien von M die kompakt offene Topologie, so besitzt diese Gruppe genau eine analytische Struktur mit dieser Topologie, so daß $I(M)$ eine Lie Transformationsgruppe von M wird. Betrachten wir nun die Zusammenhangskomponente $G := I_0(M)$ des neutralen Elements in $I(M)$ sowie die Fixpunktgruppe K eines fixierten Punktes p_0. Dann operiert G transitiv auf M, K ist eine kompakte Untergruppe von G, und die algebraische Bijektion von G/K auf M wird ein analytischer Diffeomorpismus. Mittels dieses Diffeomorphismus wird G/K zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, auf der G als Gruppe von Isometrien durch Linksmultiplikation operiert.

Die Abbildung $\sigma : G \to G, \quad \sigma : g \mapsto s_{p_0} \cdot g \cdot s_{p_0}$ ist ein involutorischer Automorphismus von G, und die Untergruppe K liegt zwischen der Fixpunktgruppe von σ und ihrer Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e von G.

Die Ableitung $d\sigma$ von σ, welche wir stets auch mit σ bezeichnen werden, ist ein involutorischer Automorphismus der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G, dessen Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ eine kompakt eingebettete Unteralgebra ist.
Ein solches Tupel $(\mathfrak{g}, \sigma)$ wird eine *orthogonale, symmetrische Lie Algebra* genannt. Es folgen einige Beispiele solcher Lie Algebren (siehe [Helg], Chapter V, § 1):

- $(\mathfrak{u}, \sigma)$ mit einer kompakten, halbeinfachen Lie Algebra und einem beliebigen involutorischen Automorphismus σ.
- $(\mathfrak{g}, \theta)$ mit einer nicht kompakten, halbeinfachen Lie Algebra und einer Cartan Involution θ.
- $(\mathfrak{u} \ltimes \mathfrak{e}, \rho)$ wobei $\mathfrak{e}$ ein $\mathbb{R}^n$ ist, betrachtet als abelsche Lie Algebra, $\mathfrak{u}$ die Lie Algebra einer kompakten Untergruppe von $GL(n, \mathbb{R})$, welche kanonisch auf $\mathfrak{e}$ operiert. Dies liefert das semidirekte Produkt $\mathfrak{u} \ltimes \mathfrak{e}$. Die Abbildung $\rho(U) = U, \ U \in \mathfrak{u}, \quad \rho(X) = -X, \ X \in \mathfrak{e}$ ist dann ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{u} \ltimes \mathfrak{e}$, mit Fixpunktalgebra $\mathfrak{u}$.

Die so konstruierten, orthogonalen symmetrischen Lie Algebren sind alle *effektiv*, das heißt der Schnitt des Zentrums der ganzen Lie Algebra mit der Fixpunktalgebra der Involution ist trivial.
Die Algebren in dieser Liste heißen in dieser Reihenfolge
orthogonale, symmetrische Lie Algebren von *kompaktem Typ*, von *nicht kompaktem Typ* und *von euklidischem Typ*.
Dann gilt der folgende Zerlegungssatz (siehe letztes Zitat):

Satz 1.36 *Jede effektive, orthogonale, symmetrische Lie Algebra $(\mathfrak{g}, \sigma)$ zerfällt in die direkte Summe dreier Ideale $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ und $\mathfrak{g}_+$, welche invariant sind unter σ, derart, daß die Einschränkung von σ auf $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ und $\mathfrak{g}_+$ effektive, orthogonale, symmetrische Lie Algebren von euklidischem beziehungsweise kompaktem beziehungsweise nicht kompaktem Typ sind.*

Die ersten beiden Typen aus obiger Liste heißen halbeinfache, orthogonale symmetrische Räume.

Definition 1.37 *Eine orthogonale, symmetrische Lie Algebra $(\mathfrak{g}, \sigma)$ heißt irreduzibel, wenn die Fixpunkalgebra von σ kein nicht triviales Ideal von $\mathfrak{g}$ enthält und der $\mathfrak{h}$-Modul $\mathfrak{q}$ irreduzibel ist, wobei $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ die $+1$- und -1-Eigenräume von σ bezeichnet.*

1.2.1 Halbeinfache, symmetrische Räume

Im allgemeinen existieren auf halbeinfachen, symmetrischen Räumen M verschiedene, nicht proportionale Riemannsche Strukturen, die G-invariant sind. Für jede solche Riemannsche Struktur ist aber der zugehörige Riemannsche Zusammenhang derselbe.
Eine Riemannsche, G-invariante Struktur auf M ist für halbeinfache, symmetrische Räume stets mittels der Killing Form gegeben: Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$ die Zerlegung der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G in die ± 1-Eigenräume bezüglich der Involution σ; so sind $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ orthogonal bezüglich der Killing Form von $\mathfrak{g}$ wegen ihrer Invarianz unter Automorphismen, und die Einschränkung der Killing Form auf $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ ist jeweils nicht ausgeartet. Wenn $(\mathfrak{g}, \sigma)$ von kompaktem Typ ist, so ist $\kappa|_{\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}}$ negativ definit, und wenn $(\mathfrak{g}, \sigma)$ von nicht kompaktem Typ ist, positiv definit.
Wir bezeichnen mit $\pi : G \to M$, $\pi : g \mapsto g \cdot p_0$ die Projektion von G auf M. Dann bildet die Ableitung $(d\pi)_e$ die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ auf $\{0\}$ und den Unterraum $\mathfrak{q}$ isomorph auf M_{p_0} ab, den *Tangentialraum* von M im Punkt p_0. Dann liefert $-\kappa|_{\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}}$, falls (G, σ) von kompaktem Typ ist, und $\kappa|_{\mathfrak{q}\times\mathfrak{q}}$, falls (G, σ) von nicht kompaktem Typ ist, eine G invariante Riemannsche Struktur auf M, wenn das so definierte Skalarprodukt auf M_{p_0} mittels der Wirkung von G transportiert wird.
Die Geodätischen von M (diese sind bereits durch den Riemannschen Zusammenhang eindeutig bestimmt) sind durch die Einschränkung der Exponentialabbildung von G auf $\mathfrak{q}$ gegeben: $\gamma_{(d\pi)_e X}(t) = \exp(tX) \cdot p_0, \quad X \in \mathfrak{q}$.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer etwas allgemeineren Version symmetrischer Räume, den sogenannten pseudo-Riemannschen, halbeinfachen, symmetrischen Räumen. Allgemein werden diese eingeführt, indem schlicht die positive Definitheit der G-invarianten Bilinearform auf den Tangentialräumen der Mannigfaltigkeit M ersetzt wird durch Nichtausgeartetheit.

Definition 1.38 *Es sei G eine zusammenhängende, halbeinfache Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$, und σ ($\neq id$) ein involutorischer Automorphismus von G. Weiterhin sei H eine Untergruppe von G, welche zwischen der Fixpunktgruppe von σ und deren Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von G liegt.*
Dann heißt der Faktorraum G/H halbeinfacher, symmetrischer Raum zur Involution σ. Das Tupel $(\mathfrak{g}, \sigma)$ heißt der zugehörige lokale, halbeinfache, symmetrische

Raum.

Bemerkung 1.39 (i) Die volle Fixpunktgruppe von σ ist wegen der Stetigkeit von σ stets eine abgeschlossene Untergruppe. Diese hat nur endlich viele Zusammenhangskomponenten. Daher ist eine Untergruppe H zwischen $\mathrm{Fix}(\sigma)$ und deren Zusammenhangskomponente des neutralen Elements stets abgeschlossen. (siehe [Schl], Ch 7.1, Prop 7.1.2)
(ii) Die Unteralgebra $\mathfrak{h} = \mathrm{Fix}(\sigma)$ von $\mathfrak{g}$ ist im allgemeinen nicht kompakt eingebettet, da die Einschränkung der Killing Form von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{h}$ nicht negativ definit ist.
(iii) Die Fixpunktalgebra jedes Automorphismus *endlicher Ordnung* ist reduktiv und nichttrivial.

Zum Beweis von Teil (iii) zitieren wir [BourII], Chapter 7, § 1.5, Proposition 13. Wir benötigen aber für die folgenden Abschnitte noch weitere Aussagen über die Fixpunktalgebra von σ (siehe z.B. [Helg], Chapter X, Lemma 5.2 und 5.3):

Proposition 1.40 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine komplexe, halbeinfache Lie Algebra und σ ein Automorphismus endlicher Ordnung von $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_0$ die Fixpunktalgebra von σ. Dann gilt:*
(i) $\mathfrak{l}$ besitzt eine kompakte, reelle Form $\mathfrak{u}$, welche invariant unter σ ist. Dann ist $\mathfrak{u}_0 := \mathfrak{u} \cap \mathfrak{l}_0$ die Fixpunktalgebra von $\sigma|_{\mathfrak{u}}$.
(ii) $\mathfrak{u}_0$ ist reduktiv, zerfällt also in die direkte Summe aus dem halbeinfachen Ideal $[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0]$ und seinem Zentrum $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_0}$.
(iii) Sei $\mathfrak{t}_0$ maximal abelsch in $[\mathfrak{u}_0, \mathfrak{u}_0]$, dann ist $\mathfrak{a}_{\mathfrak{u}_0} := \mathfrak{t}_0 + \mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_0}$ maximal abelsch in $\mathfrak{u}_0$, und die Komplexifizierung $\mathfrak{c}_0$ von $\mathfrak{a}_{\mathfrak{u}_0}$ operiert via ad halbeinfach auf $\mathfrak{l}_0$.
(iv) Der Zentralisator von $\mathfrak{c}_0$ $(\subset \mathfrak{l}_0)$ in $\mathfrak{l}$ ist eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$. Insbesondere ist $\mathfrak{l}_0$ nicht trivial.

Die Kassifikation aller halbeinfachen, symmetrischen Räume findet sich zum Beispiel in [Ber]. Die Schwierigkeit bei dieser Kassifikation besteht darin, daß zu einem halbeinfachen, lokal symmetrischen Raum $(\mathfrak{g}, \sigma)$ im allgemeinen mehrere, symmetrische Räume G/H existieren wegen Bemerkung 1.39 Teil (i). So ist beispielsweise (siehe [Guest], Chapter 18) in der Gruppe $G = SO(n+1)$ aller orthogonalen $(n+1) \times (n+1)$-Matrizen mit der Involution $\sigma(g) = E_{n,1} g E_{n,1}$, $E_{n,1} := diag(1, \ldots, 1, -1)$, die Fixpunktgruppe $H := Fix(\sigma)$ gleich $S(O(n) \times O(1))$. Diese hat zwei Zusammenhangskomponenten. Der symmetrische Raum G/H ist kanonisch isomorph zum reellen, projektiven Raum der Dimension n, indem wir G auf der Menge aller Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^{n+1}$ operieren lassen.
Die Zusammenhangskomponente H_e des neutralen Elements von H ist isomorph zu $SO(n)$, und der symmetrische Raum G/H_e wird die ganze Sphäre S^n.

1.2.2 Struktur lokaler, nicht kompakter, symmetrischer Räume

Das erste, wichtige Hilfsmittel bei der Strukturtheorie halbeinfacher, symmetrischer Räume ist die analoge Aussage von Teil (i) der letzten Proposition für reelle, halbeinfache Lie Algebren: (siehe z.B. [Helg], Chapter VI, Exercise A 8 (i))

Lemma 1.41 *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle, halbeinfache Lie Algebra und σ ein Automorphismus endlicher Ordnung, so wie θ eine Cartan Involution. Dann existiert ein Automorphismus $\varphi \in Int(\mathfrak{g})$, so daß $\varphi \circ \theta \circ \varphi^{-1}$ mit σ vertauscht.*

Äquivalent zur Forderung der Vertauschbarkeit einer Cartan Involution θ mit σ ist, daß σ die ± 1-Eigenräume $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ von θ invariant läßt.
Ab jetzt sei $\mathfrak{g}$ stets eine reelle, nicht kompakte, halbeinfache Lie Algebra, und θ eine Cartan Involution von $\mathfrak{g}$ mit zugehöriger Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, die mit der Involution σ vertauscht.
Die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in die ± 1-Eigenräume bezüglich σ sei stets $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{q}$.

Um Wurzelraumzerlegungen von $\mathfrak{g}$ in Beziehung setzen zu können zur Wirkung der Involution σ, benötigen wir die im folgenden definierten Unteralgebren:

Definition 1.42 *(i) Eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ heißt σ-invariant, wenn $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ gilt.*
(ii) Eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ heißt $\mathfrak{h}$-maximal beziehungsweise $\mathfrak{q}$-maximal, wenn $\mathfrak{a}^+ := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ maximal abelsch in $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}$ ist beziehungsweise $\mathfrak{a}^- := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ maximal abelsch in $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}$ ist.

Bemerkung 1.43 (i) Die $\mathfrak{q}$-maximalen und die $\mathfrak{h}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ werden die entscheidende Rolle bei der Konstruktion der offenen und der abgeschlossenen Doppelnebenklassen spielen.
(ii) Die Unteralgebren in Teil (ii) der Definition lassen sich leicht konstruieren und sind stets σ invariant.
(iii) Die $\mathfrak{h}$-maximalen und $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren bilden je eine Bahn unter der Wirkung von $Ad(H \cap K)$ (siehe [Schl], Lemma 7.1.5). Bemerkt sei, daß nur die Transitivität der Operation von $Ad(K \cap H)$ auf den $\mathfrak{q}$-maximalen beziehungsweise $\mathfrak{h}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ zu zeigen ist, da $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ b.z.w $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ invariant sind unter $Ad(K \cap H)$.

Der Teil (ii) soll hier wegen seiner Bedeutung für die Konstruktion komplementärer Unteralgebren ausgeführt werden:

Beweis von Teil (ii):
Es sei $\mathfrak{a}^-$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ und $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}}^-$ eine maximal abelsche Unteralgebra im Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}^-)$ von $\mathfrak{a}^-$ in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$.
Der Unterraum $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}^-)$ ist natürlich im allgemeinen keine Unteralgebra.
Dann ist $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}^- + \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}}^-$ maximal abelsch in $\mathfrak{p}$:

Nach Konstruktion ist $\mathfrak{a}$ ein abelscher Unterraum von $\mathfrak{p}$.
Sei $X \in \mathfrak{p}$ mit $[X, \mathfrak{a}] = 0$, und sei $X = X^+ + X^-$ die Zerlegung von X in die Eigenräume bezüglich σ. Wegen der Voraussetzung $\theta\sigma = \sigma\theta$ liegen X^+ und X^- in $\mathfrak{p}$. Es gilt für alle Y aus $\mathfrak{a}^-$: $0 = [X, Y] = [X^+, Y] + [X^-, Y] \in \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{h}$, also ist $[X^-, Y] = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}^-$, und wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}^-$ in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ folgt $X^- \in \mathfrak{a}^-$.
Damit vertauscht X^- auch mit $\mathfrak{a}^-_{\mathfrak{h}}$ elementweise, und es folgt $[X^+, \mathfrak{a}] = 0$. Insbesondere gilt $[X^+, \mathfrak{a}^-] = 0 = [X^+, \mathfrak{a}^-_{\mathfrak{h}}]$. Weil X^+ in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}$ liegt, folgt: $X^+ \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}^-)$. Nach Wahl von $\mathfrak{a}^-_{\mathfrak{h}}$ liegt X^+ selbst in $\mathfrak{a}^-_{\mathfrak{h}}$, da X^+ mit diesem Raum elementweise vertauscht. Zusammen folgt $X \in \mathfrak{a}$.

Jede $\mathfrak{q}$-maximale, maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ ist σ-invariant; denn für jedes $Y \in \mathfrak{a}$ mit Zerlegung $Y = Y^+ + Y^-$ bezüglich σ gilt Y^+, Y^- liegen in $\mathfrak{p}$, und für alle Z in $\mathfrak{a}^-$ gilt $0 = [Y, Z] = [Y^+, Z] + [Y^-, Z] \in \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{h}$, also $[Y^-, \mathfrak{a}^-] = 0$, womit wegen der Maximalität von $\mathfrak{a}^-$ folgt $Y^- \in \mathfrak{a}^- \subset \mathfrak{a}$. Folglich haben wir auch Y^+ in $\mathfrak{a}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{a}$ in die direkte Summe aus seinem Schnitt mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ zerfällt, der Schnitt mit $\mathfrak{q}$ ist $\mathfrak{a}^-$.

Dies zeigt auch, daß obige Konstruktion alle $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ liefert, da der Schnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}$ $(\subset \mathfrak{p})$ eine Unteralgebra in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}^-)$ sein muß, welche wiederum in diesem Unterraum maximal abelsch ist.

Die Beweise für die $\mathfrak{h}$-maximalen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ sind völlig analog. $\diamondsuit$

Ab jetzt sei stets $\mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$, die σ-invariant ist. Mit $\mathfrak{a}^+$ beziehungsweise $\mathfrak{a}^-$ werde der Schnitt von $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{h}$ beziehungsweise der Schnitt mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet, es gilt also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^+ + \mathfrak{a}^-$.

Lemma 1.44 *Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$ ist mit $\mathfrak{a}$ ebenfalls σ-invariant.*

Beweis: Der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{g}$ ist der Wurzelraum $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Dieser ist nach Bemerkung 1.22 σ-invariant. Da $\mathfrak{k}$ ebenfalls σ-invariant ist, folgt die Behauptung. $\diamondsuit$

Bezeichnungen:
Mit $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ werde die Menge aller Wurzeln α aus Σ bezeichnet, für die A_α in $\mathfrak{a}^+$ liegt; und für jede Wahl Σ^+ positiver Wurzeln von Σ sei $\Sigma(\mathfrak{a}^+)^+ := \Sigma(\mathfrak{a}^+) \cap \Sigma^+$ gesetzt.
Analog wird $\Sigma(\mathfrak{a}^-) := \{\beta \in \Sigma : A_\beta \in \mathfrak{a}^-\}$ gesetzt, und $\Sigma(\mathfrak{a}^-)^+ := \Sigma(\mathfrak{a}^-) \cap \Sigma^+$.
Die Schnitte mit $\Sigma^- = -\Sigma^+$ werden analog bezeichnet.

Dann gelten die folgenden äquivalenten Beschreibungen:
(i) $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+) \iff \sigma \cdot \alpha = \alpha \iff \alpha|_{\mathfrak{a}^-} = 0 \;\; (\subset (\mathfrak{a}^-)^*)$
(ii) $\beta \in \Sigma(\mathfrak{a}^-) \iff \sigma \cdot \beta = -\beta \iff \beta|_{\mathfrak{a}^+} = 0 \;\; (\subset (\mathfrak{a}^+)^*)$

Beweis: Da die Elemente A_α über die Killing Form definiert sind ($\kappa(A, A_\alpha) = \alpha(A) \; \forall\, A \in \mathfrak{a}$) und $\mathfrak{a}$ σ-invariant ist, folgt $\sigma(A_\alpha) = A_{\sigma\cdot\alpha}$. Dies zeigt die beiden ersten Äquivalenzen, da stets $A_{-\beta} = A_\beta$ für alle Wurzeln β aus Σ gilt.

Wenn $\sigma \cdot \alpha = \alpha$ gilt, so gilt für alle A aus $\mathfrak{a}^-$: $-\alpha(A) = \alpha(\sigma^{-1}(A)) = \sigma \cdot \alpha(A) = \alpha(A)$, und es folgt die zweite Äquivalenz in (i). Die zweite Äquivalenz in (ii) zeigt man analog. $\diamondsuit$

Nun haben wir die folgende Zerlegung des Wurzelsystems Σ (Für einen sehr knappen Beweis siehe [Mat]):

Proposition 1.45 *Für jedes System positiver Wurzeln Σ^+ in Σ hat man die folgende Zerlegung von Σ^+ und Σ^- in disjunkte Teilmengen:*

$$\begin{aligned} \Sigma^+ &= \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+ \cup ((\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)) \cup (\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \\ \Sigma^- &= \Sigma(\mathfrak{a}^+)^- \cup ((\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)) \cup (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Hierin besteht jeweils die mittlere Teilmenge aus den Wurzeln in Σ^+ beziehungsweise Σ^-, die von σ ohne Fixpunkte permutiert werden, und die jeweils dritten Teilmengen der rechten Seiten werden von σ bijektiv aufeinander abgebildet. Die jeweils ersten Teilmengen bestehen aus den von σ fixierten Wurzeln.
θ bildet die übereinanderstehenden Teilmengen bijektiv aufeinander ab.

Beweis:
Es sei $\alpha \in \Sigma^+$ und $\beta \in \Sigma$ mit $\alpha = \sigma \cdot \beta$. Ist $\alpha = \beta$, so gilt $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+$, ist $\alpha \neq \beta$, und $\beta \in \Sigma^+$ so gilt $\alpha, \beta \in (\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, weil σ Involution ist; und wenn $\beta \in \Sigma^-$, so ist $\alpha \in \Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^-$ und $\beta \in \Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^+$. Dies zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Nun sei $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+$, dann ist $\theta \cdot \alpha \in \Sigma^-$ nach Bemerkung 1.23, und $\sigma \cdot (\theta \cdot \alpha) = \theta \cdot (\sigma \cdot \alpha) = \theta \cdot \alpha$, also $\theta \cdot \alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-$.
Für $\alpha \in \Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^-$ und $\beta \in \Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^+$ mit $\alpha = \sigma \cdot \beta$ gilt $\theta \cdot \alpha \in \Sigma^-$ und $\sigma \cdot (\theta \cdot \alpha) = \theta \cdot (\sigma \cdot \alpha) = \theta \cdot \beta \in \Sigma^+$, damit ist $\theta \cdot \alpha \in (\sigma \cdot \Sigma^+) \cap \Sigma^-$.
Da $|\Sigma^+| = |\Sigma^-|$ ist, und - nach dem Gezeigten - θ die ersten und dritten Teilmengen bijektiv aufeinander abbildet, folgt der Rest. $\diamondsuit$

Nun folgt ein einfaches, aber wichtiges Korollar:

Korollar 1.46 *Für $\alpha \in \Sigma \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ gilt $\mathfrak{g}^\alpha \cap \sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \{0\}$, und für den σ-invarianten Unterraum $\mathfrak{g}^\alpha + \sigma(\mathfrak{g}^\alpha)$ hat man die Zerlegung*
$\mathfrak{g}^\alpha + \sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \{X + \sigma(X) : X \in \mathfrak{g}^\alpha\} \oplus \{Y - \sigma(Y) : Y \in \mathfrak{g}^\alpha\}$ *in die Eigenräume von σ; diese haben die gleiche Dimension.*

Jetzt können wir in Termen von Wurzelräumen beschreiben, wie die Summe der Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ und der minimal parabolischen Unteralgebra $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$, gebildet zu einer σ-invarianten, maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$, aussieht. Der Beweis wird hier geliefert, da er zum einen in [Mat], Lemma 13 sehr knapp gefaßt ist, und zum anderen für das Verständnis der weiteren Überlegungen von Bedeutung ist:

Proposition 1.47 *Für jede Wahl der σ-invarianten, maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ und jedes System positiver Wurzeln Σ^+ des Wurzelsystems Σ bezüglich*

$\mathfrak{a}$ *gilt die folgende Zerlegung:*

$$\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+) =$$

$$= \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \textstyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cup \sigma \cdot \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha +$$

$$+ \textstyle\sum_{\alpha \in (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \sigma(\mathfrak{g}^\alpha)) \cap \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{h}$$

Beweis: „$\supseteq$": Zu zeigen ist nur, daß für $\alpha \in \Sigma^+$ stets $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha} \subseteq \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ gilt: Sei $X \in \mathfrak{g}^\alpha$, dann ist $X \in \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ und $X + \sigma(X) \in \mathfrak{h}$, also $\sigma(X) \in \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$.

„$\subseteq$": Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{h}$ in der rechten Seite der behaupteten Gleichung enthalten ist: Nach Gleichung (1.2) gilt für Σ die Zerlegung
$\Sigma = (\Sigma^+ \cup \sigma \cdot \Sigma^+) \cup ((\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)) \cup \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-$.
Damit zerlegt sich $\mathfrak{g}$ wie folgt in σ-invariante Unterräume:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cup \sigma \cdot \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha + \sum_{\alpha \in (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \sigma(\mathfrak{g}^\alpha)) + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Daher gilt die Gleichung

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g} =$$

$$= (\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) + (\textstyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cup \sigma \cdot \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha) \cap \mathfrak{h} +$$

$$+ \textstyle\sum_{\alpha \in (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \sigma(\mathfrak{g}^\alpha)) \cap \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{h}).$$

Diese Summe ist offensichtlich in der rechten Seite der behaupteten Gleichung enthalten. $\diamondsuit$

Nach Proposition 1.44 permutiert σ die Teilmenge $(\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ fixpunktfrei. Daher existieren r (≥ 0) verschiedene Wurzeln $\alpha_1, \ldots \alpha_r$ in Σ^-, so daß $\sigma \cdot \alpha_i \neq \alpha_j$ für alle $1 \leq i, j \leq r$, und

$$\{\alpha_1, \ldots \alpha_r, \sigma \cdot \alpha_1, \ldots \sigma \cdot \alpha_r\} = (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) \tag{1.3}$$

gilt. Damit haben wir das folgende Korollar (siehe [Mat], Proposition 1):

Korollar 1.48 $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ *zerlegt sich in die direkte Summe*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \cup \sigma \cdot \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} ((\mathfrak{g}^{\alpha_i} + \sigma(\mathfrak{g}^{\alpha_i})) \cap \mathfrak{h}) \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{h}).$$

Ein Vektorraumkomplement zu $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ *in* $\mathfrak{g}$ *ist gegeben durch*

$$\bigoplus_{i=1}^{r} ((\mathfrak{g}^{\alpha_i} + \sigma(\mathfrak{g}^{\alpha_i})) \cap \mathfrak{q}) \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} (\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{q}) \tag{1.4}$$

Die Kodimension von $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ *in* $\mathfrak{g}$ *ist*

$$\sum_{i=1}^{r} dim(\mathfrak{g}^{\alpha_i}) + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-} dim(\mathfrak{g}^{\alpha} \cap \mathfrak{q}) \tag{1.5}$$

Beweis: Die Zerlegung von $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ ist klar, da in der Zerlegung dieses Unterraums in Proposition 1.46 die Wurzeln in den drei Summanden aus Teilmengen von Σ mit paarweise leerem Schnitt kommen. Die Zerlegung des zweiten Summanden als direkte Summe folgt aus Gleichung (1.3).
Es zerfällt der Unterraum $\mathfrak{g}^{\alpha_i} + \sigma(\mathfrak{g}^{\alpha_i})$ in die direkte Summe aus seinem Schnitt mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ für jedes $i \in \{1, \ldots, r\}$, ebenso der σ-invariante Wurzelraum $\mathfrak{g}^{\alpha}$ für jedes $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-$. Weil das Wurzelsystem Σ die disjunkte Vereinigung aus $(\Sigma \cup \sigma \cdot \Sigma)$, $\Sigma(\mathfrak{a}^+)^-$ und der Teilmenge aus Gleichung (1.3) ist, liefert (1.4) ein Vekorraumkomplement. Die Dimensionsformel folgt aus dann aus Gleichung (1.4) und Korollar 1.45. $\diamondsuit$

Charakterisierungen für $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+) = \mathfrak{g}$

Für die Konstruktion komplementärer Unteralgebren zu $\mathfrak{h}$ in Abschnitt 1.5 wird es sich als nützlich erweisen, verschiedene Charakterisierungen zu kennen, wann $\mathfrak{h}$ in der Summe mit einer minimal parabolischen Unteralgebra ganz $\mathfrak{g}$ ergibt. Wir stellen diese Ergebnisse hier mit Beweisen vor, da dies bei der konkreten Konstruktion hilfreich sein wird. (siehe wieder [Mat], Prop. 1):

Satz 1.49 *Äquivalent für die Wahl eines σ-invarianten Unterraums $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ und eines Systems positiver Wurzeln Σ^+ sind die folgenden Bedingungen:*

- $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+) = \mathfrak{g}$
- *Für alle $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^-$ liegt $\mathfrak{g}^{\alpha}$ in $\mathfrak{h}$, und $(\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$.*
- *Für alle $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ liegt $\mathfrak{g}^{\alpha}$ in $\mathfrak{h}$, und $(\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$.*
- $\mathfrak{a}$ *ist $\mathfrak{q}$-maximal und für alle α in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ ist $-\sigma \cdot \alpha$ wieder in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$.*

Definition 1.50 *Ein System positiver Wurzeln Σ^+ mit der Eigenschaft im letzten Punkt der äquivalenten Bedingungen im Satz 1.49 heißt $\mathfrak{q}$-kompatibel.*

Zunächst zeigen wir ein einfaches Lemma:

Lemma 1.51 *Für jeden σ-invarianten, maximal abelschen Unterraum $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ gilt*

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^-) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^{\alpha} \tag{1.6}$$

Beweis:
Der Zentralisator von $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ in $\mathfrak{g}$ ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ in der Summe mit vollen Wurzelräumen bezüglich $\mathfrak{a}$, da er invariant ist unter $ad(\mathfrak{a})$. Ein Wurzelraum $\mathfrak{g}^{\alpha}$ liegt

genau dann in dem fraglichen Zentralisator, wenn $\alpha|_{\mathfrak{a}^-} = 0$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$. Das zeigt die behauptete Gleichheit. $\diamondsuit$

Beweis (von Satz 1.49):
Die Äquivalenz der ersten beiden Bedingungen ist klar mit der Dimensionsformel (1.5) für ein Vektorraumkomplement von $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$.

Für die Äquivalenz der zweiten und dritten Bedingung ist wegen Proposition 1.46 nur zu zeigen: Wenn $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+$ und $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{h}$, so gilt $\mathfrak{g}^{-\alpha} \subseteq \mathfrak{h}$: Ist $X \in \mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{h}$, so gilt $\sigma(\theta(X)) = \theta(\sigma(X)) = \theta(X)$, also ist $\theta(X) \in \mathfrak{g}^{-\alpha} \cap \mathfrak{h}$, folglich $\mathfrak{g}^{-\alpha} = \theta(\mathfrak{g}^\alpha) \subseteq \mathfrak{h}$.

Zur entscheidenden Äquivalenz der dritten und vierten Bedingung:
Nach Proposition 1.46 ist die Bedingung $(\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$ äquivalent zu $\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^- = \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$. Ist in diesem Fall $\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, so gilt $-\alpha \in \Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^+$ und folglich $-\sigma \cdot \alpha = \sigma \cdot (-\alpha) \in \sigma \cdot (\Sigma^-) \cap \Sigma^+ = \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$.
Ist umgekehrt $\alpha \in (\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) \neq \emptyset$, so ist $-\alpha = \theta \cdot \alpha \in (\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^-) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ wiederum nach Proposition 1.43, und damit $\sigma \cdot (-\alpha) \notin (\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, die zweite Bedingung im vierten Punkt ist also verletzt.

Nun müssen wir nur noch die folgende Äquivalenz zeigen:

- $\mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{h}$ für alle $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$
- $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{q}$-maximal, d.h. $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ ist maximal abelsch in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$.

Sei die erste Bedingung vorausgesetzt. Die drei Summanden auf der rechten Seite der Gleichung (1.6) sind invariant unter σ und θ. Daher gilt die Gleichung $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}}(\mathfrak{a}^-) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}^-) \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \{0\} + \mathfrak{a}^- + (\sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha) \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{a}^-$, also ist $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{q}$-maximal.

Ist umgekehrt $0 \neq Y \in \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{q}$ für ein $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, so ist $Y \neq \theta(Y) \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$, und $\mathfrak{a}^- + \mathbb{R} \cdot (Y - \theta(Y))$ ist abelscher Unterraum von $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, der $\mathfrak{a}^-$ echt umfaßt:
Da Y in $\mathfrak{q}$ liegt, ist $Y - \theta(Y) \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$; weiterhin ist $0 \neq Y - \theta(Y) \in \mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha}$, insbesondere liegt $Y - \theta(Y)$ nicht in $\mathfrak{a}$. Schließlich vertauscht $Y - \theta(Y)$ mit $\mathfrak{a}^-$, weil $\alpha|_{\mathfrak{a}^-} = (-\alpha)|_{\mathfrak{a}^-} = 0$, nach Wahl von α. $\diamondsuit$

Die entscheidende Aussage in der Arbeit von Matsuki ([Mat], Prop.1) ist die folgende: Ist H eine abgeschlossene Untergruppe der Lie Gruppe G mit Lie Algebra $\mathfrak{h}$ und P_0 irgendeine minimal parabolische Untergruppe von G, so existiert eine endliche Teilmenge $\{x_1, \ldots, x_r\}$ von G, derart, daß $H \cdot x_1 \cdot P_0, \ldots, H \cdot x_r \cdot P_0$ alle offenen Doppelnebenklassen in der Doppelnebenklassenzerlegung von G bezüglich der Untergruppen H und P_0 sind.
Dabei hängt die Zahl r nur von der reellen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G ab.

Dies besagt, daß zu jeder minimal parabolischen Untergruppe P von G, für welche $H \cdot P$ eine offene Teilmenge von G ist, ein $h \in H$ und ein $i \in \{1, \ldots, r\}$ existieren, so daß $P = h \cdot x_i \cdot P_0 \cdot (x_i)^{-1} \cdot h^{-1}$ gilt; der Index i ist dabei eindeutig.
Beweis:
Minimal parabolische Untergruppen sind alle zueinander konjugiert in G. Damit

existiert ein g in G, so daß $P = g \cdot P_0 \cdot g^{-1}$ gilt; mit $H \cdot P$ ist dann auch $H \cdot g \cdot P_0$ offen in G, und es existiert ein $j \in \{1, \ldots, r\}$, so daß $H \cdot g \cdot P_0 = H \cdot x_j \cdot P_0$ gilt. Das heißt, $g = h \cdot x_j \cdot p$ für ein $p \in P$ und $h \in H$. Insgesamt haben wir $P = hx_jP_0(x_j)^{-1}h^{-1}$.
Nun zur Eindeutigkeit: Seien $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $h \in H$ und $x_iP_0(x_i)^{-1} = hx_jP_0(x_j)^{-1}h^{-1}$. Dann wird P_0 normalisiert von $(x_i)^{-1} \cdot h \cdot x_j$, welches damit in P_0 liegt, da minimal parabolische Untergruppen selbstnormalisierend sind; es existiert also ein p in P, so daß $x_i \cdot p = h \cdot x_j$. Dies heißt nach Wahl der Doppelnebenklassenvertreter $i = j$. $\diamondsuit$

Insbesondere existiert eine minimal parabolisch Untergruppe P von G derart, daß $H \cdot P$ offene Teilmenge von G ist.
Es gilt der folgende, wichtige Satz (siehe [Mat], Theorem 1, (i)):

Satz 1.52 *Zu jeder minimal parabolischen Unteralgebra $\mathcal{P}$ der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ von G existiert zur vorgegebenen Cartan Involution θ, bezüglich der $\mathfrak{g}$ zerlegt wird in $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$, und die mit σ vertauscht, eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ und ein System positiver Wurzeln Σ^+ bezüglich $\mathfrak{a}$, so daß $\mathcal{P}$ unter $Ad(H)$ konjugiert ist zur minimal parabolischen Unteralgebra $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$* $\diamondsuit$

Wenn in obiger Situation ($H \cdot P$ offen in G) $\mathcal{P}$ die Lie Algebra der minimal parabolischen Untergruppe P ist, so gilt $\mathfrak{h} + \mathcal{P} = \mathfrak{g}$. Nehmen wir die Konjugation aus dem Satz hier vor, das heißt wir konjugieren diese Summe mit einem $h \in H$ mit den im Satz erklärten Eigenschaften, so bleibt $\mathfrak{h}$ invariant, und wir haben die Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$.
Satz 1.49 besagt für diese Gleichung, daß $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{q}$-maximal ist, und Σ^+ $\mathfrak{q}$-kompatibel.

1.3 Konstruktion q-kompatibler, positiver Wurzeln

In diesem Abschnitt entwickeln wir ein Verfahren zur Konstruktion $\mathfrak{q}$-kompatibler Wurzeln. Mit diesem Verfahren werden wir in Abschnitt 1.5 komplementäre Unteralgebren zur Fixpunktalgebra von σ in $\mathfrak{g}$, konstruieren. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, spielen die $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ eine wichtige Rolle. Wir wollen uns daher zunächst mit dem Fall beschäftigen, in dem die abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ stets trivial ist. Da eindimensionale Unterräume stets abelsch sind, ist dies äquivalent zu $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$. Um diese Situation zu klären, brauchen wir zunächst eine Definition und ein Lemma:

Definition 1.53 *Ein halbeinfacher, lokal symmetrischer Raum $(\mathfrak{g}, \sigma)$ heißt semi-irreduzibel, wenn die Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ von σ kein Ideal der ganzen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ enthält.*

Jetzt können wir das folgende, einfache Lemma zeigen (siehe auch [Helg], Chapter V, Theorem 4.1 nebst Beweis):

Lemma 1.54 *Ein halbeinfacher, lokal symmetrischer Raum* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *mit der reellen, halbeinfachen Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist genau dann semi-irreduzibel, wenn* $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] = \mathfrak{h}$*, gilt, wobei* $\mathfrak{h}$ *und* $\mathfrak{q}$ *die* ± 1 *Eigenräume von* σ *sind.*

Beweis: Sei $\mathfrak{i} \neq \{0\}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$, welches in $\mathfrak{h}$ liegt. Dann ist das orthogonale Komplement $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich der Killing Form ein Ideal von $\mathfrak{g}$. Wegen der Halbeinfachheit von $\mathfrak{g}$ gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{j}$, und $\mathfrak{j}$ ist mit $\mathfrak{i}$ wieder σ-invariant. Da $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{h}$ liegt, folgt $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{j}$, und wir haben $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathrm{Fix}(\sigma|_{\mathfrak{j}})$. Dies ist eine echte Unteralgebra von $\mathfrak{h} = \mathfrak{i} + \mathrm{Fix}(\sigma|_{\mathfrak{j}})$.

Sei umgekehrt $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ echt in $\mathfrak{h}$ enthalten. Der Unterraum $\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ ist stets ein Ideal von $\mathfrak{g}$: Für $X \in \mathfrak{q}$ ist $[X, \mathfrak{q} + [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ Teilmenge von $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] + \mathfrak{q}$, und für $Y \in \mathfrak{h}$ ist $[Y, \mathfrak{q} + [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ wieder in $\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ enthalten.
Das orthogonale Komplement dieses Ideals in $\mathfrak{g}$ ist wieder ein Ideal von $\mathfrak{g}$, welches in $\mathfrak{h}$ liegt, da $\mathfrak{q} + [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ den Unterraum $\mathfrak{q}$ enthält, und es ist nicht trivial, weil nach Voraussetzung $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ nicht ganz $\mathfrak{h}$ ist. $\diamondsuit$

Jetzt können wir die folgende Aussage über $\mathfrak{q}$-maximale Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ beweisen:

Proposition 1.55 *Ist einer der halbeinfachen, lokal symmetrischen Räume* $(\mathfrak{g}, \theta)$ *oder* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *semi-irreduzibel, dann ist für jede* $\mathfrak{q}$*-maximale, maximal abelsche Unteralgebra* $\mathfrak{a}$ *von* $\mathfrak{p}$ *der Unterraum* $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ *nicht trivial.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage durch Widerspruch: Der Unterraum $\mathfrak{a}^-$ einer $\mathfrak{q}$-maximalen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ ist genau dann trivial, wenn $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ trivial ist. In diesem Fall zerfällt $\mathfrak{g}$ in die direkte Summe $\mathfrak{g} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p}) \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{h} \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{k} \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p})$. Dies zeigt die Inklusionen $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{h}$.
Insbesondere haben wir $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$ sowie $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$.
Ist nun der symmetrische Raum $(\mathfrak{g}, \theta)$ semi-irreduzibel, so folgt mit Lemma 1.52 die Inklusion $\mathfrak{k} = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}$, also $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$, was den Widerspruch $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$, also $\mathfrak{q} = \{0\}$ bzw. $\sigma = id$ liefert.
Wenn der symmetrische Raum $(\mathfrak{g}, \sigma)$ semi-irreduzibel ist, so ergibt sich analog $\theta = id$, was ausgeschlossen ist, da $\mathfrak{g}$ als nicht kompakte Lie Algebra vorausgesetzt war. $\diamondsuit$

Bemerkung 1.56 (i) Betrachten wir nocheinmal die Situation in der Proposition 1.55, um zu sehen, wie man Beispiele konstruieren kann, in welchen beide symmetrischen Räume nicht semi-irreduzibel sind und $\mathfrak{a}^-$ trivial ist: Ist $(\mathfrak{g}, \theta)$ nicht semi-irreduzibel und $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ trivial, so ist wegen der Invarianz von $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ unter σ, $\mathfrak{p}$ ein Unterraum von $\mathfrak{h}$. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{i} (\neq \{0\})$ das maximale Ideal von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{k}$. Dann ist $\sigma(\mathfrak{i})$ wieder Ideal von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{k}$ gleicher Dimension, also ist $\mathfrak{i}$ σ-invariant; damit ist auch das orthogonale Komplement $\mathfrak{i}^\perp$ σ- invariant, und wir haben $\mathfrak{i}^\perp = \mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, sowie $\mathfrak{k} = \mathfrak{i} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$, weil θ semi-irreduzibel ist auf $\mathfrak{i}^\perp$ (Maximalität von $\mathfrak{i}$). Mit $\mathfrak{p}$ ist auch $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ in $\mathfrak{h}$ enthalten, folglich liegt das nicht triviale ($\mathfrak{p} \neq \{0\}$) Ideal $\mathfrak{i}^\perp$ in $\mathfrak{h}$. σ operiert also als die Identität auf $\mathfrak{i}^\perp$ und als Involution nur auf dem halbeinfachen, kompakten Ideal $\mathfrak{i}$.

(ii) Wenn $(\mathfrak{g}, \sigma)$ nicht semi-irreduzibel ist, so bezeichne $\mathfrak{j}\,(\neq \{0\})$ das maximale Ideal von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{h}$. Dann ist - wie gehabt - $\mathfrak{g} = \mathfrak{j} + \mathfrak{j}^\perp$, und σ operiert semi-irreduzibel auf $\mathfrak{j}^\perp$. Wie eben in Teil (i) läßt θ beide Ideale invariant, folglich vertauschen $\sigma|_{\mathfrak{j}^\perp}$ und $\theta|_{\mathfrak{j}^\perp}$. Das Problem, komplementäre Unteralgebren zu $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ zu finden, ist damit auf den semi-irreduzibelen, symmetrischen Raum $(\mathfrak{j}^\perp, \sigma|_{\mathfrak{j}^\perp})$ zurückgeführt.

(iii) Ab jetzt beschränken wir uns für den Rest dieses Kapitels auf semi-irreduzibele, symmetrische Räume $(\mathfrak{g}, \sigma)$ mit nicht kompakter, halbeinfacher Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit Cartan Involution θ, die mit σ vertauscht. Nach Proposition 1.55 und Bemerkung 1.43 (iii) sind dann die Unterräume $\mathfrak{a}^-$ nicht trivial für jeden $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unterraum $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$.

Um die $\mathfrak{q}$-kompatiblen Systeme positiver Wurzeln in Σ besser zu verstehen und sie auch konstruieren zu können, müssen wir unseren Begriffsapparat noch etwas ausbauen:

Definition 1.57 *Es sei Σ ein (nicht notwendig reduziertes) Wurzelsystem auf dem reellen, euklidischen Raum $\mathfrak{v}$.*
(i) Es sei Σ^+ ein System positiver Wurzeln in Σ. Dann heißt $\mathcal{C} := \{X \in \mathfrak{v} : \alpha(X) > 0 \ \forall \alpha \in \Sigma^+\}$ die Weyl Kammer zu Σ^+ in $\mathfrak{v}$.
Der topologische Abschluß von $\mathcal{C}$ in $\mathfrak{v}$ heißt die abgeschlossene Weyl Kammer zu Σ^+ in $\mathfrak{v}$.
(ii) Ein X in $\mathfrak{v}$ heißt regulär, wenn $\alpha(X) \neq 0$ gilt für alle α in Σ.
(iii) Ist $\mathfrak{u}$ ein Unterraum von $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{u} \neq \{0\}$, so heißt ein $Y \in \mathfrak{u}$ in $\mathfrak{u}$ regulär, wenn für alle α in Σ mit $\alpha|_{\mathfrak{u}} \neq \{0\}$ stets $\alpha(Y) \neq 0$ gilt.

Es gelten die folgenden, bekannten Tatsachen:

- Ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ eine Basis für Σ^+, so liefert der Schnitt über die positiven Halbräume $\{X \in \mathfrak{v} : \alpha_i(X) > 0\}$ $(1 \leq i \leq k)$ die Weyl Kammer $\mathcal{C}$ zu Σ^+; da $k = dim(\mathfrak{v})$ gilt, ist $\mathcal{C}$ nicht leer.
- Mit der in Abschnitt 1.1.3 definierten Operation der Weyl Gruppe des Wurzelsystems Σ auf $\mathfrak{v}$ gilt: Die Weyl Gruppe operiert simultan und scharf einfach transitiv auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln und deren Weyl Kammern, das heißt, für jedes $w \in W$ und für jedes System positiver Wurzeln Σ^+ mit Weyl Kammer $\mathcal{C}$ ist $w \cdot \Sigma^+$ System positiver Wurzeln mit Weyl Kammer $\tilde{w}(\mathcal{C})$.
- Zu jedem regulären $X \in \mathfrak{v}$ existiert genau ein System positiver Wurzeln, so daß X in der zugehörigen Weyl Kammer liegt. Da die regulären Elemente eine offen dichte Teilmenge von $\mathfrak{v}$ bilden, wird insbesondere $\mathfrak{v}$ von den abgeschlossenen Weyl Kammern überdeckt.

- Es sei $\mathfrak{u} \neq \{0\}$ ein Unterraum von $\mathfrak{v}$ und $\Sigma_{\mathfrak{u}} = \{\alpha \in \Sigma : \alpha|_{\mathfrak{u}} \neq 0\}$, so ist $\Sigma_{\mathfrak{u}}$ im allgemeinen kein Wurzelsystem auf $\mathfrak{u}$.
- Die in $\mathfrak{u}$ regulären Elemente eines Unterraums $\mathfrak{u} \neq \{0\}$ von $\mathfrak{v}$ bilden eine offen dichte Teilmenge von $\mathfrak{u}$, da die Einschränkung der Linearformen der (endlichen) Menge Σ auf $\mathfrak{u}$ den Dualraum von $\mathfrak{u}$ erzeugt.

Die folgenden Ergebnisse sind nun das entscheidende Hilfsmittel für die Konstruktion der $\mathfrak{q}$-kompatiblen Wurzeln. Die Beweise sind am besten nachzulesen bei [Ros], p.161 - p.165, insbesondere Theorem 5:

Proposition 1.58 *Es sei $\mathfrak{a}$ eine $\mathfrak{q}$-maximale, maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ und Σ das zugehörige Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ mit Weyl Gruppe W. Dann gilt:*
(i) Die Einschränkung von $\{\alpha \in \Sigma : \alpha|_{\mathfrak{a}^-} \neq 0\} = \Sigma \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ auf $\mathfrak{a}^-$ ist ein Wurzelsystem $\mathcal{R}$ auf $\mathfrak{a}^-$, wenn man $\mathfrak{a}^-$ mit dem durch durch die Einschränkung der Killing Form von $\mathfrak{g}$ gegebenen Skalarprodukt versieht. Die Weyl Gruppe von $\mathcal{R}$ werde mit $W_{\mathcal{R}}$ bezeichnet.

(ii) $W^\sigma := \{w \in W : w(\mathfrak{a}^-) = \mathfrak{a}^-\}$ ist die Untergruppe von W aller Weyl Gruppenelemente, die $\mathfrak{a}^-$ und $\mathfrak{a}^+$ invariant lassen; W^σ ist die Untergruppe aller $w \in W$, die mit der Wirkung von σ auf das Wurzelsystem Σ vertauschen.

(iii) Es bezeichne $W^{\mathfrak{a}^-}$ die Untergruppe aller $w \in W$, die $\mathfrak{a}^-$ punktweise festlassen. Dann ist $W^{\mathfrak{a}^-}$ die Weyl Gruppe des Wurzelsystems $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ auf $\mathfrak{a}^+$. Die Weyl Gruppe $W_{\mathcal{R}}$ des Wurzelsystems $\mathcal{R}$ auf $\mathfrak{a}^-$ ist isomorph zur Faktorgruppe $W^\sigma / W^{\mathfrak{a}^-}$ vermöge $w \cdot W^{\mathfrak{a}^-} \mapsto w|_{\mathfrak{a}^-}$. $\diamondsuit$

Bemerkung 1.59 (i) Die Ordnung der Untergruppe W^σ von W hängt von der Wahl des σ-invarianten, maximal abelschen Unterraums $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ ab. W^σ ist aber eindeutig bis auf Isomorphie, wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{q}$-maximal (beziehungsweise $\mathfrak{h}$-maximal) ist, wie in diesem Abschnitt stets vorausgesetzt ist.
(ii) Die in Teil (iii) enthaltene Behauptung, daß $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ ein Wurzelsystem auf $\mathfrak{a}^+$ ist (genauer gesagt die Einschränkung auf $\mathfrak{a}^+$), erkennt man direkt aus der Definition von $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$: $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+) \Leftrightarrow A_\alpha \in \mathfrak{a}^+$. Damit ist die Einschränkungsabbildung $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+) \mapsto \alpha|_{\mathfrak{a}^+} \in (\mathfrak{a}^+)^*$ eine Isometrie.
(iii) Wenn $\mathfrak{a}^+$ trivial ist, so ist $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ leer und $W^{\mathfrak{a}^-}$ trivial. $\diamondsuit$

Offenbar sind die in $\mathfrak{a}^-$ regulären Elemente von $\mathfrak{a}$ genau die regulären Elemente von $\mathfrak{a}^-$ bezüglich des Wurzelsystems $\mathcal{R}$.
Die Konstruktion $\mathfrak{q}$-kompatibler Systeme positiver Wurzeln in Σ werden wir über die in $\mathfrak{a}^-$ regulären Elemente erzielen. Der folgende Satz klärt zunächst den Zusammenhang zwischen positiven Wurzeln in $\mathcal{R}$ und in Σ (siehe [Schl], Lemma 7.2.3, 7.2.4, p.123 für den Teil (i) des Satzes):

Satz 1.60 *Es sei $\mathfrak{a}$ eine $\mathfrak{q}$-maximale, maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$. Für die Wurzelsysteme Σ und $\mathcal{R}$ aus Proposition 1.58 gelten dann die folgenden Aussagen:*

(i) Sei Σ^+ ein System positiver Wurzeln in Σ. Dann ist $\{\alpha|_{\mathfrak{a}^-} : \alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)\} \subset \mathcal{R}$ ein System positiver Wurzeln in $\mathcal{R}$ genau dann, wenn Σ^+ $\mathfrak{q}$-kompatibel ist.
(ii) Zu jedem System positiver Wurzeln $\mathcal{R}^+$ in $\mathcal{R}$ gibt es ein $\mathfrak{q}$-kompatibles System positiver Wurzeln Σ^+ in Σ derart, daß $\mathcal{R}^+$ aus den Einschränkungen uf $\mathfrak{a}^-$ der Wurzeln in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ besteht.

Beweis: (i) Es sei $\mathcal{R}^+ = \{\alpha|_{\mathfrak{a}^-} : \alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)\}$ System positiver Wurzeln des Wurzelsystems $\mathcal{R}$ auf $\mathfrak{a}^-$ und $H_0 \in \mathfrak{a}^-$ in der zugehörigen offenen Weyl Kammer. Die $\mathfrak{q}$-Kompatibilität von Σ^+ bedeutet nach Definition 1.50, daß $(\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ leer ist. Seien also $\alpha, \beta \in \Sigma^+$, $\alpha \neq \beta$ und $\alpha = \sigma \cdot \beta$, dann ist $\alpha, \beta \notin \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ und $0 < \alpha|_{\mathfrak{a}^-}(H_0) = \alpha(H_0) = \sigma \cdot \beta(H_0) = \beta(\sigma^{-1}(H_0)) = -\beta(H_0)$. Da aber H_0 in der Weyl Kammer zu Σ^+ liegt, und α, β in Σ^+ liegen gilt auch $\beta(H_0) > 0$. Dieser Widerspruch liefert, daß Σ^+ $\mathfrak{q}$-kompatibel ist.

Die Umkehrung ist gut lesbar in [Schl], Lemma 7.2.3, 7.2.4, p.123 bewiesen, indem aus der Basis von Σ zu Σ^+ eine Basis des Wurzelsystems $\mathcal{R}$ konstruiert wird, welche $\mathcal{R}^+$ erzeugt.

(ii) Es sei H_0 ein reguläres Element in $\mathfrak{a}^-$ bezüglich $\mathcal{R}$, welche das vorgegebene System positiver Wurzeln $\mathcal{R}^+$ festlegt. H_0 liegt im Abschluß (mindestens) einer Weyl Kammer von $\mathfrak{a}$ bezüglich Σ. Fixieren wir eine solche Weyl Kammer $\mathcal{C}$ mit zugehörigen positiven Wurzeln Σ^+. Es ist $\alpha(H_0) \neq 0$ für alle $\alpha \in \Sigma \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, da $\mathcal{R}$ die Einschränkung der Wurzeln von $\Sigma \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ auf $\mathfrak{a}^-$ ist; da H_0 im Abschluß von $\mathcal{C}$ liegt, gilt $\alpha(H_0) \geq 0$ für alle α in Σ^+, also ist $\alpha(H_0) > 0$ für alle α in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$. Daher ist $(\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ - wie im Beweis von Teil (i) - leer, da $\sigma(H_0) = -H_0$. Damit ist Σ^+ $\mathfrak{q}$-kompatibel. Dies zeigt die Existenz $\mathfrak{q}$-kompatibler positiver Wurzeln in Σ, derart, daß die Einschränkung der Wurzeln aus $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ auf $\mathfrak{a}^-$ gleich $\mathcal{R}^+$ liefert: Zu zeigen bleibt nur das folgende: Wenn $\alpha|_{\mathfrak{a}^-}$ in $\mathcal{R}^+$ liegt, so ist α auch in Σ^+. Nach Voraussetzung an H_0 ist $\alpha(H_0) > 0$. Da H_0 in der abgeschlossenen Weyl Kammer zu Σ^+ liegt, folgt $\alpha \in \Sigma^+$. ♢

Konstruktion: Die Konstruktion von $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ haben wir bereits in Bemerkung 1.43 (ii) nebst Beweis beschrieben. Nun sei $\mathfrak{a}$ eine solche Unteralgebra.
Der Beweis von Satz 1.60 zeigt dann die folgende einfache Äquivalenz:

Ein System positiver Wurzeln Σ^+ in Σ ist genau dann $\mathfrak{q}$-kompatibel, wenn ein in $\mathfrak{a}^-$ reguläres Element existiert, welches in der abgeschlossenen Weyl Kammer zu Σ^+ in $\mathfrak{a}$ liegt.

Die Konstruktion von $\mathfrak{q}$-kompatiblen Σ^+ erhalten wir nun wie folgt:
Wir betrachten das auf $\mathfrak{a}^-$ eingeschränkte Wurzelsystem $\mathcal{R}$ des Wurzelsystems Σ, und fixieren ein reguläres Element H_0 in $\mathfrak{a}^-$ bezüglich $\mathcal{R}$. Dann liegt H_0 in der abgeschlossenen Weyl Kammer bezüglich (mindestens) eines Systems positiver Wurzeln Σ^+; jedes solche System Σ^+ ist $\mathfrak{q}$-kompatibel.

1.4 Assoziierte, symmetrische Räume

Bevor wir schließlich zur Konstruktion der komplementären Unteralgebren kommen, wollen wir noch einen wichtigen Punkt klären, der in der Einleitung dieses Kapitels anhand eines Beispiels angedeutet wurde, nämlich die Assoziiertheit von symmetrischen Räumen und der Zusammenhang mit abgeschlossenen und offenen Doppelnebenklassen bezüglich der Untergruppen P und H der Lie Gruppe G. Zunächst die Definition:

Definition 1.61 *Es sei* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *ein lokal symmetrischer Raum vom nicht kompakten Typ mit halbeinfacher Lie Algebra* $\mathfrak{g}$*, und* θ *eine Cartan Involution, die mit* σ *vertauscht. Dann heißt* $(\mathfrak{g}, \sigma \circ \theta)$ *der zu* $(\mathfrak{g}, \sigma)$ *assoziierte, symmetrische Raum.*

Wenn die Involution σ eine Cartan Involution ist, dann ist σ selbst die einzige Cartan Involution, die mit σ vertauscht, wie man direkt an der Definition 1.4 erkennt. Nach unserer Konvention ist aber $(\mathfrak{g}, id)$ kein symmetrischer Raum. Wir können jedoch jede halbeinfache Lie Algebra selbst als lokal symmetrischen Raum betrachten:

Es sei G eine halbeinfache Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann wird auf der Lie Gruppe $G \times G$ durch $\sigma : (g, h) \mapsto (h, g)$ eine Involution definiert mit Fixpunktgruppe $D := \{(g, g) : g \in G\}$, und der symmetrische Raum $(G \times G)/D$ ist als pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit isomorph zu G vermöge $(g, h) \cdot D \mapsto g \cdot h^{-1} \in G$, wenn wir G mit der links-invarianten pseudo-Riemannschen Struktur versehen, welche wir via der Killing Form κ von $\mathfrak{g}$ mittels der Exponentialabbildung auf G definieren können. (siehe [Helg], Chapter II, Exercise A 5 und Chapter IV, § 6)
Der zugehörige, lokal symmetrische Raum ist $(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \sigma)$.

Der in der Definition eingeführte, assoziierte, symmetrische Raum ist nicht eindeutig, wie das folgende Lemma zeigt (siehe [Mat], Lemma 4).

Lemma 1.62 *Sind* θ_1 *und* θ_2 *Cartan Involutionen von* $\mathfrak{g}$*, die mit der Involution* σ *vertauschen, dann existiert ein* h_0 *in der Untergruppe* H *von* G*, (*$Lie(H) = \mathfrak{h} = Fix(\sigma)$*), so daß* $Ad(h_0) \circ \theta_1 \circ Ad(h_0^{-1}) = \theta_2$ *gilt.* ♢

Da $\sigma \circ Ad(h) = Ad(\sigma(h)) \circ \sigma = Ad(h) \circ \sigma$ gilt für alle $h \in H$, folgt mit dem Lemma, daß assoziierte, symmetrische Räume unter der Wirkung von $Ad(H)$ stets zueinander konjugiert sind, da $Ad(h_0) \circ (\sigma \circ \theta_1) \circ Ad(h_0^{-1}) = \sigma \circ \theta_2$ für je zwei mit σ vertauschende Cartan Involutionen θ_1, θ_2 gilt mit dem Element h_0 in H aus dem Lemma.
Damit ist der zu $(\mathfrak{g}, \sigma)$ assoziierte, symmetrische Raum wohldefiniert.

Kehren wir zurück zu einer $\mathfrak{q}$-maximalen, maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ und einem $\mathfrak{q}$ kompatiblen System positiver Wurzeln Σ^+ von Σ bezüglich des symmetrischen Raums $(\mathfrak{g}, \sigma)$ und einer Cartan Involution θ, die mit σ vertauscht.
Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}' + \mathfrak{q}'$ die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in die ± 1 Eigenräume von $\rho := \sigma \circ \theta$. Dann ist $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{q} \cap \mathfrak{p}$. Damit ist die Unteralgebra $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{h}'$-maximal, da sie $\mathfrak{q}$-maximal

gewählt war.
Weiterhin bezeichne $\Sigma(\mathfrak{a}^{-\prime})$ die Menge aller Wurzeln α in Σ, für welche H_α in $\mathfrak{q}'$ liegt. Dies sind also genau die Wurzeln, für welche $\rho \cdot \alpha = -\alpha$ gilt, das heißt $\sigma \cdot \alpha = \alpha$. Wir haben also die Gleichheit $\Sigma(\mathfrak{a}^{-\prime}) = \Sigma(\mathfrak{a}^{+})$. Die $\mathfrak{q}$-Kompatibilität von Σ^+ heißt nach Satz 1.49, daß für alle α in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ wieder $-\sigma \cdot \alpha$ in Σ^+ liegt. Da $\rho \cdot \alpha = -\sigma \cdot \alpha$ gilt für alle Wurzeln α, ergibt dies für Σ^+ die disjunkte Zerlegung $\Sigma^+ = (\Sigma^+ \cap \rho(\Sigma^+)) \cup \Sigma(\mathfrak{a}^{-\prime})$. Ein System positiver Wurzeln mit dieser Eigenschaft heißt $\mathfrak{h}'$-kompatibel. Der folgende Satz von Matsuki klärt nun den Zusammenhang zwischen den abgeschlossenen und den offenen Doppelnebenklassen bezüglich der Untergruppe H und P von G beim Übergang zu assoziierten, symmetrischen Räumen: (siehe [Mat], Prop. 2 und folgendes Korollar)

Proposition 1.63 *Es sei $(\mathfrak{g}, \rho)$ ein nicht kompakter, halbeinfacher, lokal symmetrischer Raum und θ eine Cartan Involution, die mit ρ vertauscht. Weiterhin sei $\mathfrak{a}$ eine ρ-invariante, maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ und $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ die minimal parabolische Unteralgebra bezüglich $\mathfrak{a}$ und eines Systems positiver Wurzeln Σ^+ von Σ. P sei die zugehörige minimal parabolische Untergruppe in G, und H' eine Untergruppe von G mit Lie Algebra $Fix(\rho) = \mathfrak{h}'$. Dann gilt:*
(i) Das Produkt $P \cdot H'$ ist genau dann eine abgeschlossene Teilmenge von G, wenn $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{h}'$-maximal ist, und Σ^+ $\mathfrak{h}'$-kompatibel ist.
(ii) Die Bedingungen in Teil (i) an $\mathfrak{a}$ und Σ^+ sind äquivalent dazu, daß $\mathfrak{a}$ im assoziierten, symmetrischen Raum $(\mathfrak{g}, \rho \circ \theta)$ $\mathfrak{q}$-maximal ist, und Σ^+ $\mathfrak{q}$-kompatibel, wobei $\mathfrak{q}$ der (-1) Eigenraum der assoziierten Involution $\sigma := \rho \circ \theta$ ist.
(iii) Die Anzahl der offenen Doppelnebenklassen bezüglich H und einer minimal parabolischen Untergruppe P in G ist gleich der Anzahl der abgeschlossenen Doppelnebenklassen bezüglich H' und P. $\diamondsuit$

Betrachten wir zuletzt noch einmal den einfachen Fall, daß unsere Involution σ selbst eine Cartan Involution ist:
Wie eingangs in diesem Abschnitt erklärt, gilt in diesem Fall $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Damit ist jede maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ bereits σ-invariant und zugleich $\mathfrak{q}$- und $\mathfrak{h}$-maximal, weil $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{p} = \{0\}$ ist. Weiterhin ist jedes System positiver Wurzeln Σ^+ $\mathfrak{q}$- und $\mathfrak{h}$-kompatibel.
Ist $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ eine minimal parabolische Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ zu einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$, so gilt also nach Satz 1.49 stets $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$. Das Produkt der beiden zugehörigen Untergruppen H und P ist in diesem Fall bereits ganz G, da hier $H \cdot P = K \cdot P \supseteq K \cdot A \cdot N = G$ (Iwasawa Zerlegung von G) gilt. Es existiert also genau eine Doppelnebenklasse bezüglich H und P. Dies entspricht für allgemeine Lie Gruppen dem dritten Fall in der in der Einleitung dieses Kapitels beschriebenen Situation.
Jetzt kommen wir schließlich zu den komplementären Unteralgebren:

1.5 Komplementäre Unteralgebren zu Fix (σ)

In diesem Abschnitt werden wir diskutieren, wie, ausgehend von der Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{a}$ und Σ^+, die minimal parabolische Unteralgebra zu einer Unteralgebra $\mathfrak{v}$ verkleinert werden kann, welche in der Summe mit der Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ der Involution σ immer noch $\mathfrak{g}$ ergibt, wobei Schnitt von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{h}$ möglichst klein sein soll.

Weiterhin wird das ursprüngliche Problem, komplementäre Unteralgebren zu $\mathfrak{h}$ zu finden, auf die analoge Frage in halbeinfachen, kompakten, symmetrischen Räumen reduziert.
Zuletzt werden die halbeinfachen Lie Algebren klassifiziert, für welche zur Fixpunktalgebra jeder Involution komplementäre Unteralgebren existieren. Diese Frage wurde unseres Wissens bisher in der Literatur noch nicht behandelt.

1.5.1 Verkleinerung minimal parabolischer Unteralgebren

Satz 1.64 *Wir übernehmen die Voraussetzungen von Satz 1.49 und nehmen an, daß eine der äquivalenten Bedingungen an die Wahl der maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ und das System positiver Wurzeln Σ^+ aus Satz 1.49 erfüllt ist.*
Dann ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha \qquad (1.7)$$

eine Unteralgebra von $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$, für die $\mathfrak{h} + \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$ gilt.
Der Schnitt ist die Unteralgebra $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{v} = (\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h})$.

Beweis:
Wir zeigen zunächst, daß $\sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$ unter den Voraussetzungen des Satzes eine nilpotente Unteralgebra ist. Zu zeigen ist hierfür: Sind α, β in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$, und ist $\alpha + \beta$ wieder eine Wurzel, so ist auch $\alpha + \beta$ in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$.
Es gilt jedenfalls $\alpha + \beta \in \Sigma^+$.
Wenn $\alpha + \beta \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+$ wäre, so folgte $\sigma \cdot \alpha + \sigma \cdot \beta = \sigma \cdot (\alpha + \beta) = \alpha + \beta \in \Sigma^+$. Nach Voraussetzung (siehe Satz 1.49) ist $(\Sigma^+ \cap \sigma \cdot \Sigma^+) \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$, und nach Proposition 1.45 ist $\sigma \cdot \alpha$, $\sigma \cdot \beta$ in $(\Sigma^- \cap \sigma \cdot \Sigma^+) = \Sigma^- \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) \subseteq \Sigma^-$, was den Widerspruch $\sigma \cdot \alpha + \sigma \cdot \beta \in \Sigma^-$ ergibt. Also ist $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ additiv abgeschlossen.

Damit ist $\mathfrak{v}$ eine Unteralgebra, da $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ eine Unteralgebra ist, die unter *ad* jeden Wurzelraum $\mathfrak{g}^\alpha$ invariant läßt nach Proposition 1.22 Teil (i).

Nun zeigen wir die Gleichung $\mathfrak{h} + \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$:
Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{h} + \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+) = \mathfrak{g}$, und es gilt $\mathfrak{v} \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+} \mathfrak{g}^\alpha = \mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$. Wegen der Voraussetzung (Satz 1.49, Punkt 3) ist $\sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha \subseteq \mathfrak{h}$, folglich gilt

$\mathfrak{h} + \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$.

Wir haben noch zu zeigen, daß der Schnitt von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{v}$ gleich $(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h})$ ist. Diese Unteralgebra ist offensichtlich in $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{v}$ enthalten.
Das Wurzelsystem Σ zerlegt sich nach Gleichung (1.2) in Proposition 1.45 und unseren Voraussetzungen wie folgt:
$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{a}^+) \cup \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+) \cup \Sigma^- \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$
Nach Voraussetzung und Proposition 1.45 vertauscht σ die beiden letzten Teilmengen. Da - wiederum nach Voraussetzung - $\mathfrak{g}^\alpha$ in $\mathfrak{h}$ liegt für alle α in $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$, besitzt $\mathfrak{h}$ die folgende Zerlegung:

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha}) \cap \mathfrak{h}. \tag{1.8}$$

Nach Korollar 1.46 gilt für alle α in $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ die Gleichung $(\mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha}) \cap \mathfrak{h} = \{X + \sigma(X) \,|\, X \in \mathfrak{g}^\alpha\}$. Dieser Unterraum hat die Dimension $dim \mathfrak{g}^\alpha$. Damit ist die Dimension von $\mathfrak{h}$ gleich
$dim \mathfrak{h} = dim((\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h})) + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} dim(\mathfrak{g}^\alpha) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} dim(\mathfrak{g}^\alpha)$.
Die Dimension von $\mathfrak{v}$ ist $dim(\mathfrak{v}) = dim(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} dim(\mathfrak{g}^\alpha)$.

Zusammen ergibt dies $dim(\mathfrak{g}) = dim(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}) + \sum_{\alpha \in \Sigma} dim(\mathfrak{g}^\alpha) = dim(\mathfrak{v}) + dim(\mathfrak{h}) - dim((\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}))$. Weil $\mathfrak{h} + \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$ gilt, folgt die Behauptung. $\diamondsuit$

Sehen wir uns nun die Situation auf der Gruppenseite an. Zunächst noch brauchen wir noch eine Hilfsaussage, die wir hier zwar nicht in dieser Allgemeinheit benötigen, welche aber später wichtig wird:

Lemma 1.65 *Der Unterraum* $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}^+) := \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)^+} \mathfrak{g}^\alpha$ *ist eine Unteralgebra. Es sei* $N(\mathfrak{a}^+)$ *die analytische Untergruppe von* G *mit Lie Algebra* $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}^+)$. *Weiterhin sei unter den Voraussetzungen von Satz 1.64* $N^{\mathfrak{v}}$ *die analytische Untergruppe von* G *mit Lie Algebra* $\mathfrak{n}^{\mathfrak{v}} := \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$. *Dann gilt für die Untergruppe* N *von* G *mit Lie Algebra* $\mathfrak{n} := \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha$: $\quad N = N^{\mathfrak{v}} \cdot N(\mathfrak{a}^+)$.

Beweis: Die additive Abgeschlossenheit von $\Sigma(\mathfrak{a}^+)^+$ ist klar. Damit ist $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}^+)$ eine Unteralgebra. $\mathfrak{n}^{\mathfrak{v}}$ ist unter den Voraussetzungen von Satz 1.64 ebenfalls eine Unteralgebra, wie im Beweis des Satzes gezeit wurde. Beide Unteralgebren sind Summen von vollen Wurzelräumen. Ihre Summe ergibt die nilpotente Unteralgebra $\mathfrak{n}$, und ihr Schnitt ist trivial. Damit folgt mit [War], Lemma 1.1.4.1 die Aussage: Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{n}(\mathfrak{a}^+) \times \mathfrak{n}^{\mathfrak{v}} & \to & N \\ (X, Y) & \mapsto & \exp(X) \cdot \exp(Y) \end{array}$$

ist ein analytischer Diffeomorphismus auf N.
Die nilpotenten Untergruppen $N(\mathfrak{a}^+)$ und $N^{\mathfrak{v}}$ sind als analytische Untergruppen zusammenhängend; daher sind die zugehörigen Exponentialabbildungen surjektiv

(siehe z.B. [HilNe], Korollar III, 3.2.4. Es gilt also $N = N(\mathfrak{a}^+) \cdot N^{\mathfrak{v}}$. $\diamondsuit$

Jetzt erhalten wir sehr einfach die folgende Aussage:

Proposition 1.66 *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 1.64. Es sei V die Untergruppe $V = M \cdot A \cdot N^{\mathfrak{v}}$, und $P = M \cdot A \cdot N$ die minimal parabolische Untergruppe von G mit Lie Algbera $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$. Dann ist $H \cdot V = H \cdot P$; dies ist eine offene Umgebung des neutralen Elements in G.*

Beweis:
Die Untergruppe $N(\mathfrak{a}^+)$ liegt in der Untergruppe H, da erstens die zugehörige Unteralgebra $\mathfrak{n}(\mathfrak{a}^+)$ in der Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ von σ liegt - wie im Beweis von Satz 1.64 gesehen - und $N(\mathfrak{a}^+)$ zusammenhängend ist.
Ferner wird $N(\mathfrak{a}^+)$ und $N^{\mathfrak{v}}$ von den Untergruppen M und A normalisiert, da diese Untergruppen unter Ad jeden Wurzelraum invariant lassen.
Daher ist V eine abgeschlossene Untergruppe, da die Produktabbildung $M \times A \times N \to P$ ein analytischer Diffeomorphismus ist der abgeschlossenen Untergruppen M, A und N ist, und $N^{\mathfrak{v}}$ selbst abgeschlossen ist nach Lemma 1.65. Die Lie Algebra von V ist $\mathfrak{v}$, wie aus Gleichung (1.7) leicht zu sehen ist.
Nun haben wir die folgende Gleichungskette:

$H \cdot V = (H \cdot N(\mathfrak{a}^+)) \cdot V = H \cdot (N(\mathfrak{a}^+) \cdot M \cdot A \cdot N^{\mathfrak{v}}) = H \cdot (M \cdot A \cdot N(\mathfrak{a}^+) \cdot N^{\mathfrak{v}}) = H \cdot (M \cdot A \cdot N) = H \cdot P$, wegen Lemma 1.65.
Die Offenheit des Produkts $H \cdot P$ ist gegeben, da die Summe der zugehörigen Lie Algebren unter den Voraussetzungen von Satz 1.64 ganz $\mathfrak{g}$ ist. $\diamondsuit$

Bemerkung 1.67 Die analytische Untergruppe V_{ana} mit Lie Algebra $\mathfrak{v}$ aus Gleichung (1.7) ist gleich $M_0 \cdot A \cdot N^{\mathfrak{v}}$, wobei M_0 die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in M bezeichnet. Für diese Untergruppe gilt im allgemeinen nicht die Gleichung $H \cdot V_{ana} = H \cdot P$, wie das folgende Beispiel zeigen wird. Es ist jedoch nach wie vor $H \cdot V_{ana}$ eine offene Umgebung des neutralen Elements in G.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{R})$, $G = SL(2, \mathbb{R})$ und $\theta(X) = -X^\top$ auf $\mathfrak{g}$ beziehungsweise $\Theta(g) = (g^\top)^{-1}$ auf G eine fixierte Cartan Involution. Die mit θ vertauschende Involution σ von $\mathfrak{g}$ sei gegeben durch

$$\sigma(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Lift von σ auf G können wir dieselbe Formel verwenden. Die Menge $\mathfrak{a}$ aller Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}$ bildet eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und liegt in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}$ ist also eine $\mathfrak{q}$-maximale, maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$. Da $\sigma(E_{1,2}) = E_{2,1}$ gilt, ist $\Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$, und $\Sigma^+ = \{\alpha_{1,2}\}$ ist ein $\mathfrak{q}$-kompatibles System positiver Wurzeln. Damit ist die Untergruppe N gleich $N^{\mathfrak{v}}$ gleich der Untergruppe aller oberen Dreieckmatrizen mit Einsen auf der Diagonalen.
Der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $K = SO(2) = Fix(\Theta)$ ist $\pm E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Die analytische Untergruppe A mit Lie Algebra $\mathfrak{a}$ sind alle Diagonalmatrizen in G mit positiven Diagonaleinträgen.
Wählen wir für die Untergruppe H die Zusammenhangskomponente von E in $Fix(\sigma)$, so gilt

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dann ist nach Proposition 1.66 die Teilmenge $H \cdot (M \cdot A \cdot N^{\mathfrak{v}}) = H \cdot V$ eine offene Umgebung von E in G. Andererseits ist $V_{ana} = A \cdot N^{\mathfrak{v}}$, und $-E$ ist nicht in $H \cdot V_{ana}$ enthalten.

1.5.2 Rückführung auf den kompakten Fall

In diesem Abschnitt werden wir die Unteralgebra $\mathfrak{v}$ von $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ weiter verkleinern und damit die Konstruktion komplementärer Unteralgebren zurückführen auf ein analoges Problem in kompakten, halbeinfachen Lie Algebren, die wir zunächst stets ausgeschlossen hatten. Zunächst benötigen wir ein Lemma:

Lemma 1.68 *Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ einer σ-invarianten, maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ ist σ-invariant und reduktiv. σ läßt auch das Zentrum $\mathcal{Z} := \mathcal{Z}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}))$ und das kompakte, halbeinfache Ideal $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ invariant.*

Beweis:
Die Algebra $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ ist als Unteralgebra von $\mathfrak{k}$ kompakt, insbesondere reduktiv. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ zerlegt sich damit in die direkte Summe $\mathcal{Z} \oplus [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$, wobei der zweite Summand halbeinfaches Ideal von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ ist, das als halbeinfache Lie Algebra kompakt ist.

Das Zentrum $\mathcal{Z}(\mathfrak{l})$ und die Kommutatorunteralgebra $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$ jeder Lie Algebra $\mathfrak{l}$ sind charakteristische Unteralgebren, das heißt, invariant unter allen Automorphismen von $\mathfrak{l}$. $\diamondsuit$

Nun können wir die Unteralgebra $\mathfrak{v}$ aus Satz 1.64 noch weiter verkleinern, ohne die Komplimentarität zu $\mathfrak{h}$ zu verletzen:

Satz 1.69 *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 1.64. Dann ist*

$$\mathfrak{w} := [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})] + (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^{\alpha} \tag{1.9}$$

eine Unteralgebra in $\mathcal{P}(\mathfrak{a}, \Sigma^+)$ mit $\mathfrak{h} + \mathfrak{w} = \mathfrak{g}$.
Der Schnitt von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{w}$ ist

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{w} = [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})] \cap \mathfrak{h}. \tag{1.10}$$

Beweis: (i) Es ist $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})] + (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q})$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$, die insbesondere $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q})$ zentralisiert und unter ad jeden Wurzelraum invariant läßt. Damit

ist $\mathfrak{w}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.
(ii) Es gilt $\mathfrak{w} \oplus (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) = \mathfrak{v}$ (siehe Gleichung (1.7)), weil $\mathcal{Z}$ und $\mathfrak{a}$ beide σ-invariant sind. Damit gilt wegen $\mathfrak{h} + \mathfrak{v} = \mathfrak{g}$ auch $\mathfrak{h} + \mathfrak{w} = \mathfrak{g}$.
(iii) Da der Kommutator $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ nach Lemma 1.68 ebenfalls σ-invariant ist, folgt mit der Beschreibung des Schnitts $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{v}$ aus Satz 1.64 die Gleichung (1.10) für $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{w}$. ♢

Bemerkung 1.70 Sehen wir uns noch die Struktur von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ an:
Die Unteralgebra $\mathfrak{s} := (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$ ist ein auflösbares Ideal von $\mathfrak{w}$, und die Faktoralgebra $\mathfrak{w}/\mathfrak{s}$ ist isomorph zur kompakten, halbeinfachen Unteralgebra $\mathfrak{j} := [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ von $\mathfrak{w}$. Es ist also $\mathfrak{w} = \mathfrak{j} + \mathfrak{s}$ eine Levi Zerlegung von $\mathfrak{w}$ mit der halbeinfachen Unteralgebra $\mathfrak{j}$ und Radikal $\mathfrak{s}$. $\mathfrak{w}$ ist also genau dann auflösbar, wenn $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ abelsch ist.
Für die Algebra $\mathfrak{v}$ aus Gleichung (1.7) gelten die analogen Aussagen mit dem Radikal $\mathcal{Z} + \mathfrak{a} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$. ♢

Jetzt können wir das Problem, komplementäre Unteralgebren zu $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ in $\mathfrak{g}$ zu konstruieren, in dem folgenden Sinne auf den kompakten Fall zurückführen:

Satz 1.71 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 1.64 erfüllt.*
Wenn eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{g}$ existiert, das heißt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$, welche in $\mathfrak{v}$ (Gleichung (1.7)) liegt, dann zerlegt sich die Unteralgebra $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ in die direkte Summe aus ihrem Schnitt mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{u}$.

Weiterhin existiert in diesem Fall eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra $\mathfrak{u}_1$, die in $\mathfrak{w}$ (Gleichung (1.9)) enthalten ist.
Für jede zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra, die in $\mathfrak{w}$ liegt, zerlegt sich die kompakte, halbeinfache Unteralgebra $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ in die direkte Summe aus ihrem Schnitt mit $\mathfrak{h}$ und der komplementären Unteralgebra.

Beweis: (i) Nach Voraussetzung zerlegt sich $\mathfrak{g}$ in die direkte Summe aus den Unteralgebren $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{u}$, wobei $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{v}$ liege. Nun sei X in $\mathfrak{g}^0$. Wir zerlegen X bezüglich $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{u}$: $X = X_{\mathfrak{h}} + U$. Weiter zerlegen wir $X_{\mathfrak{h}}$ nach Gleichung (1.8) bezüglich der Unterräume $\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h}$, $\sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$ und $\sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha}) \cap \mathfrak{h}$ von $\mathfrak{h}$. Da U in $\mathfrak{v}$ liegt, haben wir eine Zerlegung $U = U_0 + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} U_\alpha$, U_0 in $\mathfrak{g}^0$, U_α in $\mathfrak{g}^\alpha$. Da X in $\mathfrak{g}^0$ liegt, und die Summe
$\sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha}) \cap \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha = \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^\alpha$ direkt ist, folgt $U_0 = U \in \mathfrak{u}$, und $X_{\mathfrak{h}} \in \mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h}$; es gilt also $\mathfrak{g}^0 = (\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{u})$.
Die Direktheit der Summe folgt aus der Voraussetzung $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$.

(ii) Für den Beweis der zweiten Aussage führen wir eine Abkürzung ein:
$\mathfrak{z} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Nach Lemma 1.68 zerfällt $\mathfrak{g}^0$ in $[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathfrak{a}$ mit drei σ-invarianten Idealen von $\mathfrak{g}^0$. Im allgemeinen ist jedoch $\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{u}$ nicht gleich der Summe der einzelnen Schnitte der drei Ideale mit $\mathfrak{u}$.
Wir benötigen den folgenden Unterraum:
$[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]_{\mathfrak{u}} := \{X \in [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \,:\, \exists U \in \mathfrak{u} \,\mathrm{mit}\, U = X + Z + A \in [\mathfrak{z}, \mathfrak{z}] \oplus \mathcal{Z} \oplus \mathfrak{a}\}.$

Dies ist eine Unteralgebra von $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$, da $\mathfrak{u}$ eine Unteralgebra ist, und $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$, $\mathcal{Z}$ und $\mathfrak{a}$ paarweise im Kommutator $\{0\}$ ergeben.
$[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}$ ist als Unteralgebra der kompakten Lie Algebra $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$ reduktiv, ist daher die direkte Summe aus dem halbeinfachen Ideal $\mathfrak{i} = [[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u},[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}]$ und seinem Zentrum $\mathcal{C}$. Da $\mathcal{Z}$ und $\mathfrak{a}$ abelsch sind, ist offenbar $\mathfrak{i} = [\mathfrak{u},\mathfrak{u}] \leq \mathfrak{u}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{u}$.
Nun sei X in $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$, und $X = X^\mathfrak{h} + U \in (\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{g}^0 \cap \mathfrak{u})$ die Zerlegung, welche nach Teil (i) existiert. Wir zerlegen $X^\mathfrak{h}$ und U bezüglich $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$, $\mathcal{Z}$ und $\mathfrak{a}$:
$X^\mathfrak{h} = X^\mathfrak{h}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]} + X^\mathfrak{h}_\mathcal{Z} + X^\mathfrak{h}_\mathfrak{a}, \quad U = U_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]} + U_\mathcal{Z} + U_\mathfrak{a}$.
Dann gilt $X = X^\mathfrak{h}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]} + U_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]}$, $X^\mathfrak{h}_\mathcal{Z} + U_\mathcal{Z} = 0$ und $X^\mathfrak{h}_\mathfrak{a} + U_\mathfrak{a} = 0$. Weil $X^\mathfrak{h}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]}$ in $\mathfrak{h}$ und nach Definition $U_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]}$ in $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}$ liegt, folgt $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] = ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}) + [\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}$, wobei diese Summe nicht notwendig direkt ist.
Für das halbeinfache Ideal $\mathfrak{i}$ von $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}$ gilt aber $\mathfrak{i} \cap ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}) = \{0\}$, weil $\mathfrak{i}$ in $\mathfrak{u}$ liegt. Wir hatten die Zerlegung $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u} = \mathcal{C} \oplus \mathfrak{i}$. Damit existiert ein Untervektorraum $\tilde{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$, so daß $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] = ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}) \oplus (\tilde{\mathcal{C}} + \mathfrak{i})$ gilt. Weil $\mathcal{C}$ das Zentrum von $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]_\mathfrak{u}$ ist, bildet $\tilde{\mathcal{C}} \oplus \mathfrak{i}$ eine Lie Algebra, welche nun komplementär ist zu $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}$ in $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$.

Insgesamt liefert nach Satz 1.69

$$\mathfrak{u}_1 := (\tilde{\mathcal{C}} + \mathfrak{i}) + (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha \tag{1.11}$$

eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die in $\mathfrak{w}$ liegt.

(iii) Betrachten wir nun eine Unteralgebra $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{w}$, für die $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$ gilt. Nach (1.8) ist der Unterraum $\mathfrak{s}_1 := (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{h}) + \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{\sigma \cdot \alpha}) \cap \mathfrak{h}$ in $\mathfrak{h}$ enthalten, und der Unterraum $\mathfrak{s}_2 := (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$ liegen in $\mathfrak{h}$ ist eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{w}$. Weiter gilt $\mathfrak{h} = ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{s}_1$ sowie $\mathfrak{w} = [\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \oplus \mathfrak{s}_2$.
Nach Satz 1.69 zerfällt $\mathfrak{g}$ in die direkte Summe $\mathfrak{g} = [\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \oplus \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2$.
Zerlegen wir nun ein X in $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$ bezüglich $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{u}$: $X = X^\mathfrak{h} + X^\mathfrak{u}$.
Da nach Voraussetzung $X^\mathfrak{u}$ auch in $\mathfrak{w}$ liegt, haben wir die Zerlegung $X^\mathfrak{u} = X^\mathfrak{u}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]} + X^\mathfrak{u}_{\mathfrak{s}_2}$; ebenso $X^\mathfrak{h} = X^\mathfrak{h}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}} + X^\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}_1}$.

Zusammen ergibt dies $X = (X^\mathfrak{h}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}} + X^\mathfrak{u}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]}) + X^\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}_1} + X^\mathfrak{u}_{\mathfrak{s}_2}$.
Weil X in $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$ liegt, sind $X^\mathfrak{h}_{\mathfrak{s}_1}$ und $X^\mathfrak{u}_{\mathfrak{s}_2}$ gleich 0, da $\mathfrak{g}$ die direkte Summe aus $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ ist.
Folglich ist $X^\mathfrak{u}_{[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]} = X^\mathfrak{u} \in \mathfrak{u}$, also $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] = ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}) \oplus ([\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{u})$. $\diamondsuit$

Bemerkung 1.72 In folgender Hinsicht reduziert der Satz 1.71 das Problem auf kompakte, halbeinfache Lie Algebren: Wenn eine zu $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ komplementäre Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ existiert, die in $\mathfrak{v}$ liegt, so existiert auch eine komplementäre Unteralgebra zu $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}] \cap \mathfrak{h}$, $\mathfrak{z} := \mathfrak{z}_\mathfrak{k}(\mathfrak{a})$, in der kompakten, halbeinfachen Lie Algebra $[\mathfrak{z},\mathfrak{z}]$. Diese existieren jedoch nicht immer, wie das folgende (dimensionsmäßig kleinste) Beispiel zeigt:

Beispiel: In der kompakten, einfachen Lie Algebra $so(3)$ aller rellen, schiefsymmetrischen 3×3 Matrizen ist $\sigma(X) = T \cdot X \cdot T^{-1}$ mit $T = diag(1, -1, -1)$ ein involutorischer Automorphismus mit Fixpunktalgebra $\mathfrak{h} = \mathbb{R} \cdot (E_{2,3} - E_{3,2})$. Alle nicht trivialen Unteralgebren von $so(3)$ sind eindimensional. Es existiert also keine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra. $\diamondsuit$

Das Problem in kompakten, halbeinfachen Lie Algebren ist in allgemeinerer Form schon negativ beantwortet: Es gilt der folgende Satz nach [Oni], § 14, Theorem 5:

Satz 1.73 *Es sei $\mathfrak{u}$ eine kompakte Lie Algebra, und $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ seien zwei komplementäre Unteralgebren von $\mathfrak{u}$, das heißt $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$. Dann gilt:*
(i) $\mathfrak{u}$ schreibt sich als die direkte Summe aus zwei Idealen $\mathfrak{u} = \mathfrak{i}_1 \oplus \mathfrak{i}_2$ derart, daß mit den zugehörigen Projektionen $p_k : \mathfrak{u} \to \mathfrak{i}_k, \quad k = 1, 2$ gilt: $p_k : \mathfrak{u}_k \to \mathfrak{i}_k, \quad k = 1, 2$ sind Isomorphismen von Lie Algebren. Insbesondere ist $\mathfrak{u}$ isomorph zur äußeren, direkten Summe $\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_2$.
(ii) Die Ideale $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$ aus Teil (i) können so gewählt werden, daß für die Projektion $\pi : \mathfrak{u} \to \mathcal{Z}(\mathfrak{u})$ von $\mathfrak{u}$ auf das Zentrum von $\mathfrak{u}$ längs des halbeinfachen Ideals $[\mathfrak{u}, \mathfrak{u}]$ von $\mathfrak{u}$ gilt: $\mathcal{Z}(\mathfrak{i}_k) = \pi(\mathcal{Z}(\mathfrak{u}_k)), \ k = 1, 2$. $\diamondsuit$

Dieser Satz gibt das für uns wichtige Korollar:

Korollar 1.74 *Zur Fixpunktalgebra einer Involution $\sigma \in Aut(\mathfrak{u})$, $\sigma \neq id$, einer kompakten, einfachen Lie Algebra $\mathfrak{u}$ existiert keine komplementäre Unteralgebra.*

1.5.3 Komplemente zu Fix (σ)

Wir kommen jetzt zu den Fällen, bei denen stets eine komplementäre Unteralgebra zu $Fix(\sigma)$ existiert:

Satz 1.75 *Es seien die Bedingungen an die Wahl der maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$ und die Wahl eines Systems positiver Wurzeln Σ^+ aus Satz 1.64 erfüllt. Dann gilt:*
(i) Wenn die halbeinfache, kompakte Unteralgebra $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ in $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ liegt, so ist

$$\mathfrak{s} := (\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha \tag{1.12}$$

eine auflösbare, zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra, das heißt es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{s}$ und $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \{0\}$.

(ii) Wenn die Unteralgebra $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ abelsch ist, so existiert zur Fixpunktalgebra jeder Involution von $\mathfrak{g}$ eine auflösbare, komplementäre Unteralgebra, nämlich die Algebra $\mathfrak{s}$ aus Gleichung (1.12).

(iii) Zur Fixpunktalgebra jeder Involution einer normalen, reellen Form existiert eine komplementäre, auflösbare Unteralgebra.

Beweis:
(i) Nach Satz 1.69 ist der Schnitt von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{w}$ gleich $\mathfrak{h} \cap [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$, was hier nach Voraussetzung gleich der Kommutatorunteralgebra von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ ist; da $\mathfrak{h} + \mathfrak{w} = \mathfrak{g}$ ist, folgt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{s}$.
(ii) In diesem Fall hat man $\mathfrak{s} = \mathfrak{w}$ nach Gleichung (1.9), und der Schnitt $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{w} = \{0\}$ wegen Gleichung (1.10).
(iii) Nach Definition einer normalen, reellen Form $\mathfrak{g}$ ist jeder maximal abelsche Unterraum von $\mathfrak{p} = ER_\theta(-1)$ schon maximal abelsch in ganz $\mathfrak{g}$, das heißt $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{0\}$. Damit ist $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) + \sum_{\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)} \mathfrak{g}^\alpha$ eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre, auflösbare Unteralgebra, wiederum nach Satz 1.69. $\diamondsuit$

Bemerkung 1.76 (i) Die Komplemente in normalen, reellen Formen kommen dem Komplement in der lokalen Iwasawa Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + (\mathfrak{a} + \mathfrak{n})$ zur kompakten Unteralgebra $\mathfrak{k}$ am nächsten. In diesem Fall haben wir $\sigma = \theta$ und $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Also wird in diesem Fall $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, wobei $\mathfrak{n}$ die Summe aller Wurzelräume zu einem beliebigen System positiver Wurzeln ist, da jedes $\mathfrak{q}$-kompatibel ist.

(ii) Die Struktur der Unteralgebra $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ hängt nur von der betrachteten Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ab, da alle Cartan Involutionen von $\mathfrak{g}$ zueinander konjugiert sind, und im Unterraum $\mathfrak{p}$ alle maximal abelschen Unteralgebren $\mathfrak{a}$ unter der Wirkung von $Ad(K)$ eine Bahn bilden. Die Zentralisatoren der maximal abelschen Unteralgebren von $\mathfrak{p}$ werden dabei simaltan transportiert. $\diamondsuit$

Der Satz 1.75 liefert nun das folgende Korollar über Komplemente in komplexen, halbeinfachen Lie Algebren:

Korollar 1.77 *(i) Es sei $\mathfrak{l}$ eine komplexe, halbeinfache Lie Algebra und $\mathfrak{g}$ eine reelle Form. Dann existiert eine reelle, auflösbare Unteralgebra $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$, so daß $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{s}$.*

(ii) Zur Fixpunktalgebra jeder $\mathbb{C}$-linearen Involution ρ von $\mathfrak{l}$ existiert eine auflösbare, komplexe Unteralgebra von $\mathfrak{l}$, die komplementär ist zu $Fix(\rho)$.

Bemerkung 1.78 Da die reellen Formen einer komplexen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ genau die Fixpunktalgebren der $\mathbb{C}$-antilinearen Involutionen von $\mathfrak{l}$ sind, werden in Korollar 1.77 alle Involutionen von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ erfaßt.

Beweis: (von Korollar 1.77)
Nach Proposition 1.26 ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ gleich $i \cdot \mathfrak{a}$, sofern $\mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$ ist, wobei $\mathfrak{p}$ der (-1)-Eigenraum einer Cartan Involution von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ ist. Es ist also $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a}$ wieder eine abelsche Unteralgebra. Weiter ist $\mathfrak{c} := i \cdot \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$ eine gewöhnliche Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$.
Nach Satz 1.75 Teil (ii) existiert dann zur Fixpunktalgebra jeder ($\mathbb{R}$-linearen) Involution von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ eine auflösbare, komplementäre Unteralgebra von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$.
Es bleibt also nur zu zeigen, daß dieses Komplement als Lie Algebra über $\mathbb{C}$ gewählt

werden kann, sofern σ auch $\mathbb{C}$-linear ist.
Dies wird allerdings bereits von dem Komplement $\mathfrak{s}$ aus Satz 1.75 Teil (i) erfüllt: $(\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}) = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$, da $\mathcal{Z} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = i \cdot \mathfrak{a}$ gilt; dieser Unterraum ist mit $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{q}$ wieder invariant unter der Skalarmultiplikation mit $\mathbb{C}$.
Die Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$ sind ebenfalls $\mathbb{C}$ Vektorräume: Es sei H_0 ein reguläres Element von $\mathfrak{a}$, das heißt $\alpha(H_0)$ ist reell, aber ungleich 0 für alle α in Σ. Nun sei X in $\mathfrak{g}^\alpha$. Da die Wurzelräume invariant sind unter $ad(\mathfrak{g}^0)$, folgt $\mathfrak{g}^\alpha \ni [i \cdot H_0, X] = i \cdot [H_0, X] = i \cdot \alpha(H_0) \cdot X$. Damit liegt $i \cdot X$ auch in $\mathfrak{g}^\alpha$, und der Beweis ist fertig. $\diamondsuit$

Zum Abschluß dieses Kapitels sehen wir uns noch eine wichtige Klasse von lokalen, halbeinfachen, symmetrischen Räumen an, nämlich die halbeinfachen Lie Algebren selbst. In diesen Fällen ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ nicht notwendig abelsch, und $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ liegt nicht in der Fixpunktalgebra $\mathfrak{h}$ von σ. Dennoch werden wir komplementäre Unteralgebren konstruieren. Zunächst brauchen wir eine einfache Proposition:

Proposition 1.79 *In der Situation von Satz 1.75 operiert σ auf den einfachen Idealen von $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$. Wenn σ keines der einfachen Ideale invariant läßt, so existiert eine zu $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ komplementäre Unteralgebra, die in $\mathfrak{w}$ liegt.*

Beweis:
Es sei $\mathfrak{j} := [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})] = \mathfrak{i}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{i}_k$ die Zerlegung der halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{j}$ als Summe ihrer einfachen Ideale. Da stets $\sigma(\mathfrak{i}_l)$ wieder einfaches Ideal von $\mathfrak{j}$ ist, und die Zerlegung von $\mathfrak{j}$ eindeutig, gilt $\sigma(\mathfrak{i}_l) = \mathfrak{i}_{l'}$ mit einem $l' \in \{1, \ldots, k\}$. Da σ eine Involution ist, folgt mit der Voraussetzung, daß k gerade ist. Ohne Einschränkung können wir $\sigma(\mathfrak{i}_l) = \mathfrak{i}_{l+1}$ für alle ungeraden l annehmen. Daher ist $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{j}$ gleich

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{j} = \bigoplus_{l=0}^{\frac{k}{2}} \{X + \sigma(X) : X \in \mathfrak{i}_{2l+1}\}.$$

Offenbar ist dann $\mathfrak{i}_{2l+1}$ eine zu $\{X + \sigma(X) : X \in \mathfrak{i}_{2l+1}\}$ komplementäre Unteralgebra in $\mathfrak{i}_{2l+1} \oplus \mathfrak{i}_{2l+2}$, folglich ist $\sum_{l=0}^{\frac{k}{2}} \mathfrak{i}_{2l+1} + \mathfrak{s}$ eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra, wobei $\mathfrak{s}$ aus Gleichung (1.12) entnommen wird. $\diamondsuit$

Jetzt haben wir den angekündigten

Satz 1.80 *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle, nicht kompakte, halbeinfache Lie Algebra. Auf der direkten Summe $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ werde eine Involution σ wie folgt erklärt: $\sigma(X, Y) = (Y, X)$. Dann existiert zu $\mathfrak{h} = Fix(\sigma) = \{(X, X) : X \in \mathfrak{g}\}$ eine komplementäre Unteralgebra, die nicht isomorph ist zu $\mathfrak{g}$.*

Der Beweis soll hier allen Details ausgeführt werden, nicht zuletzt um die Konstruktion von $\mathfrak{q}$-maximalen Unteralgebren und $\mathfrak{q}$-kompatiblen Systemen positiver Wurzeln einmal vorzuführen:
Beweis:
Es sei $\tilde{\theta}$ eine Cartan Involution der zugrunde liegenden Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann ist die kanonische Fortsetzung auf $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (mit θ bezeichnet), nämlich $\theta(X, Y) =$

$(\tilde{\theta}(X), \tilde{\theta}(Y))$, eine Cartan Involution von $\mathfrak{l}$, da $\mathfrak{g} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathfrak{g}$ orthogonal sind unter der Killing Form von $\mathfrak{l}$.
Offenbar vertauscht θ mit σ. Ist $\mathfrak{a}$ irgendeine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}(\subset \mathfrak{g})$, so ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ maximal abelsch im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ von θ, und $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{q} = \{(X, -X) : X \in \mathfrak{a}\}$ ist maximal abelsch in $(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \{(Y, -Y) : Y \in \mathfrak{p}\}$ $(\mathfrak{q} = \{(X, -X) : X \in \mathfrak{g}\})$. $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ ist also $\mathfrak{q}$-maximal.

Ist $\tilde{\Sigma}$ das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$, so wird $\Sigma = \{(\alpha, 0) : \alpha \in \tilde{\Sigma}\} \cup \{(0, \beta) : \beta \in \tilde{\Sigma}\}$ das Wurzelsystem von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ mit zugehörigen Wurzelräumen $\mathfrak{g}^{\alpha} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathfrak{g}^{\beta}$.
Die Operation von σ auf den Wurzeln ist gegeben durch $\sigma \cdot (\alpha, 0) = (0, \alpha)$, folglich ist $\Sigma((\mathfrak{a} \times \mathfrak{a})^{+})$ leer, da keine Wurzel fixiert wird.
Wenn $\tilde{\Sigma}^{+}$ ein System positiver Wurzeln in $\tilde{\Sigma}$ ist, so wird $\Sigma^{+} := \{(\alpha, 0) : \alpha \in \tilde{\Sigma}^{+}\} \cup \{(0, \beta) : \beta \in \tilde{\Sigma}^{-} = -\tilde{\Sigma}^{+}\}$ ein System positiver Wurzeln in Σ, welches $\mathfrak{q}$-kompatibel ist, da $\sigma \cdot \Sigma^{+} = \Sigma^{-}$ gilt.

Es bezeichne - wie immer - $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ den Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k} = Fix(\tilde{\theta})$, und $\mathcal{Z}$ das Zentrum von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Weiterhin sei $\mathfrak{i} = [\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ das halbeinfache Ideal von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$. Dann haben wir für den Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) \times \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$ die Zerlegung $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i} + \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ in sein halbeinfache Ideal und sein Zentrum. Da σ auf $\mathfrak{i} \times \mathfrak{i}$ durch Vertauschung operiert, haben wir mit Proposition 1.79 die folgende zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra von $\mathfrak{l}$:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i} \times \{0\} + (\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}) \cap \mathfrak{q} + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{q} + \sum_{\alpha \in \tilde{\Sigma}^{+}} \mathfrak{g}^{\alpha} \times \{0\} + \sum_{\beta \in \tilde{\Sigma}^{-}} \{0\} \times \mathfrak{g}^{\beta} \tag{1.13}$$

$\diamondsuit$

Bemerkung 1.81 (i) Natürlich ist stets $\mathfrak{g} \times \{0\}$ ein Ideal von $\mathfrak{l}$, das eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra ist. Das in unserem Satz 1.80 vorgestellte Komplement $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{h}$ ist allerdings nie halbeinfach; falls $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ abelsch ist, wird $\mathfrak{x}$ sogar auflösbar.
(ii) Die Unteralgebra $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ aus dem Beweis des Satzes ist zugleich auch $\mathfrak{h}$-kompatibel, also ist $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{h}$ maximal abelsch in $(\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{h}$.
(iii) Die Teilmenge $\Gamma := \{(\alpha, 0) : \alpha \in \tilde{\Sigma}^{+}\} \cup \{(0, \beta) : \beta \in \tilde{\Sigma}^{+}\}$ von Σ ist ebenfalls ein System positiver Wurzeln. Dieses bleibt unter σ-invariant. Damit ist Γ ein $\mathfrak{h}$-kompatibles System positiver Wurzeln, wie in Abschnitt 1.4 definiert.

Kapitel 2

Weitere Ergebnisse und Beispiele

In diesem Kapitel werden wir die Konstruktion von komplementären Unteralgebren durchführen. Im ersten Abschnitt werden wir dazu das allgemeine Problem auf einfache, reelle Lie Algebren reduzieren. Dabei geben wir auch das bekannte Verfahren an, mit dem man alle reellen Formen einer gegebenen, einfachen, komplexen Lie Algebra ermittelt.
Im zweiten Abschnitt erzeugen wir mit diesem Verfahren alle reellen Formen der Lie Algebra $sl(n,\mathbb{C})$. Dies geschieht, um reelle Lie Algebren und Involutionen von diesen zu erhalten.
Im letzten Abschnitt werdn wir schließlich die Konstruktion von komplementären Unteralgebren zur Fixpunktalgebra einer Involution an ausgewählten Beispielen durchführen. Die Beispiele sind so gewählt, daß alle in Kapitel 1, insbesondere in Abschnitt 1.5, aufgeführten Fälle bei der Suche nach komplementären Unteralgebren abgedeckt sind.

2.1 Reduktion auf einfache, reelle Lie Algebren

Lemma 2.1 *Es sei σ ein involutorischer Automorphismus der reellen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Dann permutiert σ die einfachen Ideale von $\mathfrak{g}$.*

Beweis: Die Zerlegung von $\mathfrak{g}$ in die direkte Summe seiner einfachen Ideale ($\mathfrak{g} = \mathfrak{j}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{j}_k$) ist eindeutig, d.h. jedes Ideal von $\mathfrak{g}$ ist halbeinfach und gleich der Summe von gewissen Idealen $\mathfrak{j}_l$. Ein Automorphismus bildet stets Ideale wieder auf Ideale ab, und erhält die Einfachheit. Damit folgt die Aussage. $\diamondsuit$

Wir behandeln zunächst den Fall, in dem σ zwei einfache Ideale austauscht. Diese sind als Lie Algebren natürlich isomorph:

Satz 2.2 *Es sei $\mathfrak{g}$ eine einfache Lie Algebra und $\mathfrak{l} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Weiterhin sei σ ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{l}$, für den $\sigma(\mathfrak{g} \times \{0\}) = \{0\} \times \mathfrak{g}$ gilt. Dann existiert ein Automorphismus ρ von $\mathfrak{g}$, so daß $\sigma(X,Y) = (\rho(Y), \rho^{-1}(X))$ gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.*
σ ist in $Aut(\mathfrak{l})$ konjugiert zur Involution $\phi(X,Y) := (Y,X)$.

Beweis:
Es werden mit $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$ die beiden einfachen Ideale $\mathfrak{g} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathfrak{g}$ bezeichnet. Weiterhin seien $p_i : \mathfrak{l} \to \mathfrak{g}$, $i = 1,2$, die Projektoren auf die erste beziehungsweise zweite Komponente, und ι_i, $i = 1,2$ die Einbettungen von $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$.
Dann werden durch die Abbildungen $\rho := p_1 \circ \sigma \circ \iota_2$ und $\tau := p_2 \circ \sigma \circ \iota_1$ Endomorphismen der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ definiert. Da σ ein Automorphismus von $\mathfrak{l}$ ist, folgt aus der Voraussetzung auch $\sigma(\mathfrak{j}_2) = \mathfrak{j}_1$. Daher gilt für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$:
$\sigma(X,Y) = \sigma(X,0) + \sigma(0,Y) = (0, \tau(X)) + (\rho(Y), 0) = (\rho(Y), \tau(X))$.
Da σ Involution ist, gilt weiterhin $(X,Y) = \sigma^2(X,Y) = (\rho \circ \tau(X), \tau \circ \rho(Y))$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$. Es ist also $\rho = \tau^{-1}$ ein Automorphismus von $\mathfrak{g}$.

Mit dem Automorphismus ψ von $\mathfrak{l}$, erklärt durch $\psi(X,Y) := (\rho(X), Y)$ gilt schließlich
$\psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi(X,Y) = \psi^{-1}(\sigma(\rho(X), Y)) = \psi^{-1}(\rho(Y), X) = (Y,X) = \phi(X,Y)$ für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, womit der Satz bewiesen ist. $\diamondsuit$

Damit können wir das folgende Korollar zeigen:

Korollar 2.3 *Es sei in der Situation von Satz 2.2 die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ nicht kompakt. Dann existiert zur Fixpunktalgebra von σ eine komplementäre Unteralgebra, die nicht isomorph zu $\mathfrak{g}$ ist.*

Beweis:
In Satz 1.80 wurde zur Fixpunktalgebra $\{(X,X) : X \in \mathfrak{g}\}$ von ϕ die komplementäre Unteralgebra $\mathfrak{x}$ in Gleichung (1.13) konstruiert. Nach Satz 2.2 gilt $\psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi = \phi$. Damit ist $\psi(Fix(\phi)) = Fix(\sigma)$, und $\psi(\mathfrak{x})$ wird eine zu $Fix(\sigma)$ komplementäre Unteralgebra, die isomorph zu $\mathfrak{x}$ ist. Nach Satz 1.80 ist damit das Komplement $\psi(\mathfrak{x})$ nicht isomorph zu $\mathfrak{g}$. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.4 Wenn die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ kompakt ist, das heißt $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} = Fix(\theta)$, so reduziert sich die Lie Unteralgebra $\mathfrak{x}$ aus Gleichung (1.13) im Beweis von Satz 1.80 auf $\mathfrak{i} \times \{0\}$, und es ist $\mathfrak{i} = [\mathfrak{z}_k(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_k(\mathfrak{a})] = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$, da $\mathfrak{a} = \{0\}$ ist. Damit ist also $\mathfrak{i} = \mathfrak{g} \times \{0\}$ eines der beiden Ideale von $\mathfrak{l}$, welches natürlich stets eine zu $Fix(\phi) = \{(X,X) : X \in \mathfrak{g}\}$ komplementäre Unteralgebra ist. $\diamondsuit$

Wegen Satz 2.2 reduziert sich das Problem, komplementäre Unteralgebren, die in minimal parabolischen Unteralgebren enthalten sind, darauf, Komplemente in σ-invarianten Idealen von $\mathfrak{g}$ zu finden.
Wenn die Einschränkung von σ auf ein einfaches Ideal $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{g}$ gleich der Identität auf diesem Ideal ist, so haben wir $\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{h} = Fix(\sigma)$. Damit ist $\mathfrak{j}$ bei der Konstruktion

komplementärer Unteralgebren nicht zu berücksichtigen.

Damit bleibt uns nur der folgende Fall zu betrachen: Die Einschränkung von σ auf das einfache Ideal $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{g}$ ist ein Automorphismus der Ordnung 2.
Wenn das einfache Ideal $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{g}$ kompakt ist, so besagt der Satz 1.73, daß keine zu $Fix(\sigma|_{\mathfrak{j}})$ komplementäre Unteralgebra in $\mathfrak{j}$ existiert.

Wir beschäftigen uns daher nur noch mit einem nicht kompakten, σ-invarianten Ideal $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{g}$.
Es sei hier nochmal kurz aus Kapitel 1 Abschnitt 1.5 zusammengefaßt, in welchen Situationen wir zu $Fix(\sigma|_{\mathfrak{j}})$ komplementäre Unteralgebren in $\mathfrak{j}$ konstruieren können. Zur Abkürzung setzen wir $\rho := \sigma|_{\mathfrak{j}}$. Es sei $\mathfrak{a}$ eine ρ-invariante, maximal abelsche Unteralgebra im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{p}$ einer mit ρ vertauschenden Cartan Involution. Weiterhin sei $\mathfrak{a}$ so gewählt, daß $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ist. Dabei bezeichne - wie üblich - $\mathfrak{q}$ den (-1)-Eigenraum der Involution ρ. Dann können wir die folgenden Fälle unterscheiden:

- Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$ ist abelsch. Dann existiert stets ein auflösbares Komplement. (siehe Gleichung (1.12) in Satz 1.75 Teil (ii))
- Das halbeinfache Ideal $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ liegt in $Fix(\rho)$. Auch in diesem Fall existiert ein auflösbares Komplement. (siehe Gleichung (1.12) in Satz 1.75 Teil (i))
- ρ läßt keines der einfachen Ideale der halbeinfachen Unteralgebra $[\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}), \mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})]$ invariant. In diesem Fall haben wir ein nicht auflösbares Komplement nach Proposition 1.79
- Die Lie Algebra $\mathfrak{g}$ ist die Reellifizierung einer halbeinfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$, das heißt, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$. In diesem Fall existiert nach Korollar 1.77 zur Fixpunktalgebra jeder Involution von $\mathfrak{g}$ eine auflösbare, komplementäre Unteralgebra.

Bemerkung 2.5 Die Eigenschaft im ersten Punkt der obigen Auflistung ist nach Bemerkung 1.76 eine Eigenschaft der einfachen Lie Algebra $\mathfrak{j}$, das heißt, wir können in diesen Algebren stets komplementäre Unteralgebren konstruieren.

Um Beispiele für die Konstruktion der komplementären Unteralgebren in einfachen, reellen Lie Algebren zu erhalten, wollen wir hier in Kürze ein Verfahren zur Konstruktion der einfachen, reellen Lie Algebren (bis auf Isomorphie) vorführen:

Wegen Satz 1.3 Teil (iii) brauchen wir nur die reellen Formen von einfachen, komplexen Lie Algebren zu betrachten: Sind zwei reelle, einfache Lie Algebren isomorph, so sind entweder beide reelle Formen zweier einfacher, komplexer Lie Algebren, die dann ebenfalls isomorph sind, oder beide sind Reellifizierungen einfacher, komplexer Lie Algebren. Es ist ausgeschlossen, daß eine reelle Form einer einfachen, komplexen Lie Algebra isomorph ist zur Reellifizierung einer einfachen, komplexen Lie Algebra, da deren Komplexifizierung isomorh ist zur direkten Summe zweier isomorpher Kopien der ursprünglichen komplexen Lie Algebra. Da wir nach Punkt vier der obigen Auflistung stets Komplemente konstruieren können, wenn die betrachtete Lie Algebra die Reellifizierung einer einfachen, komplexen Lie Algebra ist, könne wir uns auf reelle Formen einfacher, komplexer Lie Algebren beschränken. Wir treffen noch die folgende Vereinbarung:

Vereinbarung:
Im folgenden sei $\mathfrak{l}$ stets eine einfache, komplexe Lie Algebra und $\mathfrak{u}$ eine fest gewählte, kompakte, reelle Form von $\mathfrak{l}$. $Aut(\mathfrak{l})$ bezeichne die $\mathbb{C}$-linearen Automorphismen von $\mathfrak{l}$. Die $\mathbb{R}$-linearen Automorphismen sind die Automorphismen der Reellifizierung $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ und werden mit $Aut(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})$ bezeichnet. Aus Proposition 1.9 Teil (v) entnehmen wir die folgende Aussage:

Proposition 2.6 *Es sei $\rho \neq id$ eine Involution von $\mathfrak{u}$, mit den (± 1)-Eigenräumen $\mathfrak{k}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}$ in $\mathfrak{u}$. Dann ist $\mathfrak{g}_{(\rho)} := \mathfrak{k} + i \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ eine nicht kompakte, reelle Form in Cartan Zerlegung mit Cartan Involution $\rho^* := (\rho^{\mathbb{C}})|_{\mathfrak{g}_\rho}$, wobei $\rho^{\mathbb{C}}$ die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von ρ auf $\mathfrak{l}$ bezeichnet.*

Die nächste Proposition zeigt, daß alle nicht kompakten, reellen Formen von $\mathfrak{l}$ bis auf Konjugation entstehen, wie in Proposition 2.6 beschrieben. Auch dies folgt direkt aus Proposition 1.9 und der Konjugiertheit aller Cartan Involutionen von $\mathfrak{l}$ unter der Gruppe $Int(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})$:

Proposition 2.7 *(i) Es sei $\mathfrak{g}$ eine nicht kompakte, reelle Form von $\mathfrak{l}$ mit Cartan Involution θ und Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$. Dann ist $\tilde{\mathfrak{u}} := \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{p}$ eine kompakte, reelle Form von $\mathfrak{l}$, und $\tilde{\rho} := (\theta^{\mathbb{C}})|_{\tilde{\mathfrak{u}}}$ ist Involution von $\tilde{\mathfrak{u}}$ mit $Fix(\tilde{\rho}) = \mathfrak{k}$ und (-1)-Eigenraum $i \cdot \mathfrak{p}$.*
(ii) Es sei ϕ in $Aut(\mathfrak{l})$ mit $\phi(\mathfrak{u}) = \tilde{\mathfrak{u}}$. Dann gilt mit $\rho := \phi^{-1} \circ \tilde{\rho} \circ \phi|_{\mathfrak{u}} \in Aut(\mathfrak{u})$ die Gleichung $\mathfrak{g} = \phi(\mathfrak{g}_{(\rho)})$ und $\theta = \phi \circ \rho^* \circ \phi^{-1}$, wobei ρ^* wie in Proposition 2.6 gebildet wird.

Die entscheidende Aussage über konjugierte, nicht kompakte, reelle Formen von $\mathfrak{l}$ folgt in der nächsten Proposition, zuvor brauchen wir noch eine Definition:

Definition 2.8 *Es sei ρ eine Involution der kompakten, reellen Form $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{l}$, sowie $\mathfrak{g}$ eine weitere, reelle Form mit Cartan Involution θ. Dann heißen die lokal symmetrischen Räume $(\mathfrak{u}, \rho)$ und $(\mathfrak{g}, \theta)$ dual zueinander, wenn $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(\rho)}$ und $\theta = \rho^*$ gilt mit der Konstruktion aus Proposition 2.6.*

Wegen Proposition 2.6 ist die zu $(\mathfrak{u}, \rho)$ duale, reelle Form stets nicht kompakt.
Die folgende Proposition klärt, wann zwei nicht kompakte, reelle Formen konjugiert sind. (siehe [Helg], Chapter V, Prop. 2.2):

Proposition 2.9 *Es seien ρ_1, $\rho_2 (\neq id)$ zwei Involutionen von $\mathfrak{u}$, und $\mathfrak{g}_{(\rho_1)}$ und $\mathfrak{g}_{(\rho_2)}$ die zugehörigen dualen, nicht kompakten, reellen Formen von $\mathfrak{l}$. Dann sind ρ_1 und ρ_2 genau dann konjugiert zueinander in $Aut(\mathfrak{u})$, wenn $\mathfrak{g}_{(\rho_1)}$ und $\mathfrak{g}_{(\rho_1)}$*

konjugiert sind bezüglich $Aut(\mathfrak{l})$*, das heißt, wenn ein* $\phi \in Aut(\mathfrak{l})$ *existiert mit* $\phi(\mathfrak{g}_{(\rho_1)}) = \mathfrak{g}_{(\rho_2)}$.

Definition 2.10 *Für den Rest dieses Abschnitts werde mit* $\mathcal{K}_\mathfrak{u}$ *die Menge aller Konjugiertenklassen von Involutionen* ($\neq id$) *in* $Aut(\mathfrak{u})$ *bezeichnet. Für eine Konjugiertenklasse* $\{\psi^{-1} \circ \rho \circ \psi \, : \, \psi \in Aut(\mathfrak{u})\}$ *einer Involution* ρ *in* $Aut(\mathfrak{u})$ *schreiben wir* $[\rho]_\mathfrak{u}$.
Die analogen Bezeichnungen verwenden wir für die Konjugiertenklassen von $\mathbb{C}$*-linearen Involutionen in* $Aut(\mathfrak{l})$.

Die Propositionen 2.6, 2.7 und 2.9 liefern uns nun das

Korollar 2.11 *Die Zuordnung*

$$\mathcal{K}_\mathfrak{u} \ni [\rho]_\mathfrak{u} \mapsto \{\phi(\mathfrak{g}_{(\rho)}) \, : \, \phi \in Aut(\mathfrak{l})\}$$

ist eine bijektive Abbildung von $\mathcal{K}_\mathfrak{u}$ *auf die Menge aller Bahnen nicht kompakter, reeller Formen von* $\mathfrak{l}$ *unter* $Aut(\mathfrak{l})$.

Beweis: Die Wohldefiniertheit der Abbildung steht in Proposition 2.6 und 2.9. Die Injektivität steht ebenso in Proposition 2.9, und die Surjektivität folgt aus Proposition 2.7. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.12 Zwei reelle Formen von $\mathfrak{l}$ sind genau dann isomorph als reelle Lie Algebren, wenn sie konjugiert sind unter $Aut(\mathfrak{l})$. (siehe [Helg], Chapter X, Theorem 6.1)
Die Menge $\mathcal{K}_\mathfrak{u}$ liefert also über Korollar 2.11 eine Parametrisierung der Isomorphieklassen der reellen, nicht kompakten Lie Algebren, deren Komplexifizierung isomorph zu $\mathfrak{l}$ ist.
Die kompakten Lie Algebren, deren Komplexifizierung isomorph zu $\mathfrak{l}$ ist, sind nach Proposition 1.9 Teil (iii) alle isomorph. Sie bilden eine Bahn unter $Int(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$. $\diamondsuit$

Die folgende Spezialität von kompakten, reellen Formen erlaubt eine Charakterisierung der Isomorphieklassen reeller Formen über die Konjugiertenklassen von Involutionen in $Aut(\mathfrak{l})$ (siehe [Helg], Chapter X, Prop. 1.4):

Proposition 2.13 *Es seien* $\mathcal{K}_\mathfrak{u}$ *und* $\mathcal{K}_\mathfrak{l}$ *die Konjugationsklassen von Involutionen aus Definition 2.10. Dann ist die Abbildung*

$$\mathcal{K}_\mathfrak{u} \ni [\rho]_\mathfrak{u} \mapsto [\rho^{\mathbb{C}}]_\mathfrak{l} \in \mathcal{K}_\mathfrak{l} \tag{2.1}$$

eine Bijektion.

Die Konjugationsklassen $\mathcal{K}_\mathfrak{l}$ sind für alle einfachen, komplexen Lie Algebren $\mathfrak{l}$ klassifiziert. In [Helg], Chapter X (Classifications) werden für alle komplexen, einfachen Lie Algebren sogar alle Automorphismen endlicher Ordnung bis auf Konjugiertheit klassifiziert unter Zuhilfenahme getwisteter, affiner Loop Algebren. Diese Klassifikation basiert auf einer frühen Arbeit von Victor Kac.

Die Automorphismen endlicher Ordnung werden in Chapter X, Theorem 5.15 (i) realisiert durch Angabe der Bilder eines Erzeugendensystems der Lie Algebra.

Die Fixpunktalgebren der involutorischen Automorphismen der einfachen, komplexen Lie Algebren werden in den Tabellen II und III in Chapter X bis auf Isomorphie aufgelistet, und zwar getrennt nach inneren (Tabelle II, k = 1 und Tabelle III) und äußeren (Tabelle II, k = 2) Automorphismen.

Um die Konstruktion von komplementären Unteralgebren - wie in Kapitel 1 beschrieben - an Beispielen durchführen zu können, brauchen wir jedoch Realisierungen von reellen, einfachen Lie Algebren möglichst als Matrix Algebren nebst der zu betrachtenden Involutionen. Betrachten wir das ergiebige Beispiel $sl(n,\mathbb{C})$:

2.2 Die reellen Formen der $sl(n,\mathbb{C})$

Wir behandeln hier kurz die reellen Formen der Serie a_l, $(l \geq 1)$ von einfachen, komplexen Lie Algebren. Die Realisierung als Matrix Algebra für a_l ist bekanntlich die $sl(l+1,\mathbb{C})$. Unsere fest gewählte kompakte, reelle Form wird stets die Unteralgebra $su(n)$ der $sl(n,\mathbb{C})$ aller schief-Hermitschen Matrizen sein. Wir werden die $sl(2,\mathbb{C})$ gesondert behandeln, da sie nur eine Konjugationsklasse von Involutionen besitzt.

Es sei also $n \geq 3$.
Für **ungerades** n sind folgende Automorphismen ein Vertretersystem der Konjugationsklassen $\mathcal{K}_{sl(n,\mathbb{C})}$, welche die kompakte, reelle Form $su(n)$ invariant lassen (siehe [Helg], Chapter X, § 5, Table II und Table III):

$$\begin{aligned} \rho_p(X) &= \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_{n-p} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq p \leq \tfrac{n-1}{2}, \\ \sigma(X) &= -X^T, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad X \in sl(n,\mathbb{C}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dabei bezeichne E_k die $k \times k$ Einheitsmatrix.
Die Fixpunktalgebra von ρ_p hat ein eindimensionales Zentrum, und ihr halbeinfaches Ideal ist isomorph zu $sl(p,\mathbb{C}) \oplus sl(n-p,\mathbb{C}) = a_{p-1} \oplus a_{n-p-1}$.
$Fix(\sigma)$ sind die schiefsymmetrischen, komplexen $n \times n$ Matrizen, also isomorph zu $b_{\frac{n-1}{2}}$.

Für **gerades** n haben wir als Vertretersystem der Konjugationsklassen von Involutionen wiederum die Automorphismen ρ_p, $1 \leq p \leq \frac{n}{2}$ und den äußeren Automorphismus σ. Dessen Fixpunktalgebra ist i somorph zu $d_{\frac{n}{2}}$. Aber es existiert eine weitere Konjugationsklasse äußerer Involutionen mit dem Vertreter (siehe [Helg], Chapter X, § 5, Table II und III)

$$v(X) = -\begin{pmatrix} 0 & E_{\frac{n}{2}} \\ -E_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot X^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -E_{\frac{n}{2}} \\ E_{\frac{n}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in sl(n,\mathbb{C}). \tag{2.3}$$

Die Fixpunktalgebra von v ist die symplektische Algebra

$$c_{\frac{n}{2}} = sp(\frac{n}{2},\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} : A, B, C \in \mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}, \; B = B^T, C = C^T \right\},$$

Jetzt können wir sofort aus diesem Vertretersystem die nicht kompakten, reellen Formen der $sl(n,\mathbb{C})$ hinschreiben:

- Dual zu $(su(n), \rho_p)$ ist offensichtlich $(su(p, n-p), \rho_p)$, mit

$$su(p, n-p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B}^T & D \end{pmatrix}, \begin{array}{l} A \in u(p),\, D \in u(n-p),\, B \in \mathbb{C}^{p\times(n-p)}, \\ Spur(A) + Spur(D) = 0 \end{array} \right\} \tag{2.4}$$

  wobei $u(k)$ die Algebra der schief-Hermitschen $k \times k$ Matrizen bezeichnet.

- Für das Paar $(su(n), \sigma)$ haben wir die Zerlegung (nach Proposition 2.6):
  $\mathfrak{k} = Fix(\sigma) \cap su(n) = \{X \in gl(n, \mathbb{R}) : X = -X^T\}$ und
  $\tilde{\mathfrak{p}} = \{i \cdot X : X \in sl(n, \mathbb{R}), X = X^T\}$.
  Damit ist die duale, reelle Form gleich $g_{(\sigma)} = \mathfrak{k} + i \cdot \tilde{\mathfrak{p}} = sl(n, \mathbb{R})$;
  dies ist „die" normale, reelle Form der $sl(n,\mathbb{C})$ in Cartan Zerlegung.

- Falls n gerade ist, haben wir noch das Paar $(su(n), v)$ zu betrachten:
  $\mathfrak{k} = sp(\frac{n}{2},\mathbb{C}) \cap su(n)$ und $\tilde{\mathfrak{p}} = ER_v(-1) \cap su(n)$.
  Die zu $(su(n), v)$ duale, reelle Form $\mathfrak{g}_{(v)} = k + i \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ wird in der Literatur oft mit $su^*(n)$ (siehe [Helg], Chapter X, § 2, Abschnitt 3) bezeichnet. Eine kurze Rechnung zeigt, die folgende Matrix Darstellung:

$$su^*(n) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}, \; Z_1, \, Z_2 \in \mathbb{C}^{\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}}, \; Re\,(Spur Z_1) = 0 \right\}. \tag{2.5}$$

Bemerkung 2.14 Eine weitere Matrix Darstellung der $su^*(n)$ ist die Lie Algebra der speziellen, linearen Gruppe über den Hamiltonschen Quaternionen, das ist die Algebra

$$sl(\frac{n}{2}, \mathbb{H}) = \{X \in gl(\frac{n}{2}, \mathbb{H}) : Re(Spur X) = 0\},$$

wobei $gl(m, \mathbb{H})$ die Menge aller $m \times m$ Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{H}$ bezeichnet, und der Realteil von $r_1 + i \cdot r_2 + j \cdot r_3 + k \cdot r_4 \in \mathbb{H}$ ist r_1.
Der Isomorphismus von $sl(\frac{n}{2}, \mathbb{H})$ auf $su^*(n)$ wird wie folgt konstruiert:
Für $X \in sl(\frac{n}{2}, \mathbb{H})$ sei $X_1 + i \cdot X_2 + j \cdot X_3 + k \cdot X_4$ die Zerlegung bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i, j, k\}$ von $\mathbb{H}$, und es sei $Z_1 := X_1 + i \cdot X_2$ sowie $Z_2 := X_3 - i \cdot X_4$ gesetzt. Dann ist $X = Z_1 + j \cdot Z_2$, und der gewünschte, $\mathbb{R}$-lineare Isomorphismus ist gegeben durch (siehe z.B. [Hein], Kapitel I, § 2, Abschnitt 10.)

$$sl(\frac{n}{2}, \mathbb{H}) \ni X \mapsto \begin{pmatrix} Z_1 & -\bar{Z}_2 \\ Z_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix}$$

$\diamondsuit$

Schließlich betrachten wir noch die Lie Algebra $sl(2,\mathbb{C})$. In der Automorphismengruppe dieser Algebra sind die Involutionen ρ_1, σ und v zueinander konjugiert, folglich sind die zugehörigen, nicht kompakten, reellen Formen alle konjugiert zu unserer normalen, reellen Form $sl(2,\mathbb{R})$ unter $Int(sl(2,\mathbb{C})^{\mathbb{R}})$.

Bemerkung 2.15 Unsere kompakte, reelle Form $su(n)$ der $sl(n,\mathbb{C})$ ist die Fixpunktalgebra der $\mathbb{C}$-antilinearen Involution $\theta(X) = -\bar{X}^T$. Unsere Vertreter der Konjugationsklassen der $\mathbb{C}$-linearen Involutionen von $sl(n,\mathbb{C})$ lassen $su(n)$ invariant, $su(n)$ zerlegt sich in die ± 1-Eigenräume $\mathfrak{k}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}$, bezüglich der Einschränkung dieser Vertreter. Damit ist die zugehörige, duale, reelle Form $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + i \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$ auch θ-invariant mit (+1)-Eigenraum $\mathfrak{k}$ und (-1)-Eigenraum $i \cdot \tilde{\mathfrak{p}}$. Da dies nach Proposition 2.6 eine Cartan Zerlegung von $\mathfrak{g}$ ist, liefert $\theta|_{\mathfrak{g}}$ stets die zugehörige Cartan Involution von $\mathfrak{g}$. $\diamondsuit$

Die nicht kompakten, reellen Formen der übrigen einfachen, komplexen Lie Algebren (b_l, $l \geq 2$; c_l, $l \geq 3$; d_l, $l \geq 4$; e_6; e_7; e_8; f_4; g_2) sollen hier nicht aufgeführt werden. Dies ist sehr ausführlich nachzuschlagen zum Beispiel bei [Kn], Appendix C, Seiten 518 ff. Dort findet sich auch für jede reelle Form der reelle Rang, das heißt die Dimension einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a}$ im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{p}$ einer Cartan Involution θ, sowie die für unsere Konstruktion komplementärer Unteralgebren entscheidende Struktur des Zentralisators $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k} = Fix(\theta)$. Klären wir diese Struktur dieses Zentralisators für die oben konstruierten, reellen Formen der $sl(n,\mathbb{C})$ (siehe [Kn], Appendix C Seiten 518 ff):

Lemma 2.16 *Es sei $\mathfrak{g}$ eine reelle Form der $sl(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ der Zentralisator einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{k}$. Dann gilt:*
(i) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \{0\}$, falls $\mathfrak{g} = sl(n,\mathbb{R})$. Die reellen Diagonalmatrizen sind eine maximal abelsche Unteralgebra in $\mathfrak{p}$ der Dimension $n-1$.
(ii) Falls $\mathfrak{g} = su(p, n-p)$ mit $p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, so ist der von $\{E_{1,n}+E_{n,1}, \ldots, E_{p,n+1-p}+E_{n+1-p,p}\}$ erzeugte, reelle Unterraum eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{p}$. Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$ ist isomorph zu

$$\begin{array}{rl} \mathbb{R}^p \oplus su(n-2p), & \text{falls } n-2p \geq 2 \\ \mathbb{R}^p, & \text{falls } p = \frac{n-1}{2} \\ \mathbb{R}^{p-1}, & \text{falls } p = \frac{n}{2} \end{array} \tag{2.6}$$

(iii) Wenn $\mathfrak{g} = su^*(n)$ ist, so bilden die reellen Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}$ eine maximal abelsche Unteralgebra der Dimension $\frac{n}{2}-1$ von $\mathfrak{p}$; ihr Zentalisator in $\mathfrak{k}$ ist isomorph zu $su(2) \oplus \ldots \oplus su(2)$ ($\frac{n}{2}$ Summanden). $\diamondsuit$

Bemerkung 2.17 (i) Nach Satz 1.75 Teil (iii) können wir zur Fixpunktalgebra jeder Involution der $sl(n,\mathbb{R})$ eine komplementäre Unteralgebra konstruieren.
(ii) Nach Lemma 2.16 Teil (ii) ist dies wegen Satz 1.75 Teil (ii) auch stets möglich in den Algebren $su(p,p)$ und $su(p,p+1)$ für alle $p \geq 1$.
(iii) Im nächsten Abschnitt werden wir eine Involution der Algebra $su^*(n)$ kon-

struieren, für welche die Situation in Proposition 1.79 erfüllt wird, das heißt, wir können auch hier Komplemente konstruieren.

2.3 Durchführung der Konstruktion an Beispielen

In diesem Abschnitt wird das Verfahren zur Konstruktion komplementärer Unteralgebren aus Kapitel 1 an fünf Beispielklassen vorgeführt. Die Beispiele sind so gewählt, daß die verschiedenen Fälle aus Abschnitt 1.5.3 alle abgedeckt werden.

1. Beispiel:
Wir betrachten die reelle, einfache Lie Algebra $\mathfrak{g} = sl(2n, \mathbb{R})$ mit $n \geq 2$, sowie die Involution

$$\sigma(X) = -\begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix},$$

von $\mathfrak{g}$, wobei $J = E_{1,n} + \ldots + E_{n,1}$. Die (± 1)-Eigenräume von σ werden - wie immer - mit $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{q}$ bezeichnet. Die Cartan Involution $\theta(X) = -X^T$ von $\mathfrak{g}$ vertauscht offenbar mit σ. Wir wählen als maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{p}$ von θ die reellen Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}$.
Um nun eine komplementäre Unteralgebra konstruieren zu können, muß nach Satz 1.49 die Algebra $\mathfrak{a}$ auch $\mathfrak{q}$-maximal sein, das heißt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ muß maximal abelsch sein in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Dieser Nachweis ist mühsam. Aber nach dem Beweis von Satz 1.49 ist dies äquivalent dazu, daß der Wurzelraum $\mathfrak{g}^\alpha$ für jede Wurzel, die von σ fixiert wird (Das ist die Menge $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$), in $\mathfrak{h}$ liegt.

Die Wurzelräume von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{a}$ sind die reell-zweidimensionalen Unterräume $\mathbb{C} \cdot E_{i,j},\ i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ mit den zugehörigen Wurzeln $\alpha_{i,j}$. Es gilt - wie eine kurze Rechnung zeigt - $\sigma(\mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}}) = \mathfrak{g}^{\alpha_{2n-j+1,2n-i+1}}$. Damit ist $\Sigma(\mathfrak{a}^+) = \{\alpha_{i,2n-i+1} : 1 \leq i \leq 2n\}$. Da $\sigma(E_{i,2n-i+1}) = E_{i,2n-i+1}$ gilt, folgt $\mathfrak{g}^{\alpha_{i,2n-i+1}} \subset \mathfrak{h}$, es ist also $\mathfrak{a}$ schon $\mathfrak{q}$-maximal.

Im nächsten Schritt wollen wir im Wurzelsystem Σ ein $\mathfrak{q}$-kompatibles System positiver Wurzeln konstruieren. Nach dem Verfahren, welches wir am Ende von Abschnitt 1.3 vorgestellt haben, müssen wir das Wurzelsystem Σ auf $\mathfrak{a}^- := \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ einschränken. Dieses eingeschränkte System ist ein Wurzelsystem auf $\mathfrak{a}^-$. Wir wählen nun ein in $\mathfrak{a}^-$ reguläres Element H_0. Dann ist jedes System positiver Wurzeln in Σ, für welches H_0 in der zugehörigen, abgeschlossenen Weyl Kammer liegt, schon $\mathfrak{q}$-kompatibel: Eine Basis von $\mathfrak{a}^-$ ist gegeben durch $\{Y_k := E_{k,k} + E_{2n-k+1,2n-k+1} - E_{n,n} - E_{n+1,n+1} : 1 \leq k \leq (n-1)\}$. Ein in $\mathfrak{a}^-$ reguläres Element ist etwa
$H_0 := \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cdot Y_k = diag((n-1), \ldots, 1, -\frac{n(n-1)}{2}, -\frac{n(n-1)}{2}, 1, \ldots, (n-1))$, da $\alpha(H_0) \neq 0$ für alle $\alpha \notin \Sigma(\mathfrak{a}^+)$. Nun gilt $\alpha_{i,j}(H_0) > 0$ genau für die folgenden Indextupel:

$\mathcal{I} := \{(i,j) : 1 \leq i \leq n,\ i < j < 2n-i+1\} \cup \{(i,j) : i > n,\ 2n-i+1 < j < i\}$.
Es ist also jedes System positiver Wurzeln Σ^+ von Σ, welches die Wurzeln $\{\alpha_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$ enthält, schon $\mathfrak{q}$-kompatibel. Für jedes n-Tupel $\epsilon \in \{1,-1\}^n$ mit $\sum_{j-1}^n \epsilon_j = 0$ ist $H_0^{(\epsilon)} := H_0 + diag(\epsilon_1 \cdot \frac{1}{3}, \ldots, \epsilon_n \cdot \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0)$ ein reguläres Element in $\mathfrak{a}$, für welches die zugehörigen positiven Wurzeln Σ_ϵ^+ unsere Wurzeln $\{\alpha_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$ vereinigt mit der Menge $\{\epsilon_k \cdot \alpha_{k,2n-k+1} : 1 \leq k \leq 2n\}$. Dies ergibt auch alle Systeme positiver Wurzeln, für die H_0 im Abschluß der zugehörigen Weyl Kammer liegt, da jedes solche System neben der Menge $\{\alpha_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$ eine n-elementige Teilmenge des Wurzelsystems $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ enthalten muß. Es läßt sich zeigen, daß genau 2^n Systeme positiver Wurzeln in Σ existieren, für welche H_0 im Abschluß der zugehörigen Weyl Kammer liegt.
Die Menge $\Sigma^+ \setminus \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ ist also in jedem Falle gleich $\{\alpha_{i,j} : (i,j) \in \mathcal{I}\}$. Eine zu $\mathfrak{h} = Fix(\sigma)$ komplementäre Unteralgebra ist daher nach 1.75 Teil (iii) gegeben durch

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a}^- + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}} \mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}}. \tag{2.7}$$

Abschlußbemerkung: Das Wurzelsystem $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ ist eine n-fache, direkte Summe von a_1. $\diamondsuit$

2. Beispiel:
Für dieses Beispiel nehmen wir die reelle Form $su^*(2k)$ der $sl(2k,\mathbb{C})$ mit **geradem** $k \geq 2$, wie wir sie in Gleichung (2.5) konstruiert hatten ($n = 2k$). Die Involution σ wird definiert durch

$$\sigma(X) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix},$$

mit der Schrägdiagonalmatrix J in $\mathbb{R}^{k\times k}$ aus dem ersten Beispiel. Diese Involution läßt $su^*(2k)$ invariant, ist also ein Automorphismus und vertauscht mit unserer Cartan Involution $\theta(X) = -\bar{X}^T$. Eine maximal abelsche, σ- invariante Unteralgebra $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{p}$ ist gegeben mit den reellen Diagonalmatrizen in der $su^*(2k)$. Die Bedingung, daß $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}$ maximal abelsch in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ ist, werden wir auch hier mit der äquivalenten Begingung testen. Wir prüfen, ob $\mathfrak{g}^\alpha$ in $\mathfrak{h}$ liegt für alle $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$. Die Wurzelräume bezüglich $\mathfrak{a}$ sind gegeben durch

$$\mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}} = \left\{ \begin{pmatrix} z \cdot E_{i,j} & w \cdot E_{i,j} \\ -\bar{w} \cdot E_{i,j} & \bar{z} \cdot E_{i,j} \end{pmatrix},\ z, w \in \mathbb{C} \right\},\ 1 \leq i,j \leq k,\ i \neq j,$$

wobei $\alpha_{i,j}(diag(x_1, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_k)) = x_i - x_j$.
Eine kurze Rechnung zeigt, daß $\sigma(\mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}}) = \mathfrak{g}^{\alpha_{k-i+1,k-j+1}}$ gilt, folglich wird keine Wurzel von σ fixiert, es ist also $\Sigma(\mathfrak{a}^+) = \emptyset$, und $\mathfrak{a}$ damit auch $\mathfrak{q}$-maximal.

Die Matrix $H_0 := diag(\frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \ldots, \hat{0}, \ldots, -\frac{k}{2} + 1, -\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2} - 1, \ldots, \hat{0}, \ldots, -\frac{k}{2} + 1, -\frac{k}{2}) \in \mathfrak{a}$ ist regulär und liegt in $\mathfrak{q}$, ist also ein in $\mathfrak{a}^-$ reguläres Element. Damit ist das System positiver Wurzeln, für welches H_0 in in der offenen Weyl Kammer liegt, $\mathfrak{q}$-kompatibel. Dieses System positiver Wurzeln ist $\Sigma^+ = \{\alpha_{i,j} : i < j\}$.

Der Zentralisator von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k}$ ist

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{pmatrix} i \cdot D & F \\ -\bar{F} & -i \cdot D \end{pmatrix},\ D \textit{ reell, diagonal},\ F \textit{ komplex, diagonal} \right\}.$$

Er ist isomorph zur direkten Summe $su(2)^k$, und es gilt

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} i \cdot r \cdot E_{j,j} & w \cdot E_{j,j} \\ -\bar{w} \cdot E_{j,j} & -i \cdot r \cdot E_{j,j} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -i \cdot r \cdot E_{k-j+1,k-j+1} & \bar{w} \cdot E_{k-j+1,k-j+1} \\ -w \cdot E_{k-j+1,k-j+1} & i \cdot r \cdot E_{k-j+1,k-j+1} \end{pmatrix}.$$

Da wir k als gerade vorausgesetzt haben, zeigt die letzte Gleichung, daß σ keines der einfachen Ideale von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ invariant läßt, wir können also nach Proposition 1.79 eine zu $Fix(\sigma)$ komplementäre Unteralgebra in $su^*(2k)$ konstruieren. Dazu müssen wir die einfachen Ideale von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ numerieren:

$$\mathfrak{i}_j := \left\{ \begin{pmatrix} i \cdot r \cdot E_{j,j} & w \cdot E_{j,j} \\ -\bar{w} \cdot E_{j,j} & -i \cdot r \cdot E_{j,j} \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R},\ w \in \mathbb{C} \right\} \cong su(2),\ 1 \le j \le k.$$

Wir haben also $\sigma(\mathfrak{i}_j) = \mathfrak{i}_{k-j+1}$. Eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra in $su^*(2k)$ ist nach Proposition 1.79 gegeben mit

$$\mathfrak{r} = \sum_{j=1}^{\frac{k}{2}} \mathfrak{i}_j + \mathfrak{a}^- + \sum_{1 \le i < j \le k} \mathfrak{g}^{\alpha_{i,j}} \tag{2.8}$$

3. Beispiel:

In diesem Beispiel betrachten wir die einfache Lie Algebra $su(p, n-p)$ mit $n \ge 3$ und $p \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ wie in Gleichung (2.4) beschrieben. Wir geben uns Involutionen σ_m vor, von der Gestalt

$$\sigma_m(X) = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & -E_{n-m} \end{pmatrix},$$

mit m aus $\{1, \ldots, n-1\}$. Diese Automorphismen vertauschen mit unserer Cartan Involution $\theta(X) = -\bar{X}^T$. Eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{p}$, die invariant ist unter den σ_m, wird über $\mathbb{R}$ erzeugt von $\{S_1 := (E_{1,n} + E_{n,1}), \ldots, S_p := (E_{p,n-p+1} + E_{n-p+1,p})\}$. Die Zerlegung der Algebra $su(p, n-p)$ in die (± 1)-Eigenräume bezüglich σ_m sei $\mathfrak{h}_m + \mathfrak{q}_m$. Der Unterraum $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_m$ besteht aus Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ \bar{B}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } B \in \mathbb{C}^{m \times (n-p)},\ \text{falls } m \le p,\ \text{und } B \in \mathbb{C}^{p \times (n-m)},\ \text{falls } m > p.$$

Dies zeigt sofort, daß $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{q}_m$ für jedes m maximal abelsch ist in $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}_m$.

In diesem Beispiel interessieren wir uns nicht für die Konstruktion von $\mathfrak{q}$-kompatiblen Systemen positiver Wurzeln, sondern für die Struktur von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ und dessen Schnitt mit $\mathfrak{h}_m$: Nach Lemma 2.16 Teil (ii) ist für $n-2p \geq 2$ $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ isomorph zu $\mathbb{R}^p \oplus su(n-2p)$. Konkret sieht dies wie folgt aus:

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : U \in su(n-2p) \right\} +$$
$$+ \{diag(ir_1, \ldots, ir_p, -iR, \ldots, -iR, i \cdot r_p, \ldots, i \cdot r_1) : r_j \in \mathbb{R},\ R := \tfrac{2}{n-2p} \cdot \textstyle\sum_{j=1}^{p} r_j\}.$$

Das Zentrum von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ liegt für jedes m in $\mathfrak{h}_m$, und das einfache Ideal von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ liegt - falls $n-2p \geq 2$ - genau dann in $\mathfrak{h}_m$, wenn $m \leq p$ oder $m \geq n-p$ gilt. In diesen Fällen können wir also nach Satz 1.75 Teil (i) komplementäre Unteralgebren zu $\mathfrak{h}_m$ in $su(p, n-p)$ konstruieren.

Im Fall $n-2p \leq 1$ ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ abelsch und liegt überdies in $\mathfrak{h}_m$. Nach Satz 1.75 Teil (ii) haben wir auch in diesem Fall zu $\mathfrak{h}_m$ komplementäre Unteralgebren. $\diamondsuit$

4. Beispiel:
In diesem Beispiel wollen wir einfache, komplexe Lie Algebren vorgeben mit einer reellen Form als Fixpunktalgebra. Es sei also $\mathfrak{l}$ eine einfache, komplexe Lie Algebra und $\mathfrak{g}$ eine reelle Form von $\mathfrak{l}$, mit zugehöriger Konjugation τ, das heißt τ ist eine $\mathbb{C}$-antilineare Involution von $\mathfrak{l}$ mit $Fix(\tau) = \mathfrak{g}$. Wir brauchen nun eine Cartan Involution θ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$, die mit τ vertauscht. Dazu geben wir uns eine Cartan Zerlegung $\mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ vor mit zugehöriger Cartan Involution Υ. Dann ist nach Proposition 2.7 Teil (i) $\mathfrak{u} := \mathfrak{k} + i \cdot \mathfrak{p}$ eine kompakte, reelle Form von $\mathfrak{l}$, und $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} + i \cdot \mathfrak{u}$ ist eine Cartan Zerlegung von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$. Die zugehörige Cartan Involution θ hat $\mathfrak{u}$ als Fixpunktalgebra und $i \cdot \mathfrak{u}$ als (-1)-Eigenraum.

Im nächsten Schritt müssen wir eine τ-invariante, maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{a}$ von $i \cdot \mathfrak{u} = i \cdot \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ konstruieren, derart, daß $\mathfrak{a} \cap (i \cdot \mathfrak{g})$ maximal abelsch ist in $i \cdot \mathfrak{u} \cap i \cdot \mathfrak{g}$.
Die τ-Invarianz von $\mathfrak{a}$ erzwingt, daß $\mathfrak{a}$ gleich der Summe aus seinem Schnitt mit $i \cdot \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{p}$ ist, da τ auf $i \cdot \mathfrak{k}$ gleich der negativen Identität, und auf $\mathfrak{p}$ die Identität ist.
Da $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ in die direkte Summe aus $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}$, $i \cdot \mathfrak{k}$ und $i \cdot \mathfrak{p}$ zerfällt, gilt $\mathfrak{a} \cap (i \cdot \mathfrak{g}) = \mathfrak{a} \cap (i \cdot \mathfrak{k})$, dieser Schnitt muß also maximal abelsch sein in $i \cdot k = i \cdot \mathfrak{u} \cap i \cdot \mathfrak{g}$.

Wir wählen also eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{k}$, Es bezeichne $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ den Zentralisator von $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{p}$. Ist nun $\mathfrak{b}$ eine maximal abelsche Unteralgebra in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$, dann hat $\mathfrak{a} := i \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{b} \subset i \cdot \mathfrak{u}$ die gewünschten Eigenschaften. Zu zeigen ist nur, daß $\mathfrak{a}$ **maximal** abelsch ist in $i \cdot \mathfrak{u}$: Es sei $X \in i \cdot \mathfrak{u}$ mit $[X, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Wir zerlegen X in $X_{i \cdot \mathfrak{k}} + X_{\mathfrak{p}}$. Dann gilt für alle $H \in i \cdot \mathfrak{t}$ die Gleichung $0 = [H, X] = [H, X_{i \cdot \mathfrak{k}}] + [H, X_{\mathfrak{p}}] \in \mathfrak{k} \oplus (i \cdot \mathfrak{p})$. Folglich gilt nach Wahl von $\mathfrak{t}$: $X_{i \cdot \mathfrak{k}} \in i \cdot \mathfrak{t}$ und $X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Da X auch mit $\mathfrak{b}$ vertauscht, folgt nach Wahl von $\mathfrak{b}$ auch $X_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{b}$.

Tatsächlich brauchen wir die Unteralgebra $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ nicht zu konstruieren:

Lemma 2.18 *Es sei* $\mathfrak{t}$ *maximal abelsch in* $\mathfrak{k}$. *Dann ist der Zentralisator* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ *von* $\mathfrak{t}$ *in* $\mathfrak{p}$ *abelsch.*

Beweis: (i) Es sei $\mathfrak{b}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Dann ist $\mathfrak{t}+\mathfrak{b}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, das heißt, sie ist maximal abelsch, wie wir oben gezeigt hatten, und $ad(H)$ operiert halbeinfach auf $\mathfrak{g}$ für alle $H \in \mathfrak{t}+\mathfrak{b}$. Dies ist klar, da nach Abschnitt 1.1.2 $ad(T)$ schiefsymmetrisch, und $ad(B)$ symmetrisch bezüglich des Skalarprodukts $-\kappa(\cdot, \Upsilon(\cdot))$ von $\mathfrak{g}$ operiert für alle $T \in \mathfrak{t}$ und $B \in \mathfrak{b}$. Insbesondere ist $\mathfrak{c} := (\mathfrak{t}+\mathfrak{b})^{\mathbb{C}}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{l}$.

(ii) Nun können wir die Behauptung zeigen:
Es sei $X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Dann ist $[X,\mathfrak{t}] = \{0\}$, und es ist $[X,B] \in \mathfrak{k}$ für alle $B \in \mathfrak{b}$, da $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$ gilt. Weiterhin haben wir $[T[X,B]] = [[T,X]B] + [X[T,B]] = [0,B] + [X,0] = 0$ für alle $T \in \mathfrak{t}$ und $B \in \mathfrak{b}$. Da $\mathfrak{t}$ maximal abelsch ist in $\mathfrak{k}$, liegt $[X,B]$ schon in $\mathfrak{t}$. Zusammen folgt $[X,\mathfrak{t}+\mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{t} \leq \mathfrak{t}+\mathfrak{b}$, das heißt X normalisiert unsere Cartan Unteralgebra $\mathfrak{t}+\mathfrak{b}$; diese sind in halbeinfachen Lie Algebren selbstnormalisierend. Es folgt $X \in \mathfrak{b}$. $\diamondsuit$

Mit diesem Lemma können wir sofort das folgende Korollar haben:

Korollar 2.19 *Es ist* $\mathfrak{a} := i\cdot\mathfrak{t}+\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ *eine maximal abelsche Unteralgebra von* $i\cdot\mathfrak{u}$, *die* $(i\cdot\mathfrak{g})$*-maximal ist.* $\diamondsuit$

Im nächsten Schritt betrachten wir das Wurzelsystem Σ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich $\mathfrak{a}$, und suchen nach einem $(i\cdot\mathfrak{g})$-kompatiblen System positiver Wurzeln. Hier hilft uns die folgende Proposition weiter:

Proposition 2.20 *Es sei* $\mathfrak{t}$ *maximal abelsch in* $\mathfrak{k}$, *und* $\mathfrak{a} = i\cdot\mathfrak{t}+\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ *die maximal abelsche Unteralgebra von* $i\cdot\mathfrak{u}$ *aus Korollar 2.19. Dann ist* $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ *leer, das heißt* τ *fixiert keine Wurzel aus dem Wurzelsystem* Σ *bezüglich* $\mathfrak{a}$.

Beweis: Es ist $\mathfrak{c} = (i\cdot\mathfrak{t}+\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}))^{\mathbb{C}}$ eine Cartan Unteralgebra der einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Damit sind die Wurzeln von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{c}$ die $\mathbb{C}$-linearen Fortsetzungen der Wurzeln aus Σ. Insbesondere sind die Wurzelräume eindimensionale, komplexe Unterräume von $\mathfrak{l}$.

Die $(i\cdot\mathfrak{g})$-Maximalität von $\mathfrak{a}$ ist nach Satz 1.49 nebst Beweis äquivalent dazu, daß für jedes $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ der Wurzelraum $(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha}$ ganz in $Fix(\tau) = \mathfrak{g}$ liegt. Da τ als Konjugation von $\mathfrak{l}$ bezüglich der reellen Form $\mathfrak{g}$ eine $\mathbb{C}$-antilineare Involution ist, fixiert τ keinen, nicht trivialen $\mathbb{C}$-Unterraum von $\mathfrak{l}$ punktweise, es ist also $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ leer, da für $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}^+)$ stets $\tau(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha} = (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha}$ gilt. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.21 Nach Definition 1.57 Teil (iii) ist in der Situation von Korollar 2.19 wegen Proposition 2.20 jedes in $\mathfrak{a}^- = \mathfrak{a}\cap(i\cdot\mathfrak{g}) = i\cdot\mathfrak{t}$ reguläre Element schon regulär in $\mathfrak{a}$, da $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ leer ist. Es ist also die Menge aller Wurzeln α in Σ, für welche $\alpha(H_0)$ positiv ist mit einem in $(i\cdot\mathfrak{t})$ regulären Element H_0, ein $(i\cdot\mathfrak{g})$-kompatibles System positiver Wurzeln. $\diamondsuit$

Bevor wir die Konstruktion am Beispiel $\mathfrak{l} = sl(n,\mathbb{C})$ und $\mathfrak{h} = sl(n,\mathbb{R})$ duchführen, sehen wir uns noch einen Spezialfall an, in dem die Durchführung sehr einfach wird:

Proposition 2.22 *Es sei $\mathfrak{t}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{k}$. Wenn $\mathfrak{t}$ schon maximal abelsch in ganz $\mathfrak{g}$ ist, so ist jedes System positiver Wurzeln im Wurzelsystem Σ bezüglich $\mathfrak{a} = i \cdot \mathfrak{t}$ schon $(i \cdot \mathfrak{g})$-kompatibel.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}) = \{0\}$, also isynach Korollar 2.19 $\mathfrak{a} := i \cdot \mathfrak{t}$ maximal abelsch in $i \cdot \mathfrak{u}$, und $(i \cdot \mathfrak{g})$-maximal. Da $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g} = Fix(\tau)$ und $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{k}$ liegt, operiert τ auf $\mathfrak{a}$ als negative Identität. Folglich gilt für jede Wurzel α: $\tau \cdot \alpha = -\alpha$. Mit Satz 1.49 folgt nun die Behauptung. $\diamondsuit$

Bemerkung 2.23 (i) Die reellen, einfachen Lie Algebren, für welche in einer maximal kompakten Unteralgbera eine maximal abelsche Unteralgebra der ganzen Lie Algebra liegt, sind in [Helg], Kapitel IX, Theorem 5.7. klassifiziert: Eine reelle, einfache Lie Algebra $\mathfrak{g}$ mit Cartan Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ besitzt genau dann eine maximal abelsche Unteralgebra, die in $\mathfrak{k}$ liegt, wenn die zugehörige Cartan Involution in $Int(\mathfrak{g})$ liegt, also ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{g}$ ist. Diese Eigenschaft ist natürlich unabhängig von der gewählten Cartan Zerlegung.

(ii) Unter den nicht kompakten, reellen Formen der $sl(n,\mathbb{C})$, $(n \geq 3)$, ist diese Eigenschaft genau für die Algebren $su(p, n-p)$ gegeben: Die rein imaginären Diagonalmatrizen mit Spur 0 bilden eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{t}$ in der Fixpunktalgebra von θ (aus Bemerkung 2.15) in $su(p, n-p)$ der Dimension $n-1$. Da der Unterraum $\mathfrak{t}$ alle Diagonalmatrizen der Algebra $su(p, n-p)$ enthält, ist $\mathfrak{t}$ auch maximal abelsch in $su(p, n-p)$. $\diamondsuit$

Nun fassen wir die Ergebnisse zusammen:

Satz 2.24 *(i) Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ eine reelle Form der einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ in Cartan Zerlegung, sowie $\mathfrak{t}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{k}$. Es sei Σ das Wurzelsystem von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich $\mathfrak{a} := i \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Weiterhin sei H_0 ein in $(i \cdot \mathfrak{t})$ reguläres Element. Dann ist $\{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(H_0) > 0\}$ ein System positiver Wurzeln in Σ, und der Unterraum*

$$\mathfrak{s} = i \cdot \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}) + i \cdot \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha} \tag{2.9}$$

ist eine zu $\mathfrak{g}$ komplementäre Unteralgebra in $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$.

(ii) Wenn die Unteralgebra $\mathfrak{t}$ aus Teil (i) schon maximal abelsch ist in ganz $\mathfrak{g}$, dann ist für jedes System positiver Wurzeln Σ^+

$$\mathfrak{s} = i \cdot \mathfrak{t} + \sum_{\alpha \in \Sigma^+} (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha} \tag{2.10}$$

eine zu $\mathfrak{g}$ komplementäre Unteralgebra in $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$.

Beweis: Nach Korollar 2.19 ist die Algebra $\mathfrak{a}$ aus Teil (i) $(i \cdot \mathfrak{g})$-maximal und folglich auch $i \cdot \mathfrak{t}$ in Teil (ii). Nach Proposition 2.20 ist dann jeweils das Teilsystem $\Sigma(\mathfrak{a}^+)$ leer, und die Menge $\{\alpha \in \Sigma \,|\, \alpha(H_0) > 0\}$ aus Teil (i) ist nach Bemerkung 2.21 ein $(i \cdot \mathfrak{g})$-kompatibles System positiver Wurzeln. Nach Proposition 2.22 ist in der Situation von Teil (ii) jedes System positiver Wurzeln $(i \cdot \mathfrak{g})$-kompatibel.
Nach Satz 1.75 Teil (ii) haben wir damit nur noch die Unteralgebra $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q}$ zu berechnen. Dabei ist $\mathcal{Z}$ das Zentrum des Zentralisators von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{u} = Fix(\theta)$ und $\mathfrak{q} = i\mathfrak{g}$: Es ist $\mathfrak{a}$ maximal abelsch in $i \cdot \mathfrak{u}$, damit ist $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a})$ gleich $i \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{t} + i \cdot \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Also gilt $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{q} = i \cdot \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$, und es folgen (2.9) und (2.10), da $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{q} = i\mathfrak{t}$ gilt. $\diamondsuit$

Bemerkung: Ein ähnliches Problem auf der Gruppenseite wurde in [Aom] bearbeitet: Aomoto gibt sich eine halbeinfache, komplexe Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ mit einer reellen Form G vor und konstruiert explizit ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen in $G^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Untergruppen B und G, wobei B eine Borel Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Dies sind (siehe Proposition 1.26 Teil (iv)) genau die minimal parabolischen Untergruppen von $G^{\mathbb{C}}$. Jedoch hat der Schnitt einer solchen Borel Untergruppe mit der reellen Form G stets positive, reelle Dimension, da $dim(B) + dim(G) = dim G^{\mathbb{C}} + dim(\mathfrak{a})$ gilt. $\diamondsuit$

Jetzt kommen wir zu unserem eigentlichen **Beispiel 4:**
Es sei $n \geq 4$ **gerade** und $\mathfrak{l} = sl(n, \mathbb{C})$. Die Involution $\tau \in Aut(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})$ sei gegeben als die Komplexkonjugation $\tau(X) = \bar{X}$, es ist also $\mathfrak{g} := Fix(\tau) = sl(n, \mathbb{R})$.
Als Cartan Involution auf der $sl(n, \mathbb{R})$ nehmen wir natürlich θ aus der Bemerkung 2.15. Eine Basis einer maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{t}$ der Menge $\mathfrak{k}$ aller reellen, schiefsymmetrischen Matrizen ist gegeben durch $\{(E_{1,n} - E_{n,1}), \dots, (E_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1} - E_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}})\}$.
Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{p}$ ist das $\mathbb{R}$-Erzeugnis der Diagonalmatrizen $\{diag(1, 0, \dots, 0, -1, -1, 0, \dots, 0, 1), \dots, diag(0, \dots, 0, 1, -1, -1, 1, 0, \dots, 0)\}$.
Nach Lemma 2.18 und Korollar 2.19 ist $\mathfrak{a} := i \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ maximal abelsch im Unterraum $i \cdot \mathfrak{u}$ aller Hermitschen Matrizen in $\mathfrak{l}$ und $(i \cdot \mathfrak{g})$-maximal.

Um die Rechnungen leichter durchführen zu können und die Übersichtlichkeit zu bewahren, werden wir das gesamte Problem „verdrehen“, das heißt wir konjugieren die Algebra $\mathfrak{a}$ mit einer unitären Matrix C auf die Menge aller reellen Diagonalmatrizen, um dann die Wurzelraumzerlegung leichter untersuchen zu können. Diese Transformation ist stets möglich, da je zwei maximal abelsche Unteralgebren von $i \cdot \mathfrak{u}$ unter der Wirkung von $Ad(U)$ zueinander konjugiert sind, wobei $U = \exp(\mathfrak{u})$ die spezielle, unitäre Gruppe ist. Eine kurze Rechnung zeigt, daß mit der Matrix

$$\mathbf{C} := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & & & i \\ & \ddots & & & \cdot & \\ & & 1 & i & & \\ & & i & 1 & & \\ & \cdot & & & \ddots & \\ i & & & & & 1 \end{pmatrix} \in SU(n)$$

gilt: $Ad(C)(i\cdot\mathfrak{t}) = \langle\{diag(1,0,\dots,0,-1),\dots,diag(0,\dots,0,1,-1,0,\dots,0)\}\rangle$, und C vertauscht punktweise mit $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$. Es ist also $\tilde{\mathfrak{a}} := Ad(C)(\mathfrak{a})$ gleich der Menge aller reellen Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}$. Um die Rechnung fortsetzen zu können, müssen wir auch die Involutionen τ und θ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ mit $Ad(C)$ konjugieren, wir setzen also $\tilde{\tau} := Ad(C)\circ\tau\circ Ad(C^{-1})$ und $\tilde{\theta} := Ad(C)\circ\theta\circ Ad(C^{-1})$. Dann ist $\tilde{\theta}=\theta$, weil C unitär ist. $\tilde{\tau}$ ist die Involution $Ad(J)\circ\tau$ von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$, wobei $J=\sum_{k=1}^{n}E_{k,n-k+1}$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathfrak{h}}$ die Fixpunktalgebra von $\tilde{\tau}$, und mit $\tilde{\mathfrak{q}}$ den (-1)-Eigenraum von $\tilde{\tau}$. Dann ist $\tilde{\mathfrak{a}}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $i\cdot\mathfrak{u}$, die $\tilde{\mathfrak{q}}$-maximal ist, da die analoge Eigenschaft für $\mathfrak{a}$ gilt.

Die Wurzelräume von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich $\tilde{\mathfrak{a}}$ sind nun die $\mathbb{C}\cdot E_{i,j}$ mit $i\neq j$. Ein in $\tilde{\mathfrak{a}}^-$ reguläres Element ($\tilde{\mathfrak{a}}^- = \tilde{\mathfrak{a}}\cap\tilde{\mathfrak{q}} = Ad(C)(i\cdot\mathfrak{t})$) ist zum Beispiel $diag(\frac{n}{2},\dots,1,-1,\dots,-\frac{n}{2})$. Dieses ist - wie in Bemerkung 2.21 allgemein gezeigt - schon regulär in $\tilde{\mathfrak{a}}$. Das zugehörige System positiver Wurzeln in Σ ist $\{\alpha_{i,j} : i<j\}$. Nach Satz 2.24 Teil (i) ist damit die folgende Unteralgebra komplementär zu $\tilde{\mathfrak{h}}$:

$$\tilde{\mathfrak{s}} = i\cdot\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}) + \tilde{\mathfrak{a}}^- + \sum_{i<j}(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_{i,j}}.$$

Dies ist klar, da $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ invariant ist unter $Ad(C)$ (sogar punktweise fix).

Bemerkung 2.25 Es ist **nicht** jedes System positiver Wurzeln $\tilde{\mathfrak{q}}$-kompatibel. Zum Beispiel sind die positiven Wurzeln zum regulären Element $diag(-1,-2,\dots,-(n-1),\frac{n(n-1)}{2})$ - die zugehörigen positiven Wurzeln haben die Indexmenge $\mathcal{I}=\{(i,j) : i<j\leq(n-1)\}\cup\{(n,k) : 1\leq k\leq(n-1)\}$ - nicht $\tilde{\mathfrak{q}}$-kompatibel, da $-\tilde{\tau}(\alpha_{n,(n-1)})=\alpha_{2,1}$, aber $(2,1)\notin\mathcal{I}$ ist. $\diamondsuit$

Schließlich erhalten wir eine zu $sl(n,\mathbb{R})$ komplementäre Unteralgebra in $sl(n,\mathbb{C})$ durch „zurückdrehen" von $\tilde{\mathfrak{s}}$ mit $Ad(C^{-1})$:

$$\mathfrak{s} := Ad(C^{-1})(\tilde{\mathfrak{s}}) = i\cdot\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}) + i\cdot\mathfrak{t} + Ad(C^{-1})(\mathfrak{n}), \tag{2.11}$$

wobei $\mathfrak{n}$ die nilpotente Unteralgebra aller komplexen, echten oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbb{C}^{n\times n}$ bezeichnet.

5. Beispiel:
In Kapitel 3 werden wir eine verallgemeinerte Iwasawa Zerlegung in getwisteten Loop Algebren entwickeln. Grundlage hierfür ist die in Kapitel 1 entwickelte verallgemeinerte Iwasawa Zerlegung in den endlich dimensionalen Lie Algebren. Die Zerlegung in getwisteten Loop Algebren ist eine lokale Version der Iwasawa Zerlegung in den zugehörigen Loop Gruppen. In der Veröffentlicung [Hel] wird die Iwasawa Zerleung angewandt für die Konstruktion von Willmore Flächen. Es soll aber an dieser Stelle nicht näher auf diese Flächen eingegangen werden. Für die lokale Version der Iwasawa Zerlegung haben wir dabei folgende Lie Algebren zu betrachten:
Die komplexe, halbeinfache Lie Algebra $\mathfrak{l} := so(3,1)^{\mathbb{C}}$ und die reelle Form $\mathfrak{h} := so(3,1)$, es ist also die zugehörige Involution die gewöhnliche Komplexkonjugation

auf $\mathfrak{l}$. Die Algebra $\mathfrak{l}$ ist isomorph zur direkten Summe $sl(2,\mathbb{C}) \oplus sl(2,\mathbb{C})$.

Wir betrachten die Algebren $so(p, n-p)$ zunächst allgemein:

$$so(p, n-p) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix} : A \in so(p),\ D \in so(n-p),\ B \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)} \right\}$$

Eine Cartan Involution der $so(p, n-p)$ ist Konjugation mit der Diagonalmatrix $diag(\underbrace{1,\ldots,1}_{p}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-p})$, die Blockdiagonalmatrizen in $so(p, n-p)$ sind also eine maximal kompakte Unteralgebra $\mathfrak{k}$.

Bemerkung: Die Komplexifizierung $so(p, n-p)^{\mathbb{C}}$ ist isomorph zur Lie Algebra $so(n)^{\mathbb{C}}$ aller komplexen, symmetrischen $n \times n$ Matrizen. Der Isomorphismus wird für uns aber keine Rolle spielen.

Kehren wir jetzt zurück zu unserem Spezialfall $n = 4$ und $p = 3$. Wir sind hier in der Situation, eine komplementäre Unteralgebra zu einer reellen Form ($so(3,1)$) einer komplexen, halbeinfachen Lie Algebra ($\mathfrak{l} = so(3,1)^{\mathbb{C}}$) zu konstruieren. Dazu gehen wir wie in Beispiel 5 beschrieben vor: Eine maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{k}$ ist gegeben durch $\mathbb{R} \cdot H_1$ mit $H_1 := E_{2,3} - E_{3,2}$. Der Zentralisator $\mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t})$ von $\mathfrak{t}$ im (-1) Eigenraum $\mathfrak{p}$ unserer Cartan Involution von $so(3,1)$ ist $\mathbb{R} \cdot H_2$ mit $H_2 := E_{1,4} + E_{4,1}$. Nach Korollar 2.19 ist $\mathfrak{a} := \mathbb{R} \cdot (i \cdot H_1) + \mathbb{R} \cdot H_2$ in $i \cdot \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$-maximal ($\mathfrak{q} = i \cdot so(3,1)$).

Nun brauchen wir die Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich $\mathfrak{a} := \mathbb{R}\cdot(i\cdot H_1) + \mathbb{R}\cdot H_2$. Dazu betrachten wir die Matrizen $C_1 := E_{1,2} - E_{2,1}$, $C_2 := i \cdot (E_{3,1} - E_{1,3})$, $C_3 := E_{4,2} + E_{2,4}$ und $C_4 := (-i) \cdot (E_{3,4} + E_{4,3})$ in $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$. Eine kurze Rechnung zeigt nun folgendes: $ad(iH_1)$ vertauscht C_1 und C_2 sowie C_3 und C_4. $ad(H_2)$ vertauscht C_1 und C_3 sowie C_2 und C_4.
Damit bekommen wir vier simultane Eigenräume für $ad(\mathfrak{a})$:

$$\begin{array}{lll} (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_1} = \mathbb{C} \cdot (C_1 + C_2 + C_3 + C_4) & \text{mit} & \alpha_1(iH_1) = 1 = \alpha_1(H_2) \\ (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_2} = \mathbb{C} \cdot (C_1 - C_2 + C_3 - C_4) & \text{mit} & \alpha_2(iH_1) = -1,\ \alpha_2(H_2) = 1 \\ (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_3} = \mathbb{C} \cdot (C_1 + C_2 - C_3 - C_4) & \text{mit} & \alpha_3(iH_1) = 1,\ \alpha_3(H_2) = -1 \\ (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_4} = \mathbb{C} \cdot (C_1 - C_2 - C_3 + C_4) & \text{mit} & \alpha_4(iH_1) = -1 = \alpha_4(H_2) \end{array}$$

Weil $\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} + \sum_{k=1}^4 (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_k} = \mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ gilt, liefern diese vier Unterräume die komplette Wurzelraumzerlegung von $\mathfrak{l}^{\mathbb{R}}$ bezüglich $\mathfrak{a}$, es ist also $\Sigma = \{\alpha_k : 1 \leq k \leq 4\}$.
Es gilt für die Wurzeln α_k: $\alpha_4 = -\alpha_1$ und $\alpha_3 = -\alpha_2$.
Im eindimensionalen Unterraum $\mathfrak{a}^- = \mathbb{R}\cdot(iH_1)$ ist offenbar jedes von 0 verschiedene Element regulär bezüglich Σ. Wir nehmen also H_1 als in $\mathfrak{a}^-$ reguläres Element. Ein $\mathfrak{q}$-kompatibles System positiver Wurzeln in Σ ist damit $\Sigma^+ = \{\alpha_1, \alpha_3\}$.

Bemerkung 2.26 (i) Die Wurzeln $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ sind ebenfalls positive Wurzeln, da $\alpha_j(H_2) > 0$ für $j = 1, 2$. Sie sind aber nicht $\mathfrak{q}$-kompatibel, da $\alpha_1(H_1) > 0 > \alpha_2(H_1)$.

(ii) Das Wurzelsystem Σ auf $\mathfrak{a}$ ist natürlich nicht irreduzibel; die Kommutatoren der Wurzelräume zu den Wurzeln α_1 und α_2 sowie zu den Wurzeln α_1 und α_3 sind trivial. Daher sind die komplexen Unterräume $[(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_1}, (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_4}] + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_1} + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_4}$ und $[(\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_2}, (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_3}] + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_2} + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_3}$ die beiden zu $sl(2,\mathbb{C})$ isomorphen Ideale von $\mathfrak{l}$. $\diamondsuit$

Jetzt können wir nach Satz 2.24 eine zu $so(3,1)$ komplementäre Unteralgebra in $so(3,1)^{\mathbb{C}}$ angeben:

$$\mathfrak{s} := i \cdot \mathfrak{z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) + i \cdot \mathfrak{t} + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_1} + (\mathfrak{l}^{\mathbb{R}})^{\alpha_3} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z & -i \cdot z & i \cdot r \\ -z & 0 & i \cdot s & w \\ i \cdot z & -i \cdot s & 0 & -i \cdot w \\ i \cdot r & w & -i \cdot w & 0 \end{pmatrix} \; : \; z, w \in \mathbb{C}, \; r, s \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.12}$$

Kapitel 3

Kac-Moody-Algebren und die Iwasawa Zerlegung in Loop Algebren

In diesem Kapitel werden wir zunächst in Kürze die wichtigsten Grundlagen der Theorie der Kac-Moody-Algebren vorstellen, wobei unser spezielles Interesse den Kac-Moody-Algebren vom affinen Typ gilt. Im zweiten Abschnitt werden die Realisierungen dieser Algebren als zentrale Erweiterungen von ungetwisteten und getwisteten Loop Algebren über halbeinfachen, komplexen Lie Algebren entwickelt.

Die Theorie der affinen Kac-Moody-Algebren führen wir nicht nur als Grundlage der Loop Algebren ein. Diese Algebren besitzen eine Wurzelraumzerlegung ähnlich wie die endlichdimensionalen, einfachen, komplexen Lie Algebren und eine zugehörige Weyl Gruppe. Diese wird im nächsten Kapitel bei der globalen Iwasawa Zerlegung von Loop Gruppen eine zentale Rolle spielen.

Im vorletzten Abschnitt dieses Kapitels wird die Iwasawa Zerlegung in polynomialen Loop Algebren durchgeführt. Die zu betrachtenden Fixpunktalgebren sind die reellwertigen Loops bezüglich einer reellen Form der zugrundeliegenden, halbeinfachen, komplexen Lie Algebra.

Im letzten Abschnitt wird auf den Loop Algebren eine Norm eingeführt, bezüglich der diese abgeschlossen werden. Dies führt uns zu einer lokalen Version der Iwasawa Zerlegung wie sie im nächsten Kapitel entwickelt wird, das heißt, die Iwasawa Zerlegung wird auf den Lie Algebren der Loop Gruppen durchgeführt, die in Kapitel 4 eingeführt werden.

3.1 Affine Kac-Moody-Algebren

Die Theorie der Kac-Moody-Algebren wurde 1967 unabhängig von Kac und Moody entwickelt. Diese Algebren sind eine Verallgemeinerung der endlichdimensionalen, einfachen, komplexen Lie Algebren. Ausgangspunkt dieser Verallgemeinerung ist die folgende, bekannte Aussage über einfache, komplexe Lie Algebren, nämlich der Satz von Serre (siehe z.B. [Hum], Proposition 18.1):

Proposition 3.1 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine einfache, komplexe Lie Algebra und $\mathfrak{c}$ eine Cartan Unteralgebra. $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ bezeichne das Wurzelsystem von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{c}$. Mit der in Proposition 1.15 Teil (iv) definierten Bilinearform im Dual $\mathfrak{c}^*$ erhalten wir ganze Zahlen $a_{ij} := \frac{2\cdot(\alpha_j,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$, $(1 \leq i,j \leq n)$. Dann gelten die folgenden Aussagen: Die Lie Algebra $\mathfrak{l}$ wird von der Menge von $3n$ Elementen $\{E_i, F_i, H_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ erzeugt, welche den folgenden Relationen genügen:*

$$\begin{aligned} [H_i\, H_j] &= 0, \quad 1 \leq i,j \leq n \\ [E_i\, F_j] &= \delta_{ij} \cdot H_i, \quad 1 \leq i,j \leq n \\ [H_i\, E_j] &= a_{ij} \cdot E_j \quad \textit{und} \quad [H_i\, F_j] \;=\; -a_{ij} \cdot F_j \quad 1 \leq i,j \leq n \\ (ad\, E_i)^{1-a_{ij}}(E_j) &= 0 \;=\; (ad\, F_i)^{1-a_{ij}}(F_j) \quad 1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die aus den Zahlen a_{ij} gebildete Matrix $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ heißt Cartan Matrix der Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Sie genügt den folgenden Bedingungen:
(i) $a_{ii} = 2$ *für* $i \in \{1, \ldots, n\}$,
(ii) Die a_{ij} *sind ganze Zahlen kleiner oder gleich 0 für alle* $i \neq j$,
(iii) $a_{ij} = 0$ *genau dann, wenn* $a_{ji} = 0$, *und*
(iv) alle Hauptminoren von A *sind positiv.* $\diamondsuit$

Bemerkung 3.2 Nach dem Satz von Serre sind die Gleichungen in (3.1) auch definierende Relationen für die Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Das heißt, wir geben das irreduzible Wurzelsystem Δ mit Cartan Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ der Algebra $\mathfrak{l}$ vor. In der freien Lie Algebra $\mathfrak{f}$ mit den $3n$ Erzeugern E_i, F_i, H_i, $(1 \leq i \leq n)$ faktorisieren wir nach den Relationen (3.1), das heißt, wir betrachten die Lie Algebra $\tilde{\mathfrak{l}} := \mathfrak{f}/\mathfrak{i}$, wobei $\mathfrak{i}$ das von den Elementen $[H_i\, H_j], \ldots, (ad\, F_i)^{1-a_{ij}}(F_j)$ aus (3.1) erzeugte Ideal von $\mathfrak{f}$ ist. Dann ist $\tilde{\mathfrak{l}}$ isomorph zu $\mathfrak{l}$, und die $H_j + \mathfrak{i}$ erzeugen eine Cartan Unteralgebra von $\tilde{\mathfrak{l}}$ mit zugehörigem Wurzelsystem Δ. $\diamondsuit$

Der wesentliche Punkt in der Verallgemeinerung von Kac und Moody besteht darin, Lie Algebren ähnlich wie in Bemerkung 3.2 aus *verallgemeinerten* Cartan Matrizen zu konstruieren, wobei diese Cartan Matrizen alle Eigenschaften aus aus Proposition 3.1 besitzen, außer der vierten:

Definition 3.3 *(i) Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ heißt* **verallgemeinerte Cartan Matrix**, *wenn A die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Proposition 3.1 erfüllt.*
(ii) Zwei verallgemeinerte Cartan Matrizen A und B heißen äquivalent, wenn eine

Permutationsmatrix P mit Koeffizienten aus $\{0,1\}$ existiert, so daß $B = P \cdot A \cdot P^T$ gilt.
(iii) Eine verallgemeinerte Cartan Matrix A heißt zerlegbar, wenn eine Permutationsmatrix P existiert, so daß $P \cdot A \cdot P^T$ Blockdiagonalgestalt hat. Existiert diese nicht, so heißt A unzerlegbar.
(iv) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisierbar, wenn eine reelle, invertierbare Diagonalmatrix D existiert und eine symmetrische Matrix B, so daß $A = D \cdot B$ gilt.

Der erste Schritt bei der Konstruktion von Lie Algebren aus verallgemeinerten Cartan Matrizen ist die *Realisierung* dieser Matrizen in Cartan Unteralgebren:

Definition 3.4 *Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix. Ein Tripel $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ bestehend aus einem endlichdimensionalen, komplexen Vektorraum $\mathfrak{c}$ und Mengen $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{c}^*$ sowie $\Pi^\vee = \{H_1, \ldots, H_n\} \subset \mathfrak{c}$ heißt* **Realisierung** *von A, wenn gilt*
(i) die Teilmengen Π und $\Pi^\vee$ der Vektorräume c^* und $\mathfrak{c}$ sind linear unabhängig.
(ii) $\alpha_j(H_i) = a_{ij}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Zwei Realisierungen $(\mathfrak{c}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$ und $(\mathfrak{c}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$ heißen isomorph, wenn ein Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathfrak{c}_1 \to \mathfrak{c}_2$ existiert, so daß $\varphi(H_i^{(1)}) = H_i^{(2)}$ und $\varphi^*(\alpha_i^{(2)}) = \alpha_i^{(1)}$ gilt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, wobei $\varphi^* : \mathfrak{c}_2^* \to \mathfrak{c}_1^*$, $\varphi^*(\lambda)(H^{(1)}) = \lambda(\varphi(H^{(1)}))$ ist.

Jetzt zitieren wir das wichtige Resultat über die Realisierungen von verallgemeinerten Cartan Matrizen (siehe [Wan], Proposition 1.1):

Proposition 3.5 *Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix vom Rang l, und $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ eine Realisierung von A. Dann ist $\dim \mathfrak{c} \geq 2n - l$.*
Es existiert eine Realisierung $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ von A mit $\dim \mathfrak{c} = 2n - l$. Je zwei Realisierungen von A der Dimension $2n - l$ sind isomorph im Sinne von Definition 3.4

Die Realisierung der Cartan Matrix A der Dimension $2n - l$ heißt **minimale Realisierung**. Wegen ihrer Wichtigkeit für die Kac-Moody-Algebren werden wir die Konstruktion dieser Realisierung kurz ausführen:

Die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ besitze den Rang l. Daher existieren Permutationsmatrizen P_1 und P_2 mit Koeffizienten aus $\{0,1\}$, so daß in der Matrix

$$\tilde{A} := P_1 \cdot A \cdot P_2^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} eine invertierbare Matrix in $\mathbb{Z}^{l\times l}$ ist. Damit wird die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & I_{n-l} \\ 0 & I_{n-l} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{(2n-l)\times(2n-l)}$$

eine invertierbare Martix. Wir setzen $\mathfrak{c} := \mathbb{C}^{2n-l}$. $\alpha_1, \dots \alpha_n$ seien die Linearformen von $\mathfrak{c}$ mit $\alpha_i(e_j) = \delta_{ij}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, 2n-l\}$, wobei $\{e_j,\ 1 \leq j \leq 2n-l\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{C}^{2n-l}$ bezeichnet.
Ferner seien $H_1, \dots, H_n \in \mathfrak{c}$ die ersten n Zeilenvektoren der Matrix C. Dann ist $\alpha_j(H_i) = c_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zuletzt permutieren wir in den Mengen $\Pi := \{\alpha_j :\ 1 \leq j \leq n\}$ und $\Pi^\vee := \{H_i :\ 1 \leq i \leq n\}$ die Indizes mit den zu P_1^T beziehungsweise P_2^T gehörigen Permutationen. Dann ist $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ eine minimale Realisierung der Matrix A. $\diamondsuit$

Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathfrak{c}$ wird die Cartan Unteralgebra der zu konstruierenden Kac-Moody-Algeben, und die Menge Π eine Basis des Wurzelsystems. Wenn A eine klassische Cartan Matrix ist, so sind wir mit einer minimalen Realisierung von A in der bekannten Situation aus Proposition 3.1 in Gleichung (3.1). In diesem Fall ist die Dimension von $\mathfrak{c}$ gleich $2n - l = n$, da A invertierbar ist.

Zunächst wollen wir noch die Klassifikation der verallgemeinerten Cartan Matrizen vorstellen, soweit sie bis heute bekannt ist. Wir können uns dabei auf unzerlegbare, verallgemeinerte Cartan Matrizen beschränken, wie sie in Definition 3.3 Teil (iii) eingeführt wurden: Wenn die Matrix A durch simultane Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf Blockdiagonalgestalt gebracht werden kann mit den Diagonalblöcken A_1 und A_2, so wird die (noch einzuführende) Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ isomorph zur direkten Summe $\mathfrak{g}(A_1) \oplus \mathfrak{g}(A_2)$. Wir zitieren nun den überraschenden Satz von Vinberg zur Klassifikation verallgemeinerter Cartan Matrizen. Zuvor brauchen wir noch eine

Bezeichnung: Für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir $u > 0$, wenn alle Koeffizienten von u größer 0 sind, und $u \geq 0$, wenn alle Koeffizienten größer oder gleich 0 sind. $u < 0$ heißt $-u > 0$, ebenso $u \leq 0$ heißt $-u \geq 0$.

Damit können wir den Satz von Vinberg formulieren (siehe [Wan], Theorem 2.2 und Corollary 2.2)

Satz 3.6 *Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine unzerlegbare, verallgemeinerte Cartan Matrix. Dann erfüllt A genau eine der folgenden Bedingungen:*
(Fin) A ist invertierbar, und es existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, so daß $A \cdot u > 0$ gilt.
(Aff) A hat den Rang $n-1$, und es existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, so daß $A \cdot u = 0$ gilt.
(Ind) Es existiert ein $u \in \mathbb{R}^n$, $u > 0$, so daß $A \cdot u < 0$ gilt. $\diamondsuit$

Bemerkung 3.7 (i) Die Abkürzungen (Fin), (Aff) und (Ind) in dem Satz stehen für endlich, affin und indefinit. Nach dem Satz von Vinberg ist eine unzerlegbare, verallgemeinerte Cartan Matrix also stets vom endlichen, affinen oder indefiniten Typ. Die Matrizen vom indefiniten Typ sind bis heute nicht klassifiziert. Die ersten beiden Typen von Cartan Matrizen sind klassifiziert bis auf Ähnlichkeit, wie sie in Definition 3.3 Teil (ii) eingeführt wurde.

(ii) Um sich von der Ähnlichkeit von Matrizen freizumachen, führt man - wie in der klassischen Theorie - ein Dynkin Diagramm zu jeder verallgemeinerten Cartan Matrizen ein:

Wenn $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix ist, so wird das zugehörige Dynkin Diagramm $S(A)$ als Graph mit n Knoten definiert, welche indiziert werden mit den Zahlen $1,\ldots,n$. Je zwei Knoten i und j werden verbunden mit $max(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ Kanten, wenn $a_{ij}\cdot a_{ji} \leq 4$ ist. Die Kanten werden mit einem Pfeil in Richung i versehen, wenn $|a_{ij}| > 1$ gilt. Das heißt, auch Pfeile in beide Richtungen sind möglich.
Wenn $a_{ij}\cdot a_{ji} > 4$ ist, werden die Knoten i und j mit einer fetten Kante verbunden, über welche das Tupel $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$ gesetzt wird, wenn der Knoten i links liegt.

(iii) Eine verallgemeinerte Cartan Matrix A ist bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt durch sein Dynkin Diagramm $S(A)$, und $S(A)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A unzerlegbar ist. $\diamondsuit$

Das entscheidende Hilfsmittel bei der Kassifizierung der unzerlegbaren, verallgemeinerten Cartan Matrizen ist die folgende Aussage: (siehe etwa [Wan], Proposition 2.5 B und Theorem 2.5)

Proposition 3.8 *(i) Es sei A eine unzerlegbare, verallgemeinerte Cartan Matrix vom endlichen oder affinen Typ. Dann ist jedes echte Teildiagramm des Dynkin Diagramms $S(A)$ Vereinigung von Dynkin Diagrammen zu unzerlegbaren, verallgemeinerten Cartan Matrizen vom endlichen Typ.*
(ii) Die Dynkin Diagramme der unzerlegbaren, verallgemeinerten Cartan Matrizen vom endlichen Typ sind genau die Dynkin Diagramme der endlichdimensionalen, einfachen, komplexen Lie Algebren. $\diamondsuit$

Die Kassifikation der Dynkin Diagramme vom affinen Typ wurde 1968 von Kac und Moody durchgeführt. Eine Liste dieser Dynkin Diagramme findet sich in [Kac], Seite 54 - 55. Nun kommen wir schließlich zur Konstruktion der Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$.

Definition 3.9 *Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix vom endlichen oder affinen Typ vom Rang l und $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ die minimale Realisierung von A. Es werde $\Pi^\vee = \{H_1,\ldots,H_n\}$ zu einer Basis $\{H_1,\ldots,H_{2n-l}\}$ von $\mathfrak{c}$ ergänzt.*
Es sei $\mathfrak{f}$ die freie Lie Algebra, welche erzeugt wird von den Mengen $\{H_1,\ldots,H_{2n-l}\}$ und $\{E_i, F_i :\ 1\leq i\leq n\}$. Weiterhin sei $\mathfrak{i}$ das Ideal von $\mathfrak{f}$, welches von den folgenden Elementen erzeugt wird:

$$\begin{array}{llc} (i) & [H_i\, H_j] & 1\leq i,j\leq 2n-l \\ (ii) & [E_i\, F_j] - \delta_{ij}\cdot H_i & 1\leq i,j\leq n \\ (iii) & [H_i\, E_j] - \alpha_j(H_i)\cdot E_j & und \\ & [H_i\, F_j] + \alpha_j(H_i)\cdot F_j & 1\leq i\leq 2n-l,\ 1\leq j\leq n \\ (iv) & (ad\, E_i)^{1-a_{ij}}(E_j),\quad (ad\, F_i)^{1-a_{ij}}(F_j) & 1\leq i,j\leq n,\ i\neq j. \end{array} \tag{3.2}$$

Die Faktoralgebra $\mathfrak{g}(A) := \mathfrak{f}/\mathfrak{i}$ heißt die Kac-Moody-Algebra zur Cartan Matrix A.

Bemerkung 3.10 (i) Wenn A die Cartan Matrix zu einer einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ ist, so besagt der Satz von Serre, daß die Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ isomorph zu $\mathfrak{l}$ ist.

(ii) Der ursprüngliche Zugang zur Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ mit einer verallgemeinerten Cartan Matrix A ist etwas komplizierter: Die freie Lie Algebra $\mathfrak{f}$ aus Definition 3.9 wird faktorisiert nach dem Ideal $\tilde{\mathfrak{i}}$, welches von den Elementen in (i), (ii) und (iii) erzeugt wird. In der Faktoralgebra $\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \mathfrak{f}/\tilde{\mathfrak{i}}$ existiert genau ein maximales Ideal $\mathfrak{j}$, das die Algebra $\mathfrak{c}+\tilde{\mathfrak{i}}$ trivial schneidet. Wenn die verallgemeinerte Cartan Matrix A symmetrisierbar ist, so sind die Algebren $\mathfrak{g}(A)$ und $\tilde{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{j}$ isomorph (siehe [Wan], Proposition 4.1). Die verallgemeinerten Cartan Matrizen vom endlichen und affinen Typ sind jedoch alle symmetrisierbar (siehe [Wan], Proposition 2.4 A).

(iii) Die Projektionen der Elemente H_i, E_j und F_j $(1 \leq i \leq 2n-l,\ 1 \leq j \leq n)$ aus Definition 3.9 von $\mathfrak{f}$ auf die Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ werden ebenfalls mit H_i, E_j und F_j bezeichnet. $\diamondsuit$

Jetzt klären wir die grobe Struktur der affinen Lie Algebren $\mathfrak{g}(A)$. Zunächst noch eine Definition:

Definition 3.11 *Es sei $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ die minimale Realisierung der verallgemeinerten Cartan Matrix A. Dann heißt $\mathcal{Q} := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \cdot \alpha_i \subset \mathfrak{c}^*$ das Wurzelgitter der Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$. Weiter sei $\mathcal{Q}^+ = \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_+ \cdot \alpha_i$ gesetzt.*

Die Aussagen des folgenden Satzes finden sich in [Wan], Chapter 1, Theorem 1.3, Proposition 1.5 und 1.6:

Satz 3.12 *Es sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix vom affine Typ. Dann besitzt die Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ eine Wurzelraumzerlegung der Gestalt*

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{Q}} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{3.3}$$

wobei $\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g}(A) : [HX] = \alpha(H) \cdot X \ \forall H \in \mathfrak{c}\}$. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{Q}$ gilt $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. Die Unteralgebra $\mathfrak{g}_0$ ist die **Cartan Unteralgebra** $\mathfrak{c}$ *der Dimension $n+1$. Diese ist abelsch. Ein $\alpha \in \mathcal{Q} \setminus \{0\}$ heißt* **Wurzel** *von $\mathfrak{g}(A)$, wenn $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ ist.*
Jede Wurzel von $\mathfrak{g}(A)$ liegt in $\mathcal{Q}^+$ oder in $-\mathcal{Q}^+$. Für jedes $\alpha \in \mathcal{Q}^+$ mit $\alpha = \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_k}$, $(i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\})$ wird der Unterraum $\mathfrak{g}_\alpha$ aufgespannt von allen Elementen der Form $[E_{j_1}[\ldots E_{j_k}]\ldots]$, wobei die Tupel $(j_1, \ldots, j_k)$ alle Permutationen von $(i_1, \ldots, i_k)$ durchlaufen. Die analogen Aussagen gelten für die α in $-\mathcal{Q}^+$.

Die Wurzelräume zu den **einfachen Wurzeln** *α_i, $1 \leq i \leq n$ sind eindimensional, und es gilt $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \mathbb{C} \cdot E_i$ und $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \mathbb{C} \cdot F_i$ für $1 \leq i \leq n$.*
Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist der Unterraum $\mathbb{C} \cdot H_i + \mathbb{C} \cdot E_i + \mathbb{C} \cdot F_i$ eine Lie Algebra, die kanonisch isomorph zu $sl(2, \mathbb{C})$ ist.

Die Kommutatorunteralgebra $\mathfrak{g}(A)' = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ *ist*
$\mathfrak{g}(A)' = \sum_{\beta \in \mathcal{Q}^+} \mathfrak{g}_{-\beta} \oplus \mathfrak{c}' \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}^+} \mathfrak{g}_\alpha$,
wobei $\mathfrak{c}' := \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot H_i$, *der Kommutator* $\mathfrak{g}(A)'$ *hat also Kodimension 1 in* $\mathfrak{g}(A)$.
Das Zentrum $\mathfrak{z}$ *von* $\mathfrak{g}(A)'$ *ist gleich dem Zentrum von* $\mathfrak{g}(A)$, *und es gilt*
$\mathfrak{z} = \{H \in \mathfrak{c} : \alpha_i(H) = 0 \;\forall\; 1 \leq i \leq n\}$.
$\mathfrak{z}$ *ist also eindimensionaler Unterraum von* $\mathfrak{c}$. ◊

Bemerkung 3.13 (i) Für die Lie Algebren $\mathfrak{g}(A)$ zu den Cartan Matrizen vom endlichen Typ gelten alle Aussagen analog. Allerdings ist das Zentrum von $\mathfrak{g}(A)$ trivial, da Π eine Basis des Duals von $\mathfrak{c}$ ist, und der Kommutator $\mathfrak{g}(A)'$ ist gleich $\mathfrak{g}(A)$, da wiederum $\{H_1, \ldots, H_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{c}$ ist.

(ii) Wenn A eine verallgemeinerte Cartan Matrix vom affinen Typ ist, so ist nach Satz 3.12 $\mathfrak{g}(A)$ nicht einfach, aber $\mathfrak{g}(A)'$ und $\mathfrak{z}$ sind die einzigen nicht trivialen Ideale von $\mathfrak{g}(A)$ (siehe [Wan], Proposition 1.10 A).

(iii) Die Linearkombination eines zentralen Elements $Z \neq 0$ des Zentrums $\mathfrak{z}$ von $\mathfrak{g}(A)$ aus Satz 3.12 ist von der Gestalt $Z = \sum_{i=1}^n c_i \cdot H_i$. Die Koeffizienten sind bis auf einen Skalar eindeutig bestimmt. Diese werden zum Beispiel in [Wan], Lemma 3.4 B hergeleitet. Für unsere Betrachtungen werden sie aber nicht benötigt.

(iv) Die Algebren $\mathfrak{g}(A)'/\mathfrak{z}$ zu den verallgemeinerten Cartan Matrizen vom affinen Typ haben Kodimension 2 in $\mathfrak{g}(A)$. Diese Algebren werden genau die polynomialen, getwisteten und ungetwisteten Loop Algebren, die wir im nächsten Abschnitt einführen. ◊

Für die Strukturtheorie der Lie Algebren $\mathfrak{g}(A)$ ist - wie auch für die endlichdimensionalen, einfachen Lie Algebren - eine assoziative, symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform sehr nützlich. In den endlichdimensionalen, einfachen Lie Algebren ist jede solche Bilinearform bekanntlich ein skalares Vielfaches der Killing Form.
Für die Lie Algebren $\mathfrak{g}(A)$ zu unzerlegbaren, verallgemeinerten Cartan Matrizen läßt sich eine Killing Form nicht analog erklären, da die Algebren $\mathfrak{g}(A)$ nur für die Cartan Matrizen vom endlichen Typ endlichdimensional sind.
Aber man hat nach einem Satz von Kac und Moody eine Klassifikation der verallgemeinerten Cartan Marizen, für welche auf den zugehörigen Kac-Moody-Algebren solche Bilinearformen existieren. Zunächst brauchen wir noch eine kurze Definition:

Definition 3.14 *Es sei* $\mathfrak{g}(A)$ *die Kac-Moody-Algebra zur verallgemeinerten Cartan Matrix A. Dann heißt ein Element* α *im Wurzelgitter* $\mathcal{Q} \setminus \{0\}$ *von* $\mathfrak{g}(A)$ *eine Wurzel, wenn der Unterraum* $\mathfrak{g}_\alpha$ *aus Satz 3.12 nicht trivial ist. Die Menge aller Wurzeln von* $\mathfrak{g}(A)$ *werde mit* Δ *bezeichnet.* $\Delta^+ := \Delta \cap \mathcal{Q}^+$ *und* $\Delta^- := \Delta \cap \mathcal{Q}^-$ *heißen die Mengen aller positiven beziehungsweise aller negativen Wurzeln.*

Nach Satz 3.12 haben wir für $\mathfrak{g}(A)$ die folgende direkte Zerlegung:

$$\mathfrak{g}(A) = \sum_{\beta \in \Delta^-} \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{c} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha \tag{3.4}$$

Nun kommen wir zu dem angekündigten Satz (siehe [Wan], Theorem 3.1 und 3.2)

Satz 3.15 *Es sei A eine verallgemeinerte Cartan Matrix. Es existiert auf der komplexen Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ genau dann eine assoziative, symmetrische Bilinearform, wenn A symmetrisierbar ist (siehe Definition 3.3 Teil (iv)). In diesem Fall gilt für jede solche Bilinearform $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathfrak{g}(A)$ und je zwei $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$ das folgende:*

$(X, Y) = 0$, für alle $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, falls $\alpha + \beta \neq 0$, und
$(\cdot,\cdot)$ ist eine nicht ausgeartete Paarung, wenn $\alpha + \beta = 0$ gilt.
Insbesondere ist die Einschränkung von $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathfrak{c}$ nicht ausgeartet.

Zwei assoziative, symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearformen auf $\mathfrak{g}(A)$ sind genau dann gleich, wenn ihre Einschränkungen auf $\mathfrak{c}$ übereinstimmen. $\diamondsuit$

Bemerkung 3.16 (i) Wenn $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine unzerlegbare, verallgemeinerte, **symmetrisierbare** Cartan Matrix ist, so ist in der Zerlegung $A = D \cdot B$ aus Definition 3.9 Teil (iv) die Diagonalmatrix D bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt. D kann als Diagonalmatrix $D = diag(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ mit $\epsilon_i \in \mathbb{Q}^+$, $1 \leq i \leq n$ gewählt werden (siehe [Wan], Lemma 2.4).

(ii) Mit einer fixierten Zerlegung der Matrix A - wie in Teil (i) beschrieben - wird eine assoziative, symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathfrak{g}(A)$ konstruiert, deren Einschränkung auf $\mathfrak{c}$ die folgende Gestalt hat ([Wan], Beweis von Theorem 3.1 sowie [Kac], Lemma 2.1 und Theorem 2.2):

Wir wählen zu $\mathfrak{c}' = \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot H_i$ ein Vektorraumkomplement $\mathfrak{c}''$ in der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$. Auf $\mathfrak{c}$ wird dann durch

$$\begin{array}{rcll} (H_j, H) & = & \alpha_j(H) \cdot \epsilon_j & \forall\, H \in \mathfrak{c},\ \forall\, j \in \{1, \ldots, n\} \\ (K, L) & = & 0 & \forall\, K, L \in \mathfrak{c}'' \end{array} \tag{3.5}$$

eine symmetrische, nichtausgeartete Bilinearform auf $\mathfrak{c}$ definiert. Dies ist also die Einschränkung einer assoziativen, symmetrischen, nicht ausgearteten Bilinearform auf $\mathfrak{g}(A)$; diese ist nach Satz 3.15 schon eindeutig.

Ähnlich wie in der klassischen Theorie wird nun ein Isomorphismus $\nu : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}^*$ definiert, vermöge $\nu(H)(K) = (H, K)$ für alle $H, K \in \mathfrak{c}$.
Mit diesem Isomorphismus ziehen wir die Bilinearform von $\mathfrak{c}$ auf $\mathfrak{c}^*$ zurück, gemäß $(\lambda, \mu) := (\nu^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\mu))$ für $\lambda, \mu \in \mathfrak{c}^*$.
Es gilt offenbar $\nu(H_i) = \epsilon_i \cdot \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Folglich haben wir
$(\alpha_i, \alpha_j) = (\frac{1}{\epsilon_i} H_i, \frac{1}{\epsilon_j} H_j) = \frac{1}{\epsilon_i \epsilon_j} \alpha_j(H_i) \cdot \epsilon_j = \frac{a_{ij}}{\epsilon_i}$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

(iii) Für die Bilinearform auf $\mathfrak{g}(A)$ aus Teil (ii) gelten die Gleichungen $[X, Y] = (X, Y) \cdot \nu^{-1}(\alpha)$ für jede Wurzel $\alpha \in \Delta$ und für alle $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ und $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

(iv) Mit der in Teil (ii) konstruierten Bilinearform auf $\mathfrak{c}^*$ erhalten wir die Cartan Matrix A wie in der klassischen Theorie der Wurzelsysteme zurück (siehe [Wan], Chapter 3.3):
$a_{ij} = \frac{2 \cdot (\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad i, j \in \{1, \ldots, n\}$. $\diamondsuit$

Jetzt können wir die für das nächste Kapitel wichtigen Weyl Gruppen der affinen Kac-Moody-Algebren einführen:

Definition 3.17 *Es sei A eine verallgemeinerte, symmetrisierbare Cartan Matrix und $(\mathfrak{c}, \Pi, \Pi^\vee)$ ihre minimale Realisierung. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei w_i die durch $w_i(\mu) := \mu - \mu(H_i) \cdot \alpha_i$ definierte Spiegelung $w_i : \mathfrak{c}^* \to \mathfrak{c}^*$. Die w_i heißen die Fundamentalspiegelungen.*
Die von der Menge $\{w_1, \ldots, w_n\}$ erzeugte Untergruppe $W = W(A)$ der Automorphismengruppe des Vektorraums $\mathfrak{c}^*$ heißt die Weyl Gruppe der Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$.
Weiterhin sei w_i^* $(1 \leq i \leq n)$ die durch $\mu(w_i^*(H)) = w_i(\mu)(H)$, $H \in \mathfrak{c}$, $\mu \in \mathfrak{c}^*$ definierte lineare Abbildung $w_i^* : \mathfrak{c} \to \mathfrak{c}$.

Es gilt dann (siehe [Wan], Chapter 4.2, Theorem 4.2) für die w_i^*:
$w_i^*(H) = H - \alpha_i(H) \cdot H_i$ für alle $H \in \mathfrak{c}$. Ferner ist $w_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij} \cdot \alpha_i$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, und die Weyl Gruppe läßt die Menge aller Wurzeln Δ invariant, und operiert treu auf dieser.
Die genauere Struktur der Weyl Gruppen werden wir in Kapitel 4 einführen, insbesondere die Einbettung der Weyl Gruppe in die Loop Gruppen.

3.2 Loop Algebren

In diesem Abschnitt werden wir die polynomialen Loop Algebren einführen, für die im nächsten Abschnitt unsere Iwasawa Zerlegung hergeleitet wird. Wir werden auch in groben Zügen darstellen, wie aus den ungetwisteten und getwisteten Loop Algebren alle affinen Kac-Moody-Algebren bis auf Isomorphie entstehen.

Proposition 3.18 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine einfache, komplexe Lie Algebra. Weiterhin sei $L(\mathfrak{l}) := \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{l}$ das Tensorprodukt der Algebra $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ aller Laurent Polynome in der Unbestimmten t mit $\mathfrak{l}$ über $\mathbb{C}$.*
Mit der Verknüpfung $[t^k \otimes X, t^m \otimes Y] := t^{k+m} \otimes [X, Y]$ wird $L(\mathfrak{l})$ eine Lie Algebra, die **polynomiale Loop Algebra** *über $\mathfrak{l}$.* $\diamondsuit$

Die Loop Algebra $L(\mathfrak{l})$ ist die direkte Summe aller Unterräume $t^k \otimes \mathfrak{l}$, $k \in \mathbb{Z}$, und $1 \otimes \mathfrak{l}$ ist eine Unteralgebra von $L(\mathfrak{l})$, die isomorph zu $\mathfrak{l}$ ist.

Die Lie Algebra $L(\mathfrak{l})$ ist auch kanonisch isomorph zum Vektorraum aller meromorphen Abbildungen der Riemnannschen Zahlenkugel S^2 nach $\mathfrak{l}$, welche Pole höchstens in 0 und ∞ besitzen. Dies sind genau die rationalen Funktionen von $\mathbb{C}$ nach $\mathfrak{l}$ mit Polen höchstens in 0. Konkret heißt dies: Wenn $\{X_1, \ldots, X_d\}$ eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathfrak{l}$ ist, so wird $L(\mathfrak{l})$ identifiziert mit

$$\Lambda^{pol}\mathfrak{l} \;:=\; \{g : \mathbb{C}^* \to \mathfrak{l},\; g(z) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,m} \cdot z^m \cdot X_i \;: \\ f_{i,m} = 0 \text{ für fast alle } m \in \mathbb{Z}\ \forall\, i\}. \tag{3.6}$$

vermöge $z^k \cdot X_i \mapsto t^k \otimes X_i$.
Eine Vektorraumbasis dieses Funktionenraums ist dabei $\{z^m \cdot X_i \;:\; m \in \mathbb{Z}, i \in \{1,\ldots,k\}\}$. Die Lie Klammer aus $L(\mathfrak{l})$ übertragen auf $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ mit obigem Isomorphismus ist genau die von $\mathfrak{l}$ kommende Lie Klammer punktweise auf dem Funktionenraum $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ ausgeführt.

Im nächsten Abschnitt werden wir allerdings die Lie Algebra $\mathfrak{l}$ lieber als Unteralgebra einer geeigneten $sl(n,\mathbb{C})$ betrachten. Dies ist stets möglich mit dem Satz von Ado (siehe zum Beispiel [HilNe], Chapter II, § 7, Satz 7.1). Damit wird $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ isomorph zu der einfacher zu handhabenden Algebra

$$\{g : \mathbb{C} \to sl(n,\mathbb{C}),\; g(z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^m \cdot g_m \;:\; g_m(z) \in \mathfrak{l},\, g_m = 0 \text{ für fast alle } m \in \mathbb{Z}\}.$$

Um zu den ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebren zu kommen, führen wir zunächst eine **Gradderivation** und einen nicht trivialen 2-Kocykel von $L(\mathfrak{l})$ ein (siehe [GoWal], § 1.1):

Proposition 3.19 *(i) Die durch $D : L(\mathfrak{l}) \to L(\mathfrak{l})$, $D(t^k \otimes X) := k \cdot t^k \otimes X$ definierte lineare Abbildung ist eine Derivation der Lie Algebra $L(\mathfrak{l})$.*

(ii) Es sei κ die Killing Form der Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Dann wird durch $(t^k \otimes X, t^m \otimes Y) := \delta_{k,-m} \cdot \kappa(X,Y)$ auf $L(\mathfrak{l})$ eine assoziative, symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform erklärt.

(iii) Die bilineare Abbildung $\psi : L(\mathfrak{l}) \times L(\mathfrak{l}) \to \mathbb{C}$, $\psi : (a,b) \mapsto (D(a),b)$ ist ein 2-Cocykel in die (abelsche) Lie Algebra $\mathbb{C}$, das heißt, für alle a,b,c in $L(\mathfrak{l})$ gilt $\psi(a,b) = -\psi(b,a)$ und $\psi([a,b],c) + \psi([b,c],a) + \psi([c,a],b) = 0$.

Bemerkung 3.20 Mit 2-Kozykeln lassen sich bekanntlich ([HilNe], Chapter II, § 4, Übung 1) zentrale Erweiterungen konstruieren. Für unsere Loop Algebra $L(\mathfrak{l})$ heißt dies konkret: Auf der direkten Summe von Vektorräumen $L(\mathfrak{l}) \oplus \mathbb{C} \cdot Z$ wird durch $[a + x \cdot Z, b + y \cdot Z] := [a,b] + \psi(a,b) \cdot Z$ eine Lie Klammer definiert. Die so konstruierte Lie Algebra ist genau dann isomorph zu einer trivialen, eindimensionalen Erweiterung von $L(\mathfrak{l})$, wenn eine lineare Abbildung $\lambda : L(\mathfrak{l}) \to \mathbb{C}$ exisiert, für welche $\psi(a,b) = \lambda([a,b])$ gilt für alle $a,b \in L(\mathfrak{l})$. Dies ist für unseren 2-Kozykel ψ nicht der Fall.

Die Lie Algebra $\tilde{L}(\mathfrak{l}) := L(\mathfrak{l}) \oplus \mathbb{C} \cdot Z$ ist also eine nicht triviale, zentrale Erweiterung von $L(\mathfrak{l})$. (siehe wieder [GoWal], § 1.1)) $\diamondsuit$

Den folgenden Satz zitieren wir aus [Wan], Lemma 7.1 D, Proposition 7.1 B:

Satz 3.21 *Durch die Festsetzung $D(Z) = 0$ wird die Derivation D von $L(\mathfrak{l})$ fortgesetzt zu einer Derivation von $\tilde{L}(\mathfrak{l}) = L(\mathfrak{l}) + \mathbb{C} \cdot Z$.*
In dem resultierenden, semidirekten Produkt $\hat{L}(\mathfrak{l}) := \tilde{L}(\mathfrak{l}) \rtimes (\mathbb{C} \cdot D)$ ist die Lie Klammer gegeben durch

$$[t^k \otimes X + x_1 Z + x_2 D \quad , \quad t^m \otimes Y + y_1 Z + y_2 D] = \tag{3.7}$$
$$t^{k+m} \otimes [X,Y] + k \cdot \delta_{k,-m} \cdot \kappa(X,Y) \cdot Z \quad + \quad (x_2 m) \cdot t^m \otimes Y - (y_2 k) \cdot t^k \otimes X$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{l}$, $k, m \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C} \cdot Z$ ist das Zentrum der Lie Algebra $L(\mathfrak{l})$ und ihres Kommutators $\hat{L}(\mathfrak{l})'$. Dieser ist gleich der Algebra $\tilde{L}(\mathfrak{l}) = L(\mathfrak{l}) + \mathbb{C} \cdot Z$. $\diamondsuit$

Bevor wir zu den getwisteten Loop Algebren übergehen, ist noch die Wurzelraumzerlegung der konstruierten Lie Algebra $L(\mathfrak{l})$ zu klären. Dazu geben wir uns eine Cartan Unteralgebra $\mathfrak{a}$ der zugrundeliegenden Lie Algebra $\mathfrak{l}$ vor mit zugehörigem Wurzelsystem Δ° und Wurzelräumen $\mathfrak{l}_\alpha \quad (\alpha \in \Delta^\circ)$.
Dann ist $\mathfrak{c} := 1 \otimes \mathfrak{a} + \mathbb{C} \cdot Z + \mathbb{C} \cdot D$ eine abelsche Unteralgebra von $\hat{L}(\mathfrak{l})$. Bezüglich dieser besitzt $\hat{L}(\mathfrak{l})$ eine Wurzelraumzerlegung:
Wir definieren eine Linearform δ auf $\mathfrak{c}$ via
$\delta(1 \otimes \mathfrak{a}) = \{0\}$, $\delta(Z) = 0$ und $\delta(D) = 1$. Dann gilt (siehe [GoWal], § 1.1 Seite 76):

Proposition 3.22 *$\mathfrak{c}$ operiert via ad diagonal auf $\hat{L}(\mathfrak{l})$ und ist maximal abelsch. Die Wurzelräume in $\hat{L}(\mathfrak{l})$ bezüglich $\mathfrak{c}$ sind $t^k \otimes \mathfrak{l}_\alpha$ zu den Wurzeln $\alpha + k \cdot \delta$, $(\alpha \in \Delta^\circ,\ k \in \mathbb{Z})$, sowie $t^m \otimes \mathfrak{c}$ zu den Wurzeln $m \cdot \delta$ mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, wobei $\alpha \in \Delta^\circ$ via $\alpha(Z) = \alpha(D) = 0$ auf $\mathfrak{c}$ fortgesetzt wird.*

Die Menge aller Wurzeln ist also
$\Delta = \{\alpha + k \cdot \delta : \alpha \in \Delta^\circ,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{m \cdot \delta : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.
Wenn $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ ein Satz einfacher Wurzeln in Δ° ist mit der höchsten Wurzel θ, so wird $\{\alpha_0 := \delta - \theta,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ eine Basis des Wurzelsystems Δ mit zugehörigen positiven Wurzeln $\Delta^+ = \{\alpha + n \cdot \delta : n \in \mathbb{N},\ \alpha \in \Delta^\circ\} \cup \{n \cdot \delta : n \in \mathbb{N}\} \cup (\Delta^\circ)^+$, wobei $(\Delta^\circ)^+$ die positiven Wurzeln von Δ° bezüglich der gewählten Basis sind. $\diamondsuit$

Bemerkung 3.23 (i) Die Dimensionen aller Wurzelräume zu den Wurzeln $\alpha + k \cdot \delta \in \Delta$ sind stets gleich eins, wohingegen die Dimension der Wurzelräume zu den Wurzeln $m \cdot \delta \in \Delta$ gleich der Dimension der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{l}$ sind, also gleich l.

(ii) Die Lie Algebren $\hat{L}(\mathfrak{l})$ zu den einfachen, komplexen Lie Algebren $\mathfrak{l}$ sind genau die Kac-Moody-Algebren zu den affinen Cartan Matrizen in Tabelle (Aff 1) in [Kac], § 4.8. Diese Cartan Matrizen werden in der Literatur üblicherweise mit $X_l^{(1)}$ bezeichnet, wobei X_l der Platzhalter für die zugrundeliegende, einfache Lie Algebra $(A_l, \ldots, G_2)$ ist.
Das Dynkin Diagramm der Cartan Matrix zu der Lie Algebra $\hat{L}(\mathfrak{l})$ ist genau das bekannte erweiterte Dynkin Diagramm der Lie Algebra $\mathfrak{l}$. $\diamondsuit$

Nun kommen wir zu den getwisteten Loop Algebren:

Lemma 3.24 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine einfache, komplexe Lie Algebra und σ ein Automorphismus von $\mathfrak{l}$ der Ordnung $m < \infty$. Weiter sei $\epsilon := \exp(\frac{2\pi i}{m})$ gesetzt. Dann wird auf der Lie Algebra $L(\mathfrak{l})$ ein Automorphismus $\hat{\sigma}$ definiert durch $\hat{\sigma}(t^k \otimes X) = \epsilon^{-k} \cdot t^k \otimes \sigma(X) \quad (k \in \mathbb{Z},\ X \in \mathfrak{l})$. Dieser hat wieder die Ordnung m.*

Definition 3.25 *Die Fixpunktalgebra $L(\mathfrak{l}, \sigma) := \{a \in L(\mathfrak{l}) : \hat{\sigma}(a) = a\}$ von $\hat{\sigma}$ in $L(\mathfrak{l})$ heißt die mit σ getwistete Loop Algebra.*

Diese getwisteten Loop Algebren sind einfach darzustellen: Da der Automorphismus σ von $\mathfrak{l}$ endliche Ordnung hat, zerlegt sich $\mathfrak{l}$ in die direkte Summe der Eigenräume von σ. Die Eigenwerte von σ sind eine Teilmenge von $\{\epsilon^k : 0 \leq k \leq m-1\}$. Da ϵ^k nur von der Restklasse $\bar{k} = k + m \cdot \mathbb{Z}$ abhängt, können wir den Eigenraum von σ zum Eigenwert ϵ^k mit $\mathfrak{l}_{\bar{k}}$ benennen. Damit gilt offenbar

$$L(\mathfrak{l}, \sigma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} t^k \otimes \mathfrak{l}_{\bar{k}} \tag{3.8}$$

Um die verbleibenden, affinen Kac-Moody-Algebren durch getwistete Loop Algebren zu realisieren, können wir uns auf bestimmte Twistungsautomorphismen beschränken, aufgrund der folgenden Aussage (siehe [Kac], Propsition 8.1 und Proposition 8.5):

Satz 3.26 *Es seien σ und τ zwei Automorphismen der komplexen, einfachen Lie Algebra $\mathfrak{l}$, die in derselben Linksnebenklasse von $Int(\mathfrak{l})$ in $Aut(\mathfrak{l})$ liegen, das heißt in derselben Zusammenhangskomponente von $Aut(\mathfrak{l})$. Dann sind die getwisteten Loop Algebren $L(\mathfrak{l}, \sigma)$ und $L(\mathfrak{l}, \tau)$ isomorph.* $\diamondsuit$

Bemerkung 3.27 (i) Ein Vertretersystem der Links- (und Rechts-) Nebenklassen der inneren Automorphismen einer einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$ sind bekanntlich die sogenannten Diagramm-Automorphismen, das heißt die Automorphismen von $\mathfrak{l}$, welche sich aus den Automorphismen des Dynkin Diagramms von $\mathfrak{l}$ konstruieren lassen (siehe [Helg], Chapter X, § 5, Theorem 5.13). Die einzigen Dynkin Diagramme mit nicht trivialer Gruppe $\mathcal{E}$ solcher Diagramm Automorphismen sind: $A_l,\ l \geq 2$ mit $|\mathcal{E}| = 2$, $D_l,\ l \geq 5$ mit $|\mathcal{E}| = 2$, D_4 mit $\mathcal{E} \simeq S_4$ und E_6 mit $|\mathcal{E}| = 2$. Es treten also nur Diagramm- Automorphismen mit Ordnung 2 und 3 auf.

(ii) Die Konstruktion der Isomorphismen aus Satz 3.26 läßt sich einfach durchführen, wenn der innere Automorphismus ι mit $\sigma = \tau \circ \iota$ geeignet gewählt wurde.

(iii) Es ist nach Konstruktion $L(\mathfrak{l}, \sigma)$ eine Unteralgebra von $L(\mathfrak{l})$, und diese Unteralgebra der Kac-Moody-Algebra $\hat{L}(\mathfrak{l})$ aus Satz 3.21. Mit den Gleichungen (3.7) zeigt man sofort, daß

$$\hat{L}(\mathfrak{l}, \sigma) := L(\mathfrak{l}, \sigma) + \mathbb{C} \cdot Z + \mathbb{C} \cdot D \tag{3.9}$$

eine Lie Algebra wird. Für diese gelten die analogen Aussagen aus Satz 3.21.

(iv) Wie in [Kac], Chapter 8.1, 8.2 und 8.3 gezeigt, sind die Algebren $\hat{L}(\mathfrak{l}, \mu)$ Realisierungen der verbleibenden Kac-Moody-Algebren von affinen Typ, sofern μ die nicht trivialen Diagramm-Automorphismen von $\mathfrak{l}$ durchläuft.

3.3 Die Iwasawa Zerlegung in polynomialen Loop Algebren

Nun kommen wir schließlich zu unserer Iwasawa Zerlegung in getwisteten, polynomialen Loop Algebren. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß sich diese Zerlegung kanonisch auf Vervollständigungen der getwisteten Loop Algebren $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ fortsetzt.

Bezeichnungen:
Für den Rest dieses Kapitels bezeichne $\mathfrak{g}$ eine reelle, halbeinfache Lie Algebra, und $\mathfrak{l} := \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sei ihre Komplexifizierung. Die Konjugation von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{g}$ heiße τ. Weiterhin sei σ ein Automorphismus der Ordnung 2 von $\mathfrak{g}$. Wie in Kapitel 1 bezeichne $\mathfrak{h}$ die Fixpunktalgebra von σ in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{q}$ den (-1)-Eigeneraum von σ. Die $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung von σ auf $\mathfrak{l}$ werde ebenfalls mit σ bezeichnet. ♢

Die getwistete Loop Algebra, für welche wir die Iwasawa Zerlegung entwickeln, ist die mit σ getwistete, polynomiale Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$, das heißt die Fixpunktalgebra von $\hat{\sigma}$ in $L(\mathfrak{l})$ aus Definition 3.25, das ist die Algebra

$$\begin{aligned}\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma &= \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l} \,:\, \hat{\sigma}(g) = g\} = \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l} \,:\, \sigma(g(z)) = g(-z)\ \forall z \in \mathbb{C}^*\} = \\ &= \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l},\ g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \cdot z^m \,:\, g_{2k} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, g_{2k+1} \in \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}\ \forall k \in \mathbb{Z}\} \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Diese Darstellung von $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ ist klar nach Gleichnung (3.8).

Die Komplexkonjugation von $\mathfrak{l}$ bezüglich $\mathfrak{g}$ können wir auf die Funktionenräume $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ und $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ fortsetzen. Punktweise läßt sich τ nicht fortsetzen:

Definition 3.28 *Es sei $\hat{\tau}$ die durch $(\hat{\tau}\, g)(z) := \tau(g(\frac{1}{\bar{z}}))$, $g \in \mathfrak{l}$ auf $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ definierte, reelle Involution. Der Fixpunktraum von $\hat{\tau}$ werde mit $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}$ bezeichnet.*

Auf den Unterräumen $z^m \cdot X$ operiert $\hat{\tau}$ wie folgt: $\hat{\tau}(z^m \cdot X) = \tau((\frac{1}{\bar{z}})^m \cdot X) = (\frac{1}{z})^m \cdot \tau(X) = z^{-m} \cdot \tau(X)$, da τ eine $\mathbb{C}$-antilineare Involution ist.

Bemerkung 3.29 (i) Die Einschränkung der Involution $\hat{\tau}$ auf die konstanten Loops, das ist die zu $\mathfrak{l}$ isomorphe Unteralgebra $z^0 \cdot \mathfrak{l}$, stimmt mit der Komplexkonjugation τ auf $\mathfrak{l}$ überein.

(ii) Die Einschränkung der Loops aus $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ auf den Einheitskreis S^1 in $\mathbb{C}$ ist eine $\mathbb{C}$-lineare, bijektive Abbildung auf die Menge aller Abbildungen $f : S^1 \to \mathfrak{l}$ der

Gestalt $f(\lambda) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \cdot \lambda^m$, $\lambda \in S^1$ und $g_m = 0$ für fast alle $m \in \mathbb{Z}$. Der Transport der oben definierten Involution $\hat{\tau}$ auf diese **polynomiale Loop Algebra** ist die punktweise Fortsetzung der Konjugation τ von $\mathfrak{l}$, da $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$ gilt für alle $\lambda \in S^1$. $\diamondsuit$

Proposition 3.30 *Die in Definition 3.28 erklärte Involution $\hat{\tau}$ ist ein $\mathbb{C}$-antilinearer Automorphismus von $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$. Er vertausch mit $\hat{\sigma}$, läßt also $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ invariant. Es gelten die folgenden Darstellungen der Fixpunktalgebren von $\hat{\tau}$ in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ und $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$:*

$$\begin{array}{rcl} \Lambda^{pol}\mathfrak{g} & = & \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l} \; : \; g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \cdot z^m \; : \; \tau(g_m) = g_{-m} \; \forall\, m \in \mathbb{Z}\} \\ \Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma & = & \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma \; : \; g = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m \cdot z^m \; : \; \tau(g_m) = g_{-m} \; \forall\, m \in \mathbb{Z}\}. \end{array} \tag{3.11}$$

Beweis: Die Darstellung von $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}$ und $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma$ sind klar, nach der Definition von $\hat{\tau}$. Die Vertauschbarkeit von $\hat{\sigma}$ und $\hat{\tau}$ folgt dierkt aus der Vertauschbarkeit der Involutionen σ und τ auf der Lie Algebra $\mathfrak{l}$, indem man die Bilder der Räume $z^m \cdot \mathfrak{l}$ unter $\hat{\tau}$ und $\hat{\sigma}$ berechnet. $\diamondsuit$

Unser Ziel ist, eine zu $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma$ komplementäre Unteralgebra in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ zu konstruieren. Ein geeigneter Kandidat hierfür ist die folgende Unteralgebra:

Definition 3.31 *Es bezeichne $\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}$ beziehungsweise $\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma$ die Menge aller Loops in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ beziehungsweise $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$, welche eine holomorphe Fortsetzung in* 0 *besitzen.*

Proposition 3.32 *Die Teilmengen $\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}$ beziehungsweise $\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma$ sind $\mathbb{C}$-Unteralgebren von $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ beziehungsweise $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$. Es gilt*

$$\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma = \{g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma \; : \; g(z) = \sum_{m\geq 0} g_m \cdot z^m\}. \tag{3.12}$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz 3.33 *Es gilt für die getwistete Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$.*

$$\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma = \Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma + \Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma \tag{3.13}$$

Der Schnitt der beiden Unteralgebren ist der Unterraum aller τ-fixen, konstanten Loops in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$, das ist die reduktive Lie Algebra $\mathfrak{h}$.

Beweis: Es sei $X \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ und $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq 0$ gerade. Dann ist $z^m \cdot X$ in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$, und es gilt $z^m \cdot X = (z^{-m} \cdot \tau(X) + z^m \cdot X) - z^{-m} \cdot \tau(X) \in \Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma + \Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma$. Das Element $z^{-m} \cdot X$ liegt bereits in $\Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma$. Die analogen Aussagen gelten für die ungeraden, negativen Zahlen m. Da unsere Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ gleich der direkten Summe der Unterräume $\{z^k \cdot \mathfrak{h}^{\mathbb{C}},\ k \in \mathbb{Z} \text{ gerade}\}$ und $\{z^m \cdot \mathfrak{q}^{\mathbb{C}},\ m \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}\}$ ist, folgt der erste Teil der Behauptung.

Ein Loop g im Schnitt der beiden betrachteten Unteralgebren hat die Entwicklung $g(z) = \sum_{m \geq 0} g_m \cdot z^m$, und es gilt $g(z) = \hat{\tau}(g)(z) = \sum_{m \geq 0} \tau(g_m) \cdot z^{-m}$. Damit gilt $g_m = 0$ für alle $m > 0$ und $g_0 = \tau(g_0)$, folglich ist $g_0 \in Fix_\tau(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}$. Die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ liegt offensichtlich auch im Schnitt der Unteralgebren. $\diamondsuit$

Um nun eine komplementäre Unteralgebra zu $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma$ in $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ zu konstruieren, werden wir zunächst eine reelle, zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ wählen.

Proposition 3.34 *Es existiert eine reelle Unteralgebra* $\mathfrak{u}$ *von* $(\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}}$*, die komplementär ist zu* $\mathfrak{h}$*, das heißt* $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}$.

Beweis: Wie wir in Bemerkung 1.39 Teil (iii) zitiert haben, ist die Unteralgebra $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ reduktiv, zerfällt also in die direkte Summe aus seinem Zentrum $\mathfrak{z}$ und dem halbeinfachen Ideal $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]$. τ läßt das Zentrum invariant, und die Fixpunktalgebra $\mathfrak{z}_{\mathbb{R}}$ der Einschränkung von τ auf $\mathfrak{z}$ ist eine reelle Form von $\mathfrak{z}$. Die Fixpunkalgebra der Einschränkung von τ auf $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]$ ist genau $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Dies ist also eine reelle Form der halbeinfachen, komplexen Algebra $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]$. Zu dieser können wir nach Korollar 1.77 eine (auflösbare,reelle) komplementäre Unteralgebra $\mathfrak{s}$ in $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}]$ konstruieren. Dann ist $\mathfrak{u} := i \cdot \mathfrak{z}_{\mathbb{R}} + \mathfrak{s}$ eine zu $\mathfrak{h}$ komplementäre Unteralgebra in $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. $\diamondsuit$

Jetzt können wir auch in unserer getwisteten Loop Algebra die gesuchte, komplementäre Unteralgebra konstruieren:

Satz 3.35 *Der Unterraum* $\Lambda^{pol+}_{\mathfrak{u}}\mathfrak{l}_\sigma := \{g \in \Lambda^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma : g(0) \in \mathfrak{u}\}$ *ist eine reelle Unteralgebra von* $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$*. Die getwistete Loop Algebra* $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ *ist gleich der direkten Summe aus* $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}_\sigma$ *und* $\Lambda^{pol+}_{\mathfrak{u}}\mathfrak{l}_\sigma$. $\diamondsuit$

3.4 Vervollständigungen

In diesem letzten Abschnitt des Kapitels werden wir die in Kapitel 3.3 gewonnene Iwasawa Zerlegung in den polynomialen, getwisteten Loop Algebren auf Vervollständigungen erweitern. Um diese Vervollständigungen zu erhalten, müssen wir zunächst die in der Literatur bekannten, gewichteten Wiener Algebren einführen. Diese werden uns im Teilabschnitt 3.4.2 Normen auf polynomialen Loop Algebren liefern. Mit diesen Normen werden wir im nächsten Kapitel auch die Loop Gruppen definieren, für welche dann die globale Iwasawa Zerlegung entwickelt wird.

Im letzten Teilabschnitt werden wir zeigen, daß die Abschlüsse der komplementären Unteralgebren aus Satz 3.35 komplementär bleiben in der Vervollständigung $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ von $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$.

3.4.1 Gewichtete Wiener Algebren

Die gewichteten Wiener Algebren sind Vektorräume von stetigen Abbildungen $S^1 \to \mathbb{C}$, welche über eine „gewichtete" Norm mittels der zugehörigen Fourier Reihen erklärt sind.
Zunächst beschäftigen wir uns mit Gewichten. Eine knappe Einführung zum Inhalt dieses Teilabschnitts findet sich in [GoWal], Appendix A. 1 und in [DoGrSzm], Abschnitt 1.1.

Definition 3.36 *Eine Abbildung $w : \mathbb{Z} \to]0, \infty[$ heißt Gewicht, wenn $w(k+l) \leq w(k) \cdot w(l)$ gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$.*
Ein Gewicht w heißt symmetrisch, wenn $w(k) = w(-k)$ gilt für alle k in $\mathbb{Z}$.
Ein Gewicht w heißt vom nicht analytischen Typ, wenn $lim_{n\to\infty} w(n)^{\frac{1}{n}} = 1$ gilt.

Nun haben wir die folgenden einfachen Aussagen über Gewichte:

Proposition 3.37 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht. Dann gilt*

(i) $\sqrt{w(0)} \leq w(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
(ii) $1 \leq w(n)^{\frac{1}{n}} \leq w(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis: Wegen der Symmetrie von w gilt $(w(n))^2 = w(n) \cdot w(-n) \geq w(0)$, das zeigt den Teil (i).

Mit Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ erhält man $w(nk) \leq w(k)^n$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere folgt $w(n)^{\frac{1}{n}} \leq w(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ferner haben wir $w(1) = w(0+1) \leq w(0) \cdot w(1)$, also $1 \leq w(0)$. Damit folgt mit (i) auch Teil (ii). ♢

Die wichtigsten **Beispielklassen** für symmetrische Gewichte sind die folgenden:

$$w_{a,t}(n) = (1 + |n|)^a \cdot \exp(t \cdot |n|) \quad a \geq 0,\ t \geq 0,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.14}$$
$$w^{(t,s)}(n) = \exp(t \cdot |n|^s) \quad t > 0,\ 0 < s < 1,\ n \in \mathbb{Z} \tag{3.15}$$

Nachweis: Die Abbildungen aus Gleichung (3.14) sind Gewichte, da $(1 + |k + l|)^a \leq (1 + |k| + |l| + |k \cdot l|)^a = (1 + |k|)^a \cdot (1 + |l|)^a$.
Die Abbildungen aus Gleichung (3.15) sind Gewichte, da $|k+l|^s \leq |k|^s + |l|^s$ gilt für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ und $0 < s \leq 1$.
Die Gewichte in Gleichung (3.14) heißen *exponential-polynomiale Gewichte*. Sie sind genau dann vom nicht analytischen Typ, wenn $t = 0$ gilt.
Die Gewichte in Gleichung (3.15) heißen die Gewichte der „Gevrey Klasse". Sie sind stets vom nicht analytischen Typ.

Nun können wir die Wiener Algebren einführen:

Definition 3.38 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht. Dann heißt der Funktionenraum*

$$\mathcal{A}_w := \{f : S^1 \to \mathbb{C} : f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \lambda^n : \|f\|_w := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \cdot w(n) < \infty\} \qquad (3.16)$$

die gewichtete Wiener Algebra zum Gewicht w.

Jetzt folgen die ersten, entscheidenden Aussagen über die Wiener Algebren:

Satz 3.39 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht. Dann ist die Wiener Algebra $\mathcal{A}_w$ unter punktweiser Addition und Multiplikation eine kommutative Banach* Algebra mit Norm $\|\cdot\|_w$, das heißt $(\mathcal{A}_w, \|\cdot\|_w)$ ist ein vollständiger $\mathbb{C}$-Vektorraum, und es gilt $\|f\cdot g\|_w \leq \|f\|_w \cdot \|g\|_w$ sowie $\|\bar{f}\|_w = \|f\|_w$ für alle $f, g \in \mathcal{A}_w$.*

Weiterhin gelten für jedes $f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \lambda^n \in \mathcal{A}_w$ die Ungleichungen $\|f\|_\infty \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| \leq \frac{1}{\sqrt{w(0)}} \cdot \|f\|_w < \infty$.

Insbesondere besteht $\mathcal{A}_w$ nur aus stetigen Abbildungen $S^1 \to \mathbb{C}$. $\diamondsuit$

Bemerkung 3.40 (i) Die Submultiplikativität der Norm auf $\mathcal{A}_w$ leitet sich aus der definierenden Eigenschaft für Gewichte her. Die Normerhaltung unter Komplexkonjugation ist genau die Symmetrie des Gewichts w.

(ii) Zum Beweis der Vollständigkeit von $\mathcal{A}_w$ siehe [GoWal], Appendix A. 1.

(iii) Der Vektorraum aller Laurent Polynome auf S^1, das ist $\{f : S^1 \to \mathbb{C} : f(\lambda) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\lambda^n : a_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}$ liegt offenbar in $\mathcal{A}_w$ für jedes symmetrische Gewicht w und liegt dicht in $\mathcal{A}_w$.

(iv) Die Normabschätzungen in Satz 3.39 zeigen, daß die Einbettungsabbildung von $\mathcal{A}_w$ in den vollständigen Raum $\mathcal{C}(S^1)$ aller stetigen Abbildungen $S^1 \to \mathbb{C}$ (versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$) stetig ist. $\diamondsuit$

Zuletzt klären wir noch die Bedeutung der Gewichte vom nicht analytischen Typ für die zugehörigen Wiener Algebren:

Proposition 3.41 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht vom nicht analytischen Typ. Dann liegt für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus S^1$ die Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ in $\mathcal{A}_w$.*
Insbesondere liegt die Menge aller rationalen Funktionen $\{f(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} : p, q \text{ Polynome}, \ q(\lambda) \neq 0 \ \forall \lambda \in S^1\}$ auf S^1 in $\mathcal{A}_w$.

Beweis: Wenn $|z| < 1$ ist, so entwickeln wir die in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion $\lambda \mapsto (\lambda - z)^{-1}$ in die Laurent Reihe mit Konvergenzbereich $|\lambda| > |z|$.
Das heißt es gilt $(\lambda - z)^{-1} = \sum_{k\leq -1} z^{-k-1} \cdot \lambda^k, \ |\lambda| > |z|$.
Dann gilt $\|(\lambda - z)^{-1}\|_w = \sum_{k\leq -1} |z|^{-k-1} \cdot w(k) = \sum_{k\geq 1} |z|^{k-1} \cdot w(k)$. Mit dem Wurzelkriterium erhalten wir die Konvergenz der letzten Reihe, da w vom nicht analytischen Typ ist: $lim_{k\to\infty}(|z|^{k-1} \cdot w(k))^{\frac{1}{k}} = |z| \cdot lim_{k\to\infty} w(k)^{\frac{1}{k}} = |z| < 1$.

Der Fall $|z| > 1$ läuft analog: Es wird die Funktion $(\lambda - z)^{-1}$ in die Potenzreihe in λ um 0 entwickelt. $\diamondsuit$

Die wesentliche Konsequenz dieser Proposition ist folgender Satz (siehe [Gok],Chapter I, Seite 70)

Satz 3.42 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht vom nicht analytischen Typ. Dann besteht die Gruppe $\mathcal{A}_w^*$ aller in $\mathcal{A}_w$ invertierbaren Elemente genau aus allen, auf S^1 nullstellenfreien Abbildungen in $\mathcal{A}_w$.* $\diamondsuit$

Wegen dieser Eigenschaft der **symmetrischen Gewichte vom nicht analytischen Typ** werden wir **ab jetzt** nur mit solchen Gewichten arbeiten.
Zuletzt betrachten wir noch drei Projektoren von $\mathcal{A}_w$, die im letzten Abschnitt für uns wichtig werden:

Proposition 3.43 *Es sei $\mathcal{A}_w$ die Wiener Algebra zum symmetrischen Gewicht w. Dann werden durch*

$$(\pi_+ f)(\lambda) := \sum_{k>0} a_k \cdot \lambda^k, \qquad (\pi_- f)(\lambda) := \sum_{k<0} a_k \cdot \lambda^k, \qquad (\pi_0 f)(\lambda) := a_0$$

($f(\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \cdot \lambda^k \in \mathcal{A}_w$) drei Projektoren von $\mathcal{A}_w$ definiert. Diese sind beschränkt mit (Operator-)Norm 1, insbesondere sind sie stetig.
Die Bilder der Projektoren sind also abgeschlossene Unterräume von $\mathcal{A}_w$. Es gilt $\pi_+ + \pi_- + \pi_0 = id$. $\diamondsuit$

3.4.2 Die Banach* Lie Algebra $sl(n, \mathcal{A}_w)$

Mit den im letzten Teilabschnitt (3.4.1) eingeführten Wiener Algebren $\mathcal{A}_w$ werden wir nun die Banach* Lie Algebra $sl(n, \mathcal{A}_w)$ definieren.
Zunächst betrachten wir das Tensorprodukt aus $\mathcal{A}_w$ mit der Algebra aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{C}$:

Lemma 3.44 *Es sei w ein symmetrisches Gewicht vom nicht analytischen Typ. Dann ist das Tensorprodukt $Mat_n(\mathcal{A}_w) := Mat_n(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{A}_w$ eine Banach* Algebra bezüglich der Norm $\|A\|_w := \sqrt{\sum_{i,j} \|a_{ij}\|_w^2}$ und dem * Operator $A^* = \bar{A}^t$, $A \in sl(n, \mathcal{A}_w)$, das heißt $(Mat_n(\mathcal{A}_w), \|\cdot\|_w)$ ist ein normierter, vollständiger $\mathbb{C}$-Vektorraum von stetigen Abbildungen $S^1 \to Mat_n(\mathbb{C})$, und es gilt $\|A(\lambda) \cdot B(\lambda)\|_w \leq \|A(\lambda)\|_w \cdot \|B(\lambda)\|_w$ sowie $\|A(\lambda)^*\|_w = \|A(\lambda)\|_w$ für alle $A(\lambda)$, $B(\lambda) \in Mat_n(\mathcal{A}_w)$.* $\diamondsuit$

Bemerkung 3.45 Nach Satz 3.42 und der Cramerschen Regel ist ein $A(\lambda)$ aus $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ genau dann invertierbar in $Mat_n(\mathcal{A}_w)$, wenn $det\, A(\lambda) \neq 0$ für alle $\lambda \in S^1$. $\diamondsuit$

Die Spurabbildung $Spur : Mat_n(\mathcal{A}_w) \to \mathcal{A}_w$ ist stetig, wegen folgender Ungleichung:

$$\|Spur A\|_w \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_{ii}\|_w \leq \sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_w \leq K \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_w^2} = K \cdot \|A\|_w$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten K.
Damit bekommen wir schließlich die gewünschte Lie Algebra
(siehe [GoWal], Appendix A. 1):

Proposition 3.46 *Der Unterraum* $sl(n, \mathcal{A}_w) := \{A \in Mat_n(\mathcal{A}_w) : Spur\, A = 0\}$ *ist abgeschlossen in* $Mat_n(\mathcal{A}_w)$*. Mit dem punktweise definierten Kommutator* $[A, B](\lambda) = [A(\lambda), B(\lambda)]$ *und der auf* $sl(n, \mathcal{A}_w)$ *eingeschränkten Norm gilt* $\|[A, B]\|_w \leq 2 \cdot \|A\|_w \cdot \|B\|_w$*. Die Projektoren* π_+, π_- *und* π_0 *aus Proposition 3.43 werden auf* $sl(n, \mathcal{A}_w)$ *fortgesetzt zu beschränkten Operatoren durch punktweise Anwendung auf die Matrixeinträge. Insbesondere sind die Bilder von* π_+, π_- *und* π_0 *auf* $sl(n, \mathcal{A}_w)$ *abgeschlossene Unteralgebren.* $\diamondsuit$

Jetzt können wir unsere polynomialen Loop Algebren $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ und $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}_\sigma$ aus Abschnitt 3.2 vervollständigen:

3.4.3 Die Iwasawa Zerlegung in $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$

Wir kehren nun zurück zu unserer einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{l}$. Diese betten wir in eine geeignete Lie Algebra $sl(n, \mathbb{C})$ ein und definieren:

$\Lambda\mathfrak{l} := \{A \in sl(n, \mathcal{A}_w) : A(\lambda) \in \mathfrak{l}\ \forall\, \lambda \in S^1\}$,

wobei w ein symmetrisches Gewicht vom nicht analytischen Typ sei.
Wir haben nun die folgende Darstellung für $\Lambda\mathfrak{l}$:

Proposition 3.47 *Ein* $A = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \cdot \lambda^n$ *aus* $sl(n, \mathcal{A}_w)$ *liegt genau dann in* $\Lambda\mathfrak{l}$*, wenn* $A_n \in \mathfrak{l}$ *gilt für alle* $n \in \mathbb{Z}$*.*
$\Lambda\mathfrak{l}$ *ist eine abgeschlossene Unteralgebra von* $sl(n, \mathcal{A}_w)$*.*

Beweis: Die Lie Algebra $\mathfrak{l}$ ist ein komplexer Unterraum von $sl(n, \mathbb{C})$. Daher existieren komplexe Zahlen $x_{ij}^{(k)}$, $1 \leq i, j \leq n$, $1 \leq k \leq l$ derart, daß für ein $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in sl(n, \mathbb{C})$ gilt:
$B \in \mathfrak{l}$ genau dann, wenn $\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \cdot b_{ij} = 0\ \forall\, k = 1, \ldots, l$.
Ist nun $A = A(\lambda) \in \Lambda\mathfrak{l}$, so gilt nach Definition
$0 = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \cdot a_{ij}(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{ij}^{m} \cdot \lambda^m = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^{(k)} \cdot a_{ij}^{m}) \cdot \lambda^m$
für alle $\lambda \in S^1$ und $k \in \{1, \ldots, l\}$. Dies heißt wiederum, daß die Koeffizienten A_m der Fourier Reihe von A in $\mathfrak{l}$ liegen für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Die Vollständigkeit von $\Lambda\mathfrak{l}$ bezüglich der Norm von $sl(n, \mathcal{A}_w)$ folgt, da die Koeffizientenmatrizen $A_m^{(p)}$, $m \in \mathbb{Z}$ einer Cauchy-Folge $(A^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ selbst Cauchy-Folgen in $sl(n,\mathbb{C})$ sind. $\diamondsuit$

Nun können wir uns im weiteren auf die Untersuchung der in $sl(n,\mathcal{A}_w)$ eingebetteten, vollständigen Banach Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}$ beschränken.

Betrachten wir zunächst noch einmal die in Kapitel 3.3 eingeführten, polynomialen Loop Algebren $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$. Wie in Bemerkung 3.29 Teil (ii) erklärt, ist die Einschränkungsabbildung $g \in \Lambda^{pol}\mathfrak{l} \mapsto g|_{S^1}$ bijektiv. Das Bild ist die Menge aller polynomialen Loops $\{\lambda\,(\in S^1) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \cdot \lambda^n \,:\, g_n \in \mathfrak{l},\; g_n = 0 \text{ für fast alle } n \in \mathbb{Z}\}$. Auf diesen ist die Involution $\hat{\tau}$ gleich der punktweisen Operation von τ auf den Loops.

Die Lie Algebra aller polynomialen Loops nach $\mathfrak{l}$ liegt dicht in unserer Banach Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}$. Dies ist klar nach Bemerkung 3.40 Teil (iii).
Wir wollen den Twistungsautomorphismus $\hat{\sigma}$ und die $\mathbb{C}$-antilineare Involution $\hat{\tau}$ auf $\Lambda\mathfrak{l}$ fortsetzen:

Proposition 3.48 *(i) Auf der Banach Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}$ wird durch $(\hat{\sigma}A)(\lambda) := \sigma(A(-\lambda))$ eine $\mathbb{C}$-lineare, stetige Involution definiert.*
Die abgeschlossene Unteralgebra $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma := Fix(\hat{\sigma})$ hat die Darstellung

$$\Lambda\mathfrak{l}_\sigma = \{g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \cdot \lambda^n \in \Lambda\mathfrak{l} : g_{2k} \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}},\; g_{2k+1} \in \mathfrak{q}^{\mathbb{C}}\; \forall k \in \mathbb{Z}\}, \tag{3.17}$$

wobei $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}$ die $(+1)$- und (-1)-Eigenräume von σ in $\mathfrak{l}$ sind.

(ii) Die Abbildung $(\hat{\tau}A)(\lambda) := \tau(A(\lambda))$ definiert eine $\mathbb{C}$-antilineare, stetige Involution auf $\Lambda\mathfrak{l}$, die mit $\hat{\sigma}$ vertauscht. Die Fixpunktalgebra $\Lambda\mathfrak{g} := Fix(\hat{\tau})$ aller $\mathfrak{g}\,(= Fix(\tau))$-wertigen Loops in $\Lambda\mathfrak{l}$ ist eine abschlossene, reelle Unteralgebra von $\Lambda\mathfrak{l}$. Sie hat die Darstellung

$$\Lambda\mathfrak{g} = \{g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g_n \cdot \lambda^n \in \Lambda\mathfrak{l} : g_k = \tau(g_{-k})\; \forall k \in \mathbb{N}_0\} \tag{3.18}$$

Beweis: (i) Zur Stetigkeit von $\hat{\sigma}$: Es sei $K > 0$ derart, daß für jede Matrix $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt $\sum_{i,j=1}^n |(\sigma(X))_{i,j}| \le K \cdot \sum_{i,j=1}^n |(X)_{i,j}|$, und $L > 0$ derart, daß $\sum_{i,j=1}^n |(X)_{i,j}| \le L \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |(X)_{i,j}|^2}$. Es sei $A(\lambda) \in \Lambda\mathfrak{l}$ und $B(\lambda) := (\hat{\sigma}A)(\lambda)$. Dann gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\|B(\lambda)\|_w^2 = \textstyle\sum_{i,j=1}^n \|\sum_{m\in\mathbb{Z}}(-1)^m \cdot b_{ij}^{(m)} \cdot \lambda^m\|_w^2 = \sum_{i,j=1}^n (\sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_{ij}^m| \cdot w(m))^2 \le \\
&\le (\textstyle\sum_{i,j=1}^n \sum_{m\in\mathbb{Z}} |b_{ij}^m| \cdot w(m))^2 = (\sum_{m\in\mathbb{Z}} w(m) \cdot \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}^m|)^2 \le \\
&\le K^2 \cdot (\textstyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} w(m) \cdot \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}^m|)^2 = K^2 \cdot (\sum_{i,j=1}^n (\sum_{m\in\mathbb{Z}} w(m) \cdot |a_{ij}^m| \cdot w(m)))^2 \le \\
&\le K^2 \cdot (L \cdot \sqrt{\textstyle\sum_{i,j=1}^n (\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{ij}^m| \cdot w(m))^2})^2 = K^2 \cdot L^2 \cdot \sum_{i,j=1}^n (\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{ij}^m| \cdot w(m))^2
\end{aligned}$$

Zusammen liefert dies $\|\hat{\sigma}(A)\|_w \le K \cdot L \cdot \|A\|_w$.

(ii) Die Stetigkeit von $\hat{\tau}$ zeigt man analog.

(iii) Die Darstellungen der Fixpunktalgebren folgt aus der analogen Darstellung in der polynomialen Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$, da diese dicht liegt in $\Lambda\mathfrak{l}$.
(iv) Die Vertauschbarkeit von $\hat{\sigma}$ und $\hat{\tau}$ folgt wiederum aus der Vertauschbarkeit auf dem dichten Unterraum $\Lambda^{pol}\mathfrak{l}$ und der Stetigkeit beider Involutionen auf $\Lambda\mathfrak{l}$. $\diamondsuit$

Die Vertauschbarkeit von $\hat{\sigma}$ und $\hat{\tau}$ heißt genau, daß jede der beiden Involutionen die Fixpunktalgebra der anderen invariant läßt.
Die Fixpunktalgebra von $\hat{\tau}$ in $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ werde mit $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$ bezeichnet. Nun kommen wir zu unserem abschließenden Satz in diesem Kapitel:

Satz 3.49 *Der Abschluß der Lie Algebra $\Lambda_{\mathfrak{u}}^{pol+}\mathfrak{l}_\sigma$ aus Satz 3.35 heiße $\Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma$. Dies ist eine Unteralgebra von $\pi_+(\Lambda\mathfrak{l}_\sigma) + \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Sie ist komplementär zur reellen Lie Algebra $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$ in $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$, das heißt*

$$\Lambda\mathfrak{l}_\sigma \;=\; \Lambda\mathfrak{g}_\sigma \oplus \Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma\,, \tag{3.19}$$

es wird also die getwistete Banach Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ zerlegt in die direkte Summe zweier abgeschlossener, reeller Lie Unteralgebren, wobei $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$ die „reellwertigen" Loops in $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ bezüglich der reellen Form $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{l}$ sind. $\diamondsuit$

Beweis: Die Abgeschlossenheit der Lie Algebra $\Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma$ ist klar, da sie eine Unteralgebra der vollständigen Algebra $\Lambda^{+}\mathfrak{l}_\sigma$ ist, und sich die Eigenschaft $\lim_{\lambda\to 0} g(\lambda) \in \mathfrak{u}$ $(g \in \Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma)$ auf den Limes von Cauchy Folgen in $\Lambda^{+}\mathfrak{l}_\sigma$ überträgt.
Mit den Darstellungen in den Gleichungen (3.17) und (3.18) erhält man sofort, daß der Schnitt von $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma$ und $\Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma$ trivial ist, da $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{u} = \{0\}$ gilt.
Der Nachweis von $\Lambda\mathfrak{g}_\sigma + \Lambda_{\mathfrak{u}}^{+}\mathfrak{l}_\sigma = \Lambda\mathfrak{l}_\sigma$ geht wie der analoge Nachweis in Satz 3.35, da die Projektoren aus Proposition 3.43 stetig sind auf der Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}_\sigma$. $\diamondsuit$

Kapitel 4

Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen

In diesem Kapitel werden wir schließlich die Iwasawa Zerlegung in getwisteten und ungetwisteten Loop Gruppen $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ durchführen.

Im ersten Abschnitt wird die Konstruktion der Kac-Moody-Gruppen zu den affinen Kac-Moody-Algebren kurz vorgestellt. Diese besitzen ein eindimensionales Zentrum. Die Faktorisierung dieser Gruppen nach dem Zentrum liefert bis auf Isomorphie alle polynomialen, getwisteten und ungetwisteten Loop Gruppen über den einfachen, komplexen Lie Gruppen.
Diese polynomialen Loop Gruppen werden dann im nächsten Abschnitt vervollständigt, ähnlich wie die Loop Algebren in Abschnitt 3.4.
Im Abschnitt 4.3 werden wir zunächst in den ungetwisteten Loop Gruppen $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ die Iwasawa Zerlegung bezüglich der reellen Form ΛG und der Untergruppe $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ entwickeln.

Im vorletzten Abschnitt 4.4 werden die Kodimensionen der Doppelnebenklassen $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ berechnet, welche ungleich dem Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ der betrachteten Untergruppen sind. Es wird, unter der Voraussetzung, daß eine kompakte, reelle Form U von $G^{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist, gezeigt, daß diese Kodimensionen stets (endlich und) positiv sind, insbesondere ist das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ eine offene und dichte Teilmenge der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.

Im letzten Abschnitt wird für Involutionen σ, die innere Automorphismen der Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ sind, die Konstruktion aus Abschnitt 4.3 modifiziert für die getwistete Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$, indem diese in die ungetwistete Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ eingebettet wird. Die dazu nötige Reduktion τ-symmetrischer Elemente wird allerdings nur bis zum Weyl Gruppen Element durchgeführt; dabei bezeichnet τ die Konjugation der Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ bezüglich der reellen Form G. Weiterhin wird in Abschnitt 4.5 gezeigt, daß in getwisteten Loop Gruppen im allgemeinen weitere, offene Doppelnebenklassen $\Lambda G_\sigma \cdot s \cdot \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ neben dem stets offenen Produkt $\Lambda G_\sigma \cdot \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ auftreten.

4.1 Die Kac-Moody-Gruppen zu den affinen Kac-Moody-Algebren

In diesem Abschnitt soll die Konstruktion von Kac-Moody-Gruppen aus den Kac-Moody-Algebren vom endlichen und affinen Typ vorgestellt werden. Dies wird benötigt, um die Zerlegungssätze (Bruhat und Birkhoff) sowie die Struktursätze über die Weyl Gruppen im nächsten Abschnitt auf die Vervollständigungen der Kac-Moody-Gruppen anwenden zu können. Wir folgen bei der Entwicklung und Darstellung dieser Gruppen dem Artikel von Kac in [KacII].

Weitere Artikel, die diese Kac-Moody-Gruppen behandeln, sind [TitsI] und [TitsII], sowie [PetKac] mit einer sehr knappen Darstellung.

Wir brauchen zunächst ein paar Definitionen:

Definition 4.1 *Es sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von beliebiger Dimension und A ein Endomorphismus von $\mathcal{V}$.*
Dann heißt A lokal endlich, wenn jedes $v \in \mathcal{V}$ in einem endlichdimensionalen, A-invarianten Untervektorraum liegt.
A heißt lokal nilpotent, wenn für jedes $v \in \mathcal{V}$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^n(v) = 0$.
A heißt halbeinfach, wenn $\mathcal{V}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.

Wenn der Endomorphismus A einer der Bedingungen aus Definition 4.1 genügt, so ist die Exponentialabbildung auf A erklärt:

$$\exp(t \cdot A) \;=\; \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n A^n \qquad t \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

Dies ist eine Einparameter-Gruppe von Automorphismen von $\mathcal{V}$.

Die lokale Endlichkeit des Endomorphismus A ist äquivalent zur Bedingung, daß der von $\{A^n(v) \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte Untervektorraum endlichdimensional ist für jedes $v \in \mathcal{V}$.

Jetzt kehren wir zu den Lie Algebren zurück:

Definition 4.2 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine komplexe Lie Algebra beliebiger Dimension. Weiter sei $(\mathcal{V}, \pi)$ ein $\mathfrak{l}$-Modul, das heißt $\pi : \mathfrak{l} \to gl(\mathcal{V})$ ist ein Homomorphismus von Lie Algebren.*
(i) Ein $X \in \mathfrak{l}$ heißt π-lokal endlich, wenn $\pi(X)$ ein lokal endlicher Endomorphismus von $\mathcal{V}$ ist. Es bezeichne $F_\mathfrak{l}$ die Menge aller ad-lokal endlichen Elemente von $\mathfrak{l}$, und für einen $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathcal{V}, \pi)$ sei $F_{\mathfrak{l},\pi} := \{X \in F_\mathfrak{l} : X \text{ ist } \pi - \text{lokal endlich}\}$.

(ii) Ein $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathcal{V}, \pi)$ heißt integrierbar, wenn $F_{\mathfrak{l},\pi} = F_\mathfrak{l}$ gilt.

(iii) Die Lie Algebra $\mathfrak{l}$ heißt integrierbar, wenn sie von $F_{\mathfrak{l}}$ erzeugt wird.

Es gilt dann das folgende Lemma (siehe [KacII], § 1.2 Lemma):

Lemma 4.3 *Der von der Menge $F_{\mathfrak{l}}$ erzeugte Untervektorraum von $\mathfrak{l}$ ist eine Unteralgebra.*

Mittels der integrierbaren $\mathfrak{l}$-Moduln wird jetzt die assoziierte Gruppe definiert:

Definition 4.4 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine integrierbare Lie Algebra. $\tilde{\mathcal{L}}$ sei die* **freie Gruppe** *auf der Menge $F_{\mathfrak{l}}$. Dann wird für jeden integrierbaren $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathcal{V}, \pi)$ eine Darstellung $\tilde{\rho}_\pi$ von $\tilde{\mathcal{L}}$ definiert vermöge $\tilde{\rho}_\pi(X) := \exp(\pi(X)) \qquad X \in F_{\mathfrak{l}}$.*

Es bezeichne $\mathcal{K} = \bigcap \mathrm{Kern}\, \tilde{\rho}_\pi$ den Schnitt über die Kerne der $\tilde{\rho}_\pi$ zu allen integrierbaren $\mathfrak{l}$-Moduln $(\mathcal{V}, \pi)$.
Die Faktorgruppe $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}}/\mathcal{K}$ heißt die zur integrierbaren Lie Algebra $\mathfrak{l}$ assoziierte Gruppe.

$(\mathcal{V}, \rho_\pi)$ heißt die zum integrierbaren $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathcal{V}, \pi)$ assoziierte Darstellung von $\mathcal{L}$, wobei kanonisch $\rho_\pi(L \cdot \mathcal{K}) = \tilde{\rho}_\pi(L)$ für alle $L \in \tilde{\mathcal{L}}$ definiert wird.

Auf dieser, so definierten Gruppe $\mathcal{L}$ zur Lie Algebra $\mathfrak{l}$ haben wir mittels der kanonischen Surjektion $\tilde{\mathcal{L}} \to \mathcal{L}$ eine Exponentialabbildung, allerdings nur auf der Teilmenge $F_{\mathfrak{l}}$, das heißt wir definieren

$$\exp(X) := X \cdot \mathcal{K} \in \mathcal{L} \qquad \forall\, X \in F_{\mathfrak{l}}. \tag{4.2}$$

Dann gilt nach Definition $\rho_\pi(\exp(X)) = \exp(\pi(X))$ für alle $x \in F_{\mathfrak{l}}$ für jeden integrierbaren $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathcal{V}, \pi)$.

Diese Gleichung zeigt sofort, daß $\{\exp(t \cdot X) \,|\, t \in \mathbb{C}\}$ für jedes X aus $F_{\mathfrak{l}}$ eine Einparameter-Gruppe in $\mathcal{L}$ ist, da $F_{\mathfrak{l}}$ abgeschlossen ist unter Skalarmultiplikation mit $\mathbb{C}$.

Definition 4.5 *Es sei $\mathfrak{l}$ eine integrierbare Lie Algebra. Die zum intergierbaren $\mathfrak{l}$-Modul $(\mathfrak{l}, ad)$ assoziierte Darstellung der Gruppe $\mathcal{L}$ heißt die adjungierte Darstellung $(\mathfrak{l}, Ad)$ von $\mathcal{L}$.*

Für die adjungierte Darstellung gilt insbesondere

$$Ad(X) = \exp(ad(X)) \qquad \forall\, X \in F_{\mathfrak{l}}.$$

Nun wird die Konstruktion der assoziierten Gruppen auf affine Kac-Moody-Algebren angewandt.
Es sei hierfür $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ eine verallgemeinerte Cartan Matrix vom endlichen oder affinen Typ vom Rang n beziehungsweise $n-1$ und $\mathfrak{g}(A)$ die in Definition 3.9 eingeführte Kac-Moody-Algebra zur Matrix A. Dann gilt (siehe [KacII], § 1.3, a)):

Lemma 4.6 *Die Elemente E_i, F_i, $1 \le i \le n$ sind ad-lokal nilpotent, und die Elemente der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ sind ad-halbeinfach.*
Insbesondere sind die Lie Algebren $\mathfrak{g}(A)$ und sein Kommutator $\mathfrak{g}'(A)$ integrierbar.

Die Integrierbarkeit dieser Lie Algebren folgt, da $\mathfrak{g}(A)$ beziehungsweise sein Kommutator erzeugt wird von $\{E_i, F_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$ und $\mathfrak{c}$ beziehungsweise von $\{E_i, F_i \,:\, 1 \leq i \leq n\}$ und $\mathfrak{c}'$.

Für das folgende benötigen wir Bezeichnungen für verschiedene Unteralgebren von $\mathfrak{g}(A)$:

Bezeichnungen: Wir bezeichen für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\mathfrak{g}_i$ die zu $sl(2, \mathbb{C})$ isomorphe Unteralgebra $\mathbb{C} \cdot H_i + \mathbb{C} \cdot E_i + \mathbb{C} \cdot F_i$.
Weiterhin sei $\mathfrak{u}_\pm := \sum_{\alpha \in \Delta^\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ gesetzt, sowie $\mathfrak{b}_\pm := \mathfrak{c} + \mathfrak{u}_\pm$. $\diamondsuit$

Die Unteralgebren $\mathfrak{u}_\pm$ liegen auch in $\mathfrak{g}'(A)$, und $\mathfrak{b}'_\pm := \mathfrak{b}_\pm \cap \mathfrak{g}'(A) = \mathfrak{c}' + \mathfrak{u}_\pm$.

Definition 4.7 *Die zur integrierbaren Lie Algebra* $\mathfrak{g}'(A) = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ *assoziierte Gruppe* $G(A)$ *heißt die Kac-Moody-Gruppe zur Cartan Matrix* A.

Nun konstruieren wir die zu den Unteralgebren $\mathfrak{u}_\pm$ und $\mathfrak{b}'_\pm$ gehörigen Untergruppen von $G(A)$:

Definition 4.8 *(i) Es bezeichne* U_+ *die Untergruppe von* $G(A)$*, welche von den Einparameter-Untergruppen* $\{\exp(\mathfrak{g}_\alpha) \,:\, \alpha \in \Delta^+_{re}\}$ *erzeugt wird. Analog wird* U_- *definiert.*
(ii) Es seien $B_\pm$ *die Untergruppen von* $G(A)$*, die von* $U_\pm$ *und* $C := \exp(\mathfrak{c}')$ *erzeugt werden.*
(iii) Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ *sei* G_i *die von* $\{\exp(\mathbb{C} \cdot E_i)\}$, $\{\exp(\mathbb{C} \cdot F_i)\}$ *und* $C_i := \exp(\mathbb{C} \cdot H_i)$ *erzeugte Untergruppe von* $G(A)$ *sowie* N_i *der Normalisator von* C_i *in* G_i.

Auf den Wurzelräumen von $\mathfrak{g}(A)$ zu den imaginären Wurzeln existiert die Exponentialabbildung nicht, da deren Elemente nicht ad-lokal endlich auf $\mathfrak{g}(A)$ operieren. Nun gelten die folgenden, fundamentalen Aussagen ([KacII], § 1.6 und [PetKac]):

Satz 4.9 *(i) Der Homomorphismus*

$$\varphi : \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \mapsto x \cdot H_i + y \cdot E_i + z \cdot F_i$$

der komplexen Lie Algebra $sl(2, \mathbb{C})$ *in die Lie Algebra* $\mathfrak{g}'(A)$ *hat (für jedes* $i \in \{1, \ldots, n\}$*) einen Lift* $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \to G(A)$. Φ *ist injektiv und sein Bild ist die Untergruppe* G_i*. Weiterhin gilt*

$$\Phi \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(y \cdot E_i), \quad \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} = \exp(z \cdot F_i), \quad \textit{und}$$

$$\Phi(\exp \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}) = \exp(x \cdot H_i), \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{C}.$$

(ii) Es sei N *die von den Untergruppen* N_i $(1 \leq i \leq n)$ *erzeugte Untergruppe von* $G(A)$*. Dann ist* N *der Normalisator der abelschen Untergruppe* $C = \exp(\mathfrak{c}')$*, und*

die Faktorgruppe N/C ist isomorph zur Weyl Gruppe W der Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$.

(iii) Das Zentrum von $G(A)$ liegt in C. Die Untergruppe B_+ ist gleich dem semidirekten Produkt der Untergruppen C und U_+; es gilt die analoge Aussage für B_-; der Schnitt von U_+ mit B_- ist trivial, ebenso von U_- und B_+.

(iv) Wenn die Cartan Matrix A vom endlichen Typ ist, so ist die Gruppe $G(A)$ isomorph zur der einfach zusammenhängenden Lie Gruppe, deren Lie Algebra die einfache, komplexe Lie Algebra $\mathfrak{g}(A)$ ist, B_+ ist eine Borel Untergruppe von $G(A)$ mit zugehöriger, maximal unipotenter Gruppe U_+, und Cartan Untergruppe C.

Nun können wir die für unsere Iwasawa Zerlegung wesentlichen Zerlegungssätze der Gruppe $G(A)$ bezüglich der Untergruppen $U_\pm$ und der Weyl Gruppe $W = N/C$ zitieren. Diese sind wohlbekannt für die endlichdimensionalen, halbeinfachen Lie Gruppen. (siehe [PetKac], Corollar 5)

Satz 4.10 *In der Kac-Moody-Gruppe $G(A)$ zur Cartan Matrix A von endlichen oder affinen Typ gelten die folgenden Zerlegungen:*

$$\begin{array}{rclcll} G(A) & = & \bigcup_{w\in W} U_-\cdot w\cdot C\cdot U_+ & = & \bigcup_{w\in W} B_-\cdot w\cdot B_+ & \textit{Birkhoff Zerlegung} \\ G(A) & = & \bigcup_{w\in W} U_+\cdot w\cdot C\cdot U_+ & = & \bigcup_{w\in W} B_+\cdot w\cdot B_+ & \textit{Bruhat Zerlegung} \end{array} \tag{4.3}$$

Die Vereinigungen sind disjunkt.
Weiterhin besitzt jedes $g\in G(A)$ eine Zerlegung $g = u_-\cdot n\cdot u_+$ mit $u_\pm \in U_\pm$, $n\in N$ derart, daß $n^{-1}\cdot u_-\cdot n$ in U_- liegt. In dieser Zerlegung sind $u_\pm$ und n eindeutig.

Für $w\in W = N/C$ sind die Untergruppen $w\cdot U_\pm\cdot w^{-1}$ wohldefiniert, und es gelten die Zerlegungen

$$\begin{array}{rcl} U_+ & = & (U_+\cap w\cdot U_+\cdot w^{-1})\cdot(U_+\cap w\cdot U_-\cdot w^{-1}) \\ U_- & = & (U_-\cap w\cdot U_+\cdot w^{-1})\cdot(U_-\cap w\cdot U_-\cdot w^{-1}) \end{array} \tag{4.4}$$

Die zugehörigen Faktorisierungen von Elementen in U_+ beziehungsweise U_- sind eindeutig. $\diamondsuit$

Bemerkung 4.11 Für endlichdimensionale, einfache Lie Gruppen folgt die Birkhoff Zerlegung sofort aus der Existenz der Bruhat Zerlegung, da in diesem Fall U_- und U_+ unter der Weyl Gruppe zueinander konjugiert sind. Dies ist für die Kac-Moody-Gruppen zu Cartan Matrizen vom affinen Typ nicht der Fall. Hier sind beide Zerlegungen getrennt nachzuweisen. Dies geschieht, indem man nachweist, daß $(G(A), B_+, N, S)$ ein **Tits System** ist, wobei S die Menge der Elementarreflexionen $\rho_i(H) = H - \alpha_i(H)\cdot H_i$ auf $\mathfrak{c}$ zu den einfachen Wurzeln $\alpha_i \in \Pi$ ist.

Zur Illustration sehen wir uns die Kac-Moody-Gruppen an einem einfachen Beispiel an:

Beispiel:
Wir betrachten die Cartan Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{l+1},$$

mit $l \geq 1$. Dies ist die erweiterte Cartan Matrix der Matrix zur Lie Algebra a_l. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, ist die Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ eine zweidimensionale Erweiterung der polynomialen Loop Algebra $\Lambda^{pol} sl(n,\mathbb{C})$, welche wir mit der Lie Algebra aller polynomialen Abbildungen $\lambda \in S^1 \mapsto sl(n,\mathbb{C})$ identifizieren können. Das heißt die Koeffizientenfunktionen sind Laurent Polynome in λ. Es ist also $\mathfrak{g}(A)' = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ eine eindimensionale, zentrale Erweiterung von $\Lambda^{pol} sl(n,\mathbb{C})$.

Die Wurzelräume zu den einfachen Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sind $\mathbb{C} \cdot \lambda \cdot E_{n,1}$ sowie $\mathbb{C} \cdot E_{k,k+1} \quad (1 \leq k \leq l)$. Diese erzeugen die Unteralgebra $\mathfrak{u}_+$, welche aus allen polynomialen Abbildungen der S^1 nach $sl(n,\mathbb{C})$ besteht, die eine holomorphe Fortsetzung ins Innere des Einheitskreises besitzen und bei $\lambda = 0$ ausgewertet eine echte obere Dreiecksmatrix liefern. Die Wurzel α_0 ist genau $\delta - \varphi$, wobei δ die Gradderivation der Algebra $\mathfrak{g}(A)$ ist und φ die höchste Wurzel im Wuzelsystem a_l, das von den einfachen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ erzeugt wird.
Die l-dimensionalen Wurzelräume zu den imaginären Wurzeln $k \cdot \delta$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind die Räume $\lambda^k \cdot \tilde{\mathfrak{c}}$, wobei $\tilde{\mathfrak{c}}$ die Cartan Unteralgebra aller Diagonalmatrizen der $sl(n,\mathbb{C})$ bezeichne. Es ist also $\tilde{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}'/\mathfrak{z}$, wobei $\mathfrak{c}' = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{g}(A)'$ ist, und $\mathfrak{z}$ das eindimensionale Zentrum von $\mathfrak{g}(A)'$.
Die Wurzelräume zu den übrigen Wurzeln, das sind die $\alpha_{ij} + k \cdot \delta \quad (1 \leq i,j \leq n,\ i \neq j,\ k \in \mathbb{Z})$, sind die eindimensionalen Räume $\mathbb{C} \cdot \lambda^k \cdot E_{ij}$. Diese operieren via ad lokal nilpotent auf $\mathfrak{g}(A)'$.

Die zur Algebra $\mathfrak{g}(A)'$ assoziierte Kac-Moody-Gruppe $G(A)$ ist nun eine eindimensionale, zentrale Erweiterung der Gruppe $\Lambda^{pol} SL(n,\mathbb{C})$ aller polynomialen Abbildungen der S^1 in die Lie Gruppe $SL(n,\mathbb{C})$, das heißt, $\Lambda^{pol} SL(n,\mathbb{C})$ besteht aus allen Abbildungen der S^1 nach $SL(n,\mathbb{C})$, deren Koeffizientenfunktionen Laurent Polynome in $\lambda \in S^1$ sind. Diese Gruppe $\Lambda^{pol} SL(n,\mathbb{C})$ wird erzeugt von den Einparametergruppen $\exp(\mathbb{C} \cdot \lambda^k \cdot E_{ij})$ mit $i \neq j$ und $k \in \mathbb{Z}$. Die Untergruppe U_+ ist die Menge aller Loops in $\Lambda^{pol} SL(n,\mathbb{C})$ mit holomorpher Fortsetzung ins Innere des Einheitskreises derart, daß die Auswertung bei $\lambda = 0$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einsen in der Diagonalen ist. Diese Untergruppe U_+ wird erzeugt von den Bildern der Exponentialabbildung von den Wurzelräumen in der Algebra $\mathfrak{u}_+$ zu den reellen Wurzeln.
Das analoge gilt für die Untergruppe U_-.

Die Untergruppe $\tilde{C} = \exp(\tilde{\mathfrak{c}})$ ist die Cartan Untergruppe von $\Lambda^{pol}SL(n,\mathbb{C})$. Sie besteht aus allen konstanten Diagonalmatrizen mit Determinate 1. Wir wollen im weiteren die Tilden weglassen.
Der Normalisator N von C in $\Lambda^{pol}SL(n,\mathbb{C})$ ist das Produkt aus der Gruppe $\mathbb{T}$ und dem Normalisator von C in $SL(n,\mathbb{C})$. Dabei ist $\mathbb{T}$ die Untergruppe aller Diagonalmatrizen in $\Lambda^{pol}SL(n,\mathbb{C})$. Daher ist $\mathbb{T}$ die Gruppe aller polynomialen Homomorphismen der S^1 in den maximalen Torus $T := C \cap SU(n)$ der kompakten, reellen Form $SU(n)$ von $SL(n)$.
Das heißt $\mathbb{T} = \{diag(\lambda^{m_1}, \ldots, \lambda^{m_n}) \,|\, m_k \in \mathbb{Z},\ \sum m_k = 0\}$.

Der Normalisator von C in $SL(n,\mathbb{C})$ besteht bekanntlich aus allen Permutationsmatrizen. Die Weyl Gruppe $W = N/C$ ist damit isomorph zum semidirekten Produkt aus der symmetrischen Gruppe S_n und $\mathbb{T}$, wobei $\mathbb{T}$ der Normalteiler ist.

Da das Zentrum der Kac-Moody-Gruppe $G(A)$ in seiner Cartan Untergruppe C liegt, haben wir in der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda SL(n,\mathbb{C})$ die analogen Zerlegungen wie in den Gleichungen (4.3) und (4.4), wobei natürlich C wieder die Menge der konstanten Diagonalmatrizen aus $SL(n,\mathbb{C})$ bezeichnet. $\diamondsuit$

Der große Nachteil beim Rechnen mit diesen polynomialen Loop Gruppen besteht darin, daß die Exponentialabbildung von der Algebra in die Kac-Moody-Gruppe nur auf der Menge der ad-lokal endlichen Elemente erklärt ist und nicht auf der ganzen Lie Algebra. In obigem Beispiel können wir nicht die Exponentialabbildung auf den Wurzelräumen zu den imaginären Wurzel bilden, da diese nicht in der zugehörigen polynomialen Loop Gruppe liegt. Dieser Nachteil wird nun behoben, indem wir unsere Gruppen geeignet vervollständigen:

4.2 Banach Lie Gruppen

Wir werden in diesem Abschnitt die Banach Lie Gruppen konstruieren, deren Lie Algebren die in Abschnitt 3.4.2 eingeführten Banach Lie Algebren sind. Diese Banach Lie Gruppen erhalten wir aus Vervollständigungen der polynomialen Loop Gruppen, für welche wir bereits ein Beispiel im letzten Abschnitt vorgestellt hatten. Zuletzt zeigen wir mit Resultaten aus [DoGrSzm], daß die im letzten Abschnitt zitierten Zerlegungssätze für die zugehörigen Kac-Moody-Gruppen entsprechend gelten.

Wir führen zunächst die Notationen ein, die im Rest dieses Kapitels verwendet werden:
Notationen: Es sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, reelle Lie Algebra und $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierung, welche nach Voraussetzung eine einfache, komplexe Lie Algebra ist. Weiterhin bezeichne τ die Komplexkonjugation von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{g}$, das heißt τ ist $\mathbb{C}$-antilinear und $\mathfrak{g} = Fix(\tau)$.
Es sei $G^{\mathbb{C}}$ die einfach zusammenhängende, komplexe Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Es sei $G^{\mathbb{C}}$ eingebettet in eine geeignete $SL(n,\mathbb{C})$ (siehe [GoWal], § 5.1) derart,

daß $G^{\mathbb{C}}$ die gemeinsame Nullstellenmenge in $SL(n,\mathbb{C})$ einer Familie von komplexen Polynomen auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ ist.
Dann ist kanonisch $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ Unteralgebra von $sl(n,\mathbb{C})$. Wir bezeichnen wieder mit τ den Lift der Komplexkonjugation von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{g}$ auf $G^{\mathbb{C}}$. Es sei G die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements der Fixpunktgruppe von τ in $G^{\mathbb{C}}$. Dann ist die Lie Algebra von G gleich $\mathfrak{g}$.
Weiter sei θ eine Cartan Involution von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, die mit τ vertauscht. Ihr Lift auf $G^{\mathbb{C}}$ werde ebenfalls mit θ bezeichnet. Die Zerlegung von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $\mathfrak{g}$ in die (± 1)-Eigenräume bezüglich θ sei $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} \oplus i\cdot\mathfrak{u}$ beziehungsweise $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$. Die Fixpunktgruppen von θ auf $G^{\mathbb{C}}$ und auf G heißen U und K. Diese sind zusammenhängende Gruppen.
Wir können auch voraussetzen, daß $U = G^{\mathbb{C}} \cap SU(n)$ und $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cap su(n)$ gilt. (siehe wiederum [GoWal], § 5.1) $\diamondsuit$

Nun können wir die für uns relevanten Loop Gruppen definieren:

Definition 4.12 *Es sei $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ ein symmetrisches Gewicht vom nicht analytischen Typ und $\mathcal{A}_w$ die zugehörige gewichtete Wiener Algebra (siehe Definitionen 3.36 und 3.38). Dann sei $SL(n,\mathcal{A}_w)$ die Menge aller Abbildungen von S^1 nach $SL(n,\mathbb{C})$, die in der Banach* Algebra $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ liegen (siehe Lemma 3.44), das heißt $SL(n,\mathcal{A}_w) = \{g \in Mat_n(\mathcal{A}_w) : \det g(\lambda) = 1\, \forall \lambda \in S^1\}$. Weiter sei $\Lambda G^{\mathbb{C}} = \{g \in SL(n,\mathcal{A}_w) : g(\lambda) \in G^{\mathbb{C}}\, \forall\lambda \in S^1\}$ und $\Lambda G = \{g \in SL(n,\mathcal{A}_w) : g(\lambda) \in G\,\forall\lambda\in S^1\}$.*

Nach Satz 3.42, Bemerkung 3.45 und der Cramerschen Regel ist $GL(n,\mathcal{A}_w)$ unter punktweiser Verknüpfung eine Gruppe, die bezüglich der Norm in der Banach* Algebra $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ vollständig ist. Folglich sind auch $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ und ΛG Gruppen. Diese sind mit der eingeschränkten Norm von $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ vollständige Lie Gruppen, also Banach Lie Gruppen. Zusammenfassend haben wir die folgenden Eigenschaften dieser Lie Gruppen und ihrer Lie Algebren:
(siehe [GoWal], Proposition 5.1)

Proposition 4.13 *Die Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ist mit der eingeschränkten Norm von $Mat_n(\mathcal{A})$ eine vollständige, zusammenhängende und einfach zusammenhängende, komplexe Lie Gruppe mit Lie Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (siehe Proposition 3.47). Die Gruppe aller polynomialen Loops der S^1 nach $G^{\mathbb{C}}$ ist eine dichte Untergruppe von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, das heißt der Abschluß von $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Norm in $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ ist $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.*

Nun stellen wir den Zusammenhang zwischen der Lie Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und der Kac-Moody-Algbera $\mathfrak{g}(A)$ her, wobei A die affine Cartan Matrix zum erweiterten Wurzelsystem der zugrundeliegenden Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist (siehe [Kac], Chapter 7, § 7.4):

Proposition 4.14 *(i) Es sei A die Cartan Matrix zum erweiterten Wurzelsystem Δ mit den einfachen Wurzeln $\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ des Wurzelsystems Δ° der einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit den einfachen Wurzeln $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$. Dann ist die Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ eine zweidimensionale Erweiterung der Algebra*

$\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ aller polynomialen Loops. Genauer ist $[\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]/\mathfrak{z}$ isomorph zu $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, wobei $\mathfrak{z}$ das eindimensionale Zentrum der Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ bezeichnet. Der Wurzelraum zur einfachen Wurzel α_0 ist unter diesem Isomorphismus $\lambda \cdot \mathfrak{g}_{-\theta}$ wobei θ die höchste Wurzel in Δ° bezüglich der einfachen Wurzeln $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ bezeichnet.
(ii) Der Abschluß der Lie Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Norm auf $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ ist die Banach Lie Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
(iii) Es sei $\mathfrak{c}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, und $\Delta^{\circ +}$ das System positiver Wurzeln zu den einfachen Wurzeln $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ sowie $\mathfrak{u}^{\circ +}$ die zugehörige nilpotente Untergruppe von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Weiterhin sei ${}^{pol}\mathfrak{u}^+ = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$, wobei $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$ den Wurzelraum zur Wurzel α in $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezeichnet. Dann ist der Abschluß $\mathfrak{u}^+$ von ${}^{pol}\mathfrak{u}^+$ in $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ die Unteralgebra von $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, welche aus allen Loops $X(\lambda)$ besteht, die eine holomorphe Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe besitzen mit $X(\lambda = 0) \in \mathfrak{u}^{\circ +}$. Die analoge Aussage gilt für ${}^{pol}\mathfrak{u}^-$.
(iv) $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ zerlegt sich in die direkte Summe ${}^{pol}\mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{c} \oplus {}^{pol}\mathfrak{u}^+$. Alle drei Summanden sind Banach Lie Gruppen. ♢

Nun können wir die analogen Aussagen auf der Gruppenseite zitieren (siehe die Bemerkung in § 3.2, Seite 15, sowie Lemma (3.1.1) in [DoGrSzm]):

Proposition 4.15 *(i) Das Zentrum Z der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$ aus Definition 4.12 ist das (diskrete) Zentrum der zugrundeliegenden Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$. Die Fakorgruppe $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}/Z$ ist isomorph zur Fakorgruppe $G(A)/\tilde{Z}$, wobei $G(A)$ die zur Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}(A)$ assoziierte Gruppe ist und $\tilde{Z}$ ihr Zentrum.*
(ii) Die Untergruppe ${}^{pol}U^+$ von $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$, welche von den Einparameteruntergruppen $\{\exp(\mathbb{C} \cdot \Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha) : \alpha \in \Delta^+_{re}\}$ erzeugt wird, ist die Menge aller Loops $g(\lambda)$ in $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$, deren Koeffizientenfunktionen Polynome in λ sind mit der Eigenschaft, daß $g(\lambda = 0)$ in der unipotenten Untergruppe $U^{\circ +}$ von $G^{\mathbb{C}}$ mit Lie Algebra $\mathfrak{u}^{\circ +}$ liegt. Die analogen Aussagen gelten für ${}^{pol}U^-$.
(iii) Der Abschluß U^+ von ${}^{pol}U^+$ in $Mat_n(\mathcal{A}_w)$ besteht aus allen Loops $g(\lambda)$ in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, die eine holomorphe Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe besitzen mit der Eigenschaft, daß $g(\lambda = 0)$ in $U^{\circ +}$ liegt.
Die analoge Aussage gilt wieder für U^-.
Die Untergruppen $U^\pm$ sind zusammenhängende Banach Lie Gruppen.
(iv) Ein Loop g aus $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ hat genau dann eine holomorphe Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe beziehungsweise auf die obere Hälfte der Riemannschen Zahlenkugel, wenn die Fourier Reihe von $g(\lambda)$ die Gestalt $\sum_{k\geq 0} A_k \cdot \lambda^k$ beziehungsweise $\sum_{k\geq 0} A_k \cdot \lambda^k$ besitzt.
(v) Die Cartanuntergruppe C von $G^{\mathbb{C}}$ ist abgeschlossen in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. ♢

Definition 4.16 *Es bezeichne ab jetzt $B^\pm$ die Untergruppen $C \cdot U^\pm$.*
Weiterhin sei N der Normalisator von C in der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$.

Bemerkung 4.17 (i) Die holomorphe Fortsetzung von Loops aus $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ in die Einheitskreisscheibe beziehungsweise auf die obere Halbsphäre ist jeweils eindeutig wegen des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen.
(ii) Die Untergruppen $B^{\pm}$ von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ bestehen genau aus den Loops, welche eine holomorphe Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe beziehungsweise auf die obere Halbsphäre besitzen.
(iii) Damit ist der Schnitt der Untergruppen B^+ und U^- sowie der Untergruppen B^- und U^+ trivial, da holomorphe Abbildungen auf der ganzen Riemannschen Zahlenkugel konstant sind, und die Schnitte von C mit $U^{\circ\pm}$ trivial sind.
(iv) Der Normalisator von C in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ist das Produkt der Weyl Gruppe der endlichdimensionalen Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ mit der Gruppe **aller** Loops in die Cartan Untergruppe C, dieser ist also ,,deutlich" größer als die Gruppe N aus Definition 4.16. Mit dieser Untergruppe N werden wir allerdings die Zerlegungssätze der Gleichungen (4.3) auf die Vervollständigungen ubertragen, wie dies in [DoGrSzm] gezeigt wurde. $\diamondsuit$

Wir wollen nun die in [DoGrSzm] bewiesenen Zerlegungssätze für unsere Iwasawa Zerlegung verwenden. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung:

Definition 4.18 *Eine Unteralgebra $\mathfrak{p}^{pol}$ der polynomialen Loop Algebra $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ heißt standard-parabolische Unteralgebra, wenn $\mathfrak{c} + {}^{pol}\mathfrak{u}^+ \subseteq \mathfrak{p}^{pol}$ gilt.*
Für jede Teilmenge X der Menge aller einfachen Wurzeln $\Pi = \{\alpha_0, \dots, \alpha_l\}$ sei $\mathfrak{p}_X^{pol}$ die kleinste, standard-parabolische Unteralgebra, die alle Wurzelräume $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\alpha}$ mit $\alpha \in X$ enthält.
Mit $\mathfrak{p}_X$ werde der Abschluß einer solchen Algebra in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezeichnet.

Bemerkung 4.19 (i) Nach [BourII], Ch. 8, Sect. 3.4, Ch. 4, Sect. 2.6 existiert zu jeder standard-parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p}^{pol}$ von $\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eine Teilmenge X von Π, so daß $\mathfrak{p}^{pol} = \mathfrak{p}_X^{pol}$ gilt.
(ii) Diese Algebra stellt sich dar als $\bigoplus_{\beta\in\tilde{\Delta}^+} \Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\beta} + \mathfrak{c} + {}^{pol}\mathfrak{u}^+$, wobei $\tilde{\Delta}^+ = \sum_{\alpha\in X} \mathbb{Z}\cdot\alpha$ gilt.
Insbesondere ist $\mathfrak{p}_\emptyset^{pol} = \mathfrak{c} + {}^{pol}\mathfrak{u}^+ =: {}^{pol}\mathfrak{b}^+$. $\diamondsuit$

Es sei P_X^{pol} die Untergruppe von $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$, welche von den Untergruppen $\{\exp(\mathbb{C}\cdot\Lambda^{pol}\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{-\beta}) : \beta \in \tilde{\Delta}^+ \cap \Delta_{re}\}$, C und ${}^{pol}U^+$ erzeugt wird. Diese ist nach [DoGrSzm], Cor. 2.2.3, a) zusammenhängend. Nach Cor. 2.2.3, b) ist der Abschluß von P_X^{pol} in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ eine zusammenhängende Banach Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{p}_X$. Insbesondere ist $P_\emptyset = C\cdot U^+ = B^+$.

Nun können wir die für uns entscheidenden Aussagen zitieren (siehe [DoGrSzm], Proposition (3.3.1) (nebst Beweis) und [PresSeg], Ch. 8, Theorem 8.7.2 bzw. [DoGrSzm], Theorem (3.4.1)):

Proposition 4.20 *Es seien $B^{\pm}$ und N die Untergruppen von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ aus Definition 4.16, sowie $W = N/C$, die Weyl Gruppe. Dann sind für jedes $w \in W$ die Mengen*

$w \cdot B^{\pm}$, $w \cdot B^{\pm} \cdot w^{-1}$ sowie $w \cdot U^{\pm} \cdot w^{-1}$ wohldefiniert, und es gilt

$$\Lambda G^{\mathbb{C}} = U^- \cdot N \cdot U^+ = \bigcup_{w \in W} B^- \cdot w \cdot B^+ = \bigcup_{w \in W} U^- \cdot w \cdot C \cdot U^+ \tag{4.5}$$

Weiterhin gelten für jedes w aus der Weyl Gruppe W die Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} U^+ & = & (U^+ \cap w \cdot B^+ \cdot w^{-1}) \cdot (U^+ \cap w \cdot B^- \cdot w^{-1}) \\ U^- & = & (U^- \cap w \cdot B^+ \cdot w^{-1}) \cdot (U^- \cap w \cdot B^- \cdot w^{-1}) \end{array} \tag{4.6}$$

Dabei sind die Vereinigungen in Gleichung (4.5) disjunkt, und in den Gleichungen (4.6) sind die Produkte auf den rechten Seiten Diffeomorphismen auf U^+ bzw. U^-. $\diamondsuit$

Die Gleichung (4.5) verallgemeinert dabei die Birkhoff Zerlegung für die Kac-Moody-Gruppen (siehe erste Gleichung (4.3)) auf unsere vervollständigten Loop Gruppen. Die Gleichungen (4.6) haben jedoch (scheinbar) nicht die gleiche Gestalt wie die entsprechenden Gleichungen (4.4) für die Kac-Moody-Gruppen. Doch dies können und werden wir beheben.
Doch zunächst werden wir endlich die Gestalt der Weyl Gruppe $W = N/C$ klären (siehe [PresSeg], Proposition (5.1.2))

Proposition 4.21 *Es sei $\mathfrak{t}$ eine maximal abelsche Untergruppe der kompakten, reellen Form $\mathfrak{u}$ der einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und $T = \exp(\mathfrak{t})$ der zugehörige maximale Torus der kompakten, reellen Form U von $G^{\mathbb{C}}$. Dann ist $\mathfrak{c} := \mathfrak{t} + i \cdot \mathfrak{t}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, und $C = \exp(\mathfrak{c})$ die zugehörige Cartan Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$.*
Dann ist der Normalisator N von C in $\Lambda^{pol} G^{\mathbb{C}}$ gleich dem Produkt aus dem Normalisator N° von C in der endlichdimensionalen Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ und der Gruppe $\mathbb{T} \le \Lambda^{pol} G^{\mathbb{C}}$ aller Homomorphismen der S^1 nach T. $\diamondsuit$

Bemerkung: Die Cartan Untergruppe C ist isomorph zur multiplikativen, abelschen Gruppe $(\mathbb{C}^\star)^l$. Daher haben alle Homomorphismen der S^1 Werte in der einzigen, maximal kompakten Untergruppe $T = (S^1)^l$. Diese sind von der Gestalt $t(\lambda) = (\lambda^{k_1}, \dots, \lambda^{k_l})$ mit ganzen Zahlen k_j. $\diamondsuit$

Nun können wir die oben angedeutete Aussage zeigen:

Lemma 4.22 *Für jedes $w \in W$ gelten die Gleichungen*
$U^- \cap w \cdot U^+ \cdot w^{-1} = U^- \cap C \cdot w \cdot U^+ \cdot w^{-1}$,
$U^+ \cap w \cdot U^- \cdot w^{-1} = U^+ \cap C \cdot w \cdot U^- \cdot w^{-1}$
$U^+ \cap w \cdot U^+ \cdot w^{-1} = U^+ \cap C \cdot w \cdot U^+ \cdot w^{-1}$
$U^- \cap w \cdot U^- \cdot w^{-1} = U^- \cap C \cdot w \cdot U^- \cdot w^{-1}$.

Beweis: Offenbar sind stets die Gruppen auf der linken Seite in der rechten Seite enthalten. Der Beweis der zweiten Gleichung ist analog dem der ersten Gleichung, und die vierte Gleichung erhält man aus der dritten, indem man die Involution ω aus [Kac], § 1.3, Gleichung (1.3.4) anwendet, welche U^+ und U^- austauscht und auf C die negative Identität ist. Diese läßt damit auch N und W invariant.

(i) Wir beweisen zunächst die erste Gleichung:
Es sei $c \in C$ und $u_+ \in U^+$ derart, daß cwu_+w^{-1} in U^- liegt. Das heißt, es existiert ein u_- in U^-, so daß $cwu_+w^{-1} = u_-$ gilt. Damit ist wu_+w^{-1} holomorph fortsetzbar auf die obere Halbsphäre; da $w(\lambda)$ ein Laurent Polynom in λ ist, bricht die Fourier Reihe von U_+ nach oben ab. Daher liegt auch u_- in der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda^{pol}G^{\mathbb{C}}$, und wir haben nach [PetKac], Cor. 5 b) ($X = \emptyset$, „$w = w^{-1}$") eine Faktorisierung von $c^{-1}u_- = wu_+w^{-1} = \tilde{u}_- \cdot \tilde{u}_+ \in U^- \cdot U^+$. Damit ist $B^- \ni (\tilde{u}_-)^{-1} \cdot c \cdot u_- = \tilde{u}_+ \in U^+$. Da $B^- \cap U^+ = \{e\}$ und $C \cap U^- = \{e\}$ gilt, folgt $\tilde{u}_+ = e$ und $c = e$.

(ii) Wir beweisen jetzt die dritte Gleichung:
Die behauptete Gleichung ist äquivalent zu folgendem:
Wenn $n \in N$ und $u_+ \in U^+$ ist, und das Element $n \cdot u_+ \cdot n^{-1}$ in $B^+ (= C \cdot U^+)$ liegt, so liegt es schon in U^+. Wir gehen also von der Gleichung $n \cdot u_+ \cdot n^{-1} = c \cdot v_+$ aus. Es sei $u_+ = \sum_{k \geq 0} A_k \cdot \lambda^k$ die Fourier Reihe von u_+. Dann sind die A_k in $\mathbb{C}^{n \times n}$, und A_0 in $U^{\circ +}$.
Nach Proposition 4.21 hat n eine Faktorisierung $n = p \cdot t$ mit $p \in N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})$ und mit einem Homomorphismus t in den maximalen Torus T.

Da Konjugation mit Loop Gruppen Elementen eine stetige Operation auf der Loop Gruppe ist, können wir die Matrizen A_k einzeln konjugieren: Es sei $t \cdot u_+ \cdot t^{-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \cdot \lambda^k$. Wenn ein Koeffizient G_k mit negativem Index k ungleich 0 ist, so kann unsere obige Voraussetzung nicht erfüllt sein, da p ein konstanter Loop ist, das heißt, es wäre $n \cdot u_+ \cdot n^{-1}$ nicht in der Gruppe $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}} := G^{\mathbb{C}} \cdot U^+$ enthalten. Daher ist $t \cdot u_+ \cdot t^{-1} = \sum_{k \geq 0} G_k \cdot \lambda^k$.

Für die folgende Überlegung wird benutzt, daß wir die Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ in $SL(n, \mathbb{C})$ so konjugieren können, daß die Menge aller Diagonalmatrizen in $G^{\mathbb{C}}$ eine Cartan Unteralgebra von $G^{\mathbb{C}}$ ist. Da $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \cap su(n)$ und $U = G^{\mathbb{C}} \cap SU(n)$ gilt, besteht die maximal abelsche Unteralgebra $\mathfrak{t} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{c}$ von $\mathfrak{u}$ aus rein imaginären Diagonalmatrizen, und der zugehörige, maximale Torus T von U liegt auf der Diagonalen und ist isomorph zu $(S^1)^l$. Damit wird jeder Homomorphismus $t : S^1 \to T$ dargestellt durch Diagonalmatrizen, wobei die Diagonaleinträge Monome λ^k sind.
Wir betrachten die Koeffizientenfunktionen unseres Loops u_+: $u_+(\lambda) = (f_{i,j}(\lambda))_{i,j=1}^n$. Dann ist nach Voraussetzung die Fourier Reihe von $f_{i,j}$ von der Gestalt $f_{i,j}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} f_k^{(i,j)} \cdot \lambda^k$. Da $u_+(\lambda = 0)$ in $U^{\circ +}$ liegt, ist insbesondere $f_0^{(i,i)} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.
Wir betrachten nun $t \cdot u_+ \cdot t^{-1} = (g_{i.j}(\lambda))_{i,j=1}^n$. Dann ist - wie oben gezeigt wurde - $g_{i,j}(\lambda) = \sum_{k \geq 0} g_k^{(i,j)} \cdot \lambda^k$.
Es sei $t = diag(\lambda^{k_1}, \ldots, \lambda^{k_n})$. Damit errechnen wir die Gleichungen $g_{i,j}(\lambda) = \lambda^{k_i - k_j} \cdot f_{i,j}(\lambda)$. Insbesondere ist $g_0^{(i,i)} = 1$ für alle i.
Damit gilt für die Koeffizientenfunktionen: $g_{ii}(\lambda) = f_{ii}(\lambda) = 1 + f_1^{(ii)} \cdot \lambda^1 + \ldots$.

Daher ist die Projektion von $t \cdot u_+ \cdot t^{-1}$ auf die Diagonalmatrizen gleich $diag(g_{11}, \ldots, g_{nn}) = E_n + diag(f_1^{(11)}, \ldots, f_1^{(nn)}) \cdot \lambda^1 + \ldots$. Nun konjugieren wir das Element $t \cdot u_+ \cdot t^{-1}$ noch mit p. Dies ergibt also $n \cdot u_+ \cdot n^{-1}$. Nach Voraussetzung ist $n \cdot u_+ \cdot n^{-1} = c \cdot v_+$. Da unsere Cartan Untergruppe C in der Menge aller Diagonalmatrizen liegt, und $p \cdot E_n \cdot p^{-1} = E_n$ ist, folgt die Behauptung $c = e$. $\diamondsuit$

Es gelten also die Gleichungen (4.4) auch in unserer Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ für jedes $w \in W = N/C$. Damit können wir nun die folgende eindeutige „U^-NU^+-Zerlegung" zeigen, die für unsere Iwasawa Zerlegung von großer Bedeutung ist:

Proposition 4.23 *Jeder Loop $g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ besitzt eine Faktorisierung $g = u_- \cdot n \cdot u_+ \in U^- \cdot N \cdot U^+$ derart, daß $n^{-1} \cdot u_- \cdot n$ in U^- liegt. Diese Zerlegung ist eindeutig.*

Beweis: Nach Gleichung (4.5) existieren $v_\pm \in U^\pm$ und $n \in N$, so daß $g = v_- \cdot n \cdot v_+$ gilt. Nach der zweiten Gleichung in (4.4) gilt $n^{-1} \cdot U^- \cdot n = (n^{-1} \cdot U^- \cdot n \cap U^-) \cdot (n^{-1} \cdot U^- \cdot n \cap U^+)$; damit existieren u_- in U^- und $\tilde{u}_+$ in U^+ mit $n^{-1} \cdot u_- \cdot n \in U^-$ (und $n \cdot \tilde{u}_+ \cdot n^{-1} \in U^-$), so daß $n^{-1} \cdot v_- \cdot n = (n^{-1} \cdot u_- \cdot n) \cdot \tilde{u}_+$ gilt. Damit haben wir $g = v_- \cdot n \cdot v_+ = u_- \cdot n \cdot \tilde{u}_+ \cdot v_+$, und wir sind fertig mit $u_+ := \tilde{u}_+ \cdot v_+ \in U^+$. $\diamondsuit$

Zuletzt zeigen wir noch eine topologische Aussage für die Untergruppen U^+ und U^- von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, die wir ebenfalls im nächsten Abschnitt brauchen:

Proposition 4.24 *Die Untergruppen U^+ und U^- von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ sind zusammenhängend und einfach zusammenhängend.*
Insbesondere sind die Untergruppen $U^+ \cap w \cdot U^+ \cdot w^{-1}$, $U^+ \cap w \cdot U^- \cdot w^{-1}$, $U^- \cap w \cdot U^- \cdot w^{-1}$, und $U^- \cap w \cdot U^+ \cdot w^{-1}$ für jedes Weylgruppenelement $w \in W$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend.

Beweis: Nach Proposition 4.15 sind die Untergruppen $U^\pm$ von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ zusammenhängende Banach Lie Gruppen. Wir haben also jeweils nur den einfachen Zusammenhang zu zeigen. In [GoWal], § 5, Lemma 5.5 wird gezeigt, daß die Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ (dort mit $\tilde{G}_w$ bezeichnet, w ist das Gewicht vom nicht-analytischen Typ) einfach zusammenhängend ist. Weiterhin wird in Theorem 5.5 gezeigt, daß die Produktabbildung $V_w \times N \times A \times \tilde{K}_w$ nach $\tilde{G}_w$ ein reell-analytischer Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten ist. Dies ist die globale Iwasawa Zerlegung in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ mit kompakter, reeller Form K von $G^{\mathbb{C}}$. Es ist dabei V_w die Untergruppe $U^{\lambda +}$ aller Loops g in U^+, für die $g(\lambda = 0) = e$ gilt, und N ist unsere unipotente Untergruppe $U^{\circ +}$ von $G^{\mathbb{C}}$. Das Produkt dieser Untergruppen ist die Untergruppe U^+. Damit ist nach dem Satz 5.5 in [GoWal] U^+ mit $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ebenfalls einfach zusammenhängend.

Die Aussagen über den Zusammenhang und einfachen Zusammenhang der restlichen Gruppen folgt mit Proposition 4.20 und Lemma 4.22, da die Produkte in Gleichung (4.6) Diffeomorphismen sind. $\diamondsuit$

Damit haben wir die Vorbereitungen für unsere Iwasawa Zerlegung zusammen.

4.3 Die Iwasawa Zerlegung in ungetwisteten Loop Gruppen

Bevor wir mit der Konstruktion der verallgemeinerten Iwasawa Zerlegung beginnen, benötigen wir noch ein paar weitere Notationen und Bezeichnungen. Diese setzen die in Abschnitt 4.2 getroffenen Notationen fort. Weiterhin benutzen wir die Bezeichnungen der Banach Lie Gruppen $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, der zugehörigen Banach Lie Algebren $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und deren Wurzelsysteme Δ mit Weyl Gruppe W, wie sie in den Definitionen 4.12, 4.16 und 4.18 sowie den Propositionen 4.13 bis 4.15 eingeführt wurden.

Notationen und Bezeichnungen:
Es sei $\mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra im (-1)-Eigenraum $\mathfrak{p}$ der Cartan Involution θ auf der einfachen, reellen Lie Algebra $\mathfrak{g}$. Weiterhin sei $\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}}$ ein maximal abelscher Unterraum des Zentralisators $\mathfrak{z}_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{k} = Fix(\theta)$. Dann ist $\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{a}$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die via ad halbeinfach auf ganz $\mathfrak{g}$ operiert, ist also eine Cartan Unteralgebra. Die Unteralgebra $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} + i \cdot \mathfrak{a}$ ist dann eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{u}$. Es bezeichne $T := \exp(\mathfrak{t})$ den zugehörigen maximalen Torus in der kompakten, reellen Form U von $G^{\mathbb{C}}$.
Die Unteralgebra $\mathfrak{c} := (\mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{a})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} \oplus i \cdot \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a} \oplus i \cdot \mathfrak{a}$ ist eine Cartan Unteralgebra der einfachen, komplexen Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Dann ist $C := \exp(\mathfrak{c})$ die zugehörige Cartan Untergruppe von $G^{\mathbb{C}}$.

Weiterhin bezeichne Δ° die Menge aller Wurzeln von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$, sowie W° die zugehörige Weyl Gruppe des Wurzelsystems. Es gelten dann die Isomorphismen $W^{\circ} \cong N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})/Z_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}) \cong N_U(\mathfrak{t})/Z_U(\mathfrak{t})$, das heißt, die Weyl Gruppe W ist isomorph zur Faktorgruppe des Normalisators $N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})$ von $\mathfrak{c}$ in $G^{\mathbb{C}}$ nach dem Zentralisator unter der Wirkung der adjungierten Darstellung Ad von $G^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise zur Faktorgruppe des Normalisators von $\mathfrak{t}$ in U nach dem zugehörigen Zentralisator.
Nach Proposition 1.26 (i) ist $c_{\mathbb{R}} := i \cdot \mathfrak{t}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$ die kanonische, reelle Form von $\mathfrak{c}$, das heißt $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta^{\circ}} H_{\alpha}$, wobei $H_{\alpha} \in \mathfrak{c}$ durch die Gleichung $\kappa(H, H_{\alpha}) = \alpha(H)$ $(\forall\, H \in \mathfrak{c})$ definiert ist. Diese kanonische, reelle Form von $\mathfrak{c}$ ist invariant unter τ und liegt im Unterraum $i \cdot \mathfrak{u}$; insbesondere ist $\exp : \mathfrak{c}_{\mathbb{R}} \to \exp(\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$ ein Diffeomorphismus, und wir haben die Polar Zerlegung $T \times \mathfrak{c}_{\mathbb{R}} \to C, \quad (t, X) \mapsto t \cdot \exp(X)$, welche ebenfalls ein Diffeomorphismus ist.

Es sei N der Normalisator der Cartan Untergruppe C von $G^{\mathbb{C}}$ in der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda^{pol} G^{\mathbb{C}}$. Dann ist N das semidirekte Produkt $\mathbb{T} \cdot N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}) = \mathbb{T} \cdot W^{\circ} \cdot C$, wobei $\mathbb{T}$ die Gruppe aller Homomorphismen von S^1 in den maximalen Torus T bezeichnet; diese Gruppe $\mathbb{T}$ ist in dem semidirekten Produkt der Normalteiler (siehe auch Proposition 4.21).

Die $\mathbb{C}$-antilinearen Involutionen τ und θ der Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ werden auf die Banach Lie Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und die Banach Lie Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ fortgesetzt, indem wir sie punktweise auf den Loops operieren lassen. Diese Fortsetzungen

bezeichnen wir wieder mit τ beziehungsweise θ. Diese Involutionen sind stetig auf unseren Loop Gruppen beziehungsweise Algebren. Damit sind ihre Fixpunktgruppen ΛG und ΛU abgeschlossene Untergruppen von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Das Analoge gilt für die Fixpunktalgebren von τ und θ in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.
Die Menge $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ bezeichne die abgeschlossene Untergruppe aller Loops in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, welche ein holomorphe Fortsetzung in die Einheitskreisscheibe besitzen, es ist also $\Lambda^+G^{\mathbb{C}} = G^{\mathbb{C}} \cdot U^+$ die Menge aller Loops, in deren Fourier Reihe bezüglich λ die Koeffizieneten zu negativen Exponenten von λ verschwinden. $\diamondsuit$

Wie wir zu Beginn dieses Kapitels schon angedeutet haben, wollen wir in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen bezüglich der Untergruppen ΛG und $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ konstruieren. Bei dieser Konstruktion wird auch ein Verfahren eingeführt, mit dem man zu gegebenem Loop $g(\lambda)$ den Vertreter $s(\lambda) \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ ermittelt, für welchen $g(\lambda)$ in der Doppelnebenklasse $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ liegt.
Zunächst brauchen wir noch ein paar technische Vorbereitungen:

Definition 4.25 *Es werden mit $U^{\lambda+}$ und $U^{\lambda-}$ die Untergruppen von U^+ beziehungsweise U^- bezeichnet, welche aus allen Loops $g(\lambda)$ bestehen, für die $g(\lambda = 0) = e$ beziehungsweise $g(\lambda = \infty) = e$ gilt.*
Mit $U^{\circ\pm}$ werden die unipotenten Untergruppen von $G^{\mathbb{C}}$ bezeichnet, deren Lie Algebren $\mathfrak{u}^{\circ\pm}$ die Summe der Wurzelräume $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha}$, $\alpha \in \pm\Delta^{\circ+}$ sind.

Damit haben wir die folgenden Faktorisierungen von U^+ und U^-:

Lemma 4.26 *Es gelten die Faktorisierungen $U^+ = U^{\circ+} \cdot U^{\lambda+}$ und $U^- = U^{\circ-} \cdot U^{\lambda-}$.*

Beweis: Es sei $\tilde{w} \in W^\circ$ das Weyl Gruppen Element (der Ordnung 2), welches die unipotente Gruppe $U^{\circ+}$ nach $U^{\circ-}$ konjugiert, das heißt $\tilde{w} \cdot U^{\circ+} \cdot \tilde{w}^{-1} = U^{\circ-}$. Dann gelten nach Proposition 4.20 und Lemma 4.22 die Faktorisierungen
$U^+ = (U^+ \cap \tilde{w} \cdot U^+ \cdot \tilde{w}^{-1}) \cdot (U^+ \cap \tilde{w} \cdot U^- \cdot \tilde{w}^{-1})$ und
$U^- = (U^- \cap \tilde{w} \cdot U^+ \cdot \tilde{w}^{-1}) \cdot (U^- \cap \tilde{w} \cdot U^- \cdot \tilde{w}^{-1})$. Es ist $U^{\circ+} = U^+ \cap \tilde{w} \cdot U^- \cdot \tilde{w}^{-1}$ und $U^{\lambda+} = U^+ \cap \tilde{w} \cdot U^+ \cdot \tilde{w}^{-1}$, da $\tilde{w}$ ein konstanter Loop ist. Die analogen Gleichungen gelten für $U^{\circ-}$ und $U^{\lambda-}$. Damit ist die Behaupung gezeigt. $\diamondsuit$

Mit diesen Gleichungen können wir die Birkhoff Zerlegung aus Proposition 4.20 für unsere Zwecke geeignet modifizieren:

Proposition 4.27 *Es gilt $\tau(U^{\lambda+}) = U^{\lambda-}$. Weiterhin existiert ein $w_0 \in W^\circ$, für welches $\tau(U^{\circ+}) = w_0^{-1} \cdot U^{\circ-} \cdot w_0$ gilt. Insbesondere ist*

$$\tau(U^+) = w_0^{-1} \cdot U^- \cdot w_0, \tag{4.7}$$

und es gilt die modifizierte Birkhoff Zerlegung

$$\Lambda G^{\mathbb{C}} = \bigcup_{w \in W} \tau(U^+) \cdot w \cdot C \cdot U^+. \tag{4.8}$$

Die Vereinigung ist disjunkt.

Beweis: Da τ nach Konstruktion die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ invariant läßt, operiert τ auf der Menge aller Wurzelräume $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha}$, $\alpha \in \Delta^{\circ}$, und ebenso auf der Menge aller Systeme positiver Wurzeln von Δ°. Daher existiert ein $w_0 \in W^{\circ}$ derart, daß $\tau(\mathfrak{u}^{\circ+}) = Ad(w_0^{-1})(\mathfrak{u}^{\circ-})$ gilt. Dies liefert auf der Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ die Gleichung $\tau(U^{\circ+}) = w_0^{-1} \cdot U^{\circ-} \cdot w_0$, wobei wir für w_0 einen Vertreter aus der zugehörigen Nebenklasse von $Z_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})$ in $N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})$ wählen.
Da τ punktweise auf $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ operiert, gilt $\tau(U^{\lambda+}) = U^{\lambda-}$: Es sei $g(\lambda) = e + \sum_{k>0} A_k \cdot \lambda^k \in U^{\lambda+}$ die Fourier Reihe eines Loops aus $U^{\lambda+}$. Dann gilt wegen der Stetigkeit von τ die Gleichung $\tau(g)(\lambda) = e + \sum_{k>0} \tau(A_k) \cdot \bar{\lambda}^k = e + \sum_{k>0} \tau(A_k) \cdot \lambda^{-k} \in U^{\lambda-}$.
Zusammen erhalten wir mit Lemma 4.26 $\tau(U^+) = \tau(U^{\circ+}) \cdot \tau(U^{\lambda+}) = w_0^{-1} \cdot U^{\circ-} \cdot w_0 \cdot U^{\lambda-} = w_0^{-1} \cdot U^{\circ-} \cdot U^{\lambda-} \cdot w_0$, da wiederum w_0 ein konstanter Loop ist.
Mit der Birkhoff Zerlegung aus Proposition 4.20 erhalten wir schließlich
$\Lambda G^{\mathbb{C}} = w_0^{-1} \cdot \Lambda G^{\mathbb{C}} = w_0^{-1} \cdot \bigcup_{w\in W} U^- \cdot w \cdot C \cdot U^+ = \bigcup_{w\in W} w_0^{-1} \cdot U^- \cdot w \cdot C \cdot U^+ = \bigcup_{w\in W} w_0^{-1} \cdot U^- \cdot w_0 \cdot w \cdot C \cdot U^+ = \bigcup_{w\in W} \tau(U^+) \cdot w \cdot C \cdot U^+$, wobei wir ausnutzen, daß $w_0 \cdot W = W$ gilt. $\diamondsuit$

Die folgende Eindeutigkeitsaussage wird für uns von großer Bedeutung sein:

Proposition 4.28 *Es seien v_i, u_i in U^+ und n_i aus der Gruppe $N = W \cdot C$ $(i = 1, 2)$ derart, daß $\tau(v_1) \cdot n_1 \cdot u_1 = \tau(v_2) \cdot n_2 \cdot u_2$ gilt. Dann ist $n_1 = n_2$.*

Beweis: Nach Proposition 4.27 existieren x_1, x_2 in U^-, so daß $\tau(v_i) = w_0^{-1} \cdot x_i \cdot w_0$ für $i = 1, 2$ gilt. Weiterhin existiert ein c in der Cartan Untergruppe C so daß $n_2 = n_1 \cdot c$ gilt, da die Vereinigung in Gleichung (4.8) disjunkt ist. Wir setzen $v_- := w_0^{-1} \cdot x_2^{-1} \cdot x_1 \cdot w_0$ und $u_+ := u_2 \cdot u_1^{-1}$, sowie $n := n_1$. Dann wird die gegebene Gleichung zu $(w_0 \cdot n)^{-1} \cdot v_- \cdot (w_0 \cdot n) = c \cdot u_+$. Die linke Seite dieser Gleichung hat nach Proposition 4.20 eine Faktorisierung $y_- \cdot y_+ \in U^- \cdot U^+$. Damit gilt $U^- \ni y_- = c \cdot (u_+ \cdot y_+^{-1}) \in C \cdot U^+ = B^+$. Da der Schnitt von B^+ und U^- trivial ist, folgt $y_- = e$. Da auch $C \cap U^+ = \{e\}$ gilt, folgt $c = e$, und die Behauptung ist gezeigt. $\diamondsuit$

Für unsere Iwasawa Zerlegung benötigen wir eine eindeutige Zerlegung in der modifizierten Birkhoff Zerlegung aus Gleichung (4.8). Diese werden wir auf die eindeutige „U^-NU^+-Zerlegung" aus Proposition 4.23 zurückspielen.
Zunächst noch ein Lemma:

Lemma 4.29 *Es sei $v_+ \in U^+$ und $n \in N$. Dann existieren r_1, r_2 in U^+, so daß $n \cdot r_1 \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^+)$ und $n \cdot r_2 \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^-)$ liegt, und $v_+ = r_1 \cdot r_2$ gilt.*

Beweis: Im ersten Schritt wollen wir sehen, daß das Element $n \cdot v_+ \cdot n^{-1}$ in der Menge $\tau(U^+ \cdot U^-)$ liegt, oder äquivalent, daß $\tau(n) \cdot \tau(v_+) \cdot \tau(n^{-1}) \in U^+ \cdot U^-$ gilt: Nach Gleichung (4.7) aus Proposition 4.27 existiert ein r_- in U^-, so daß $\tau(v_+) = w_0^{-1} \cdot r_- \cdot w_0$ gilt. Mit $\tilde{n} := \tau(n) \cdot w_0^{-1} \in N$ (τ läßt die Cartan Untergruppe C invariant, also auch N) erhalten wir die Gleichung $\tau(n \cdot v_+ \cdot n^{-1}) = \tilde{n} \cdot r_- \cdot \tilde{n}^{-1}$. Nach Proposition 4.20 und Lemma 4.22 existieren $s_1 \in U^+ \cap \tilde{n} \cdot U^- \cdot \tilde{n}^{-1}$ und

$s_2 \in U^- \cap \tilde{n} \cdot U^- \cdot \tilde{n}^{-1}$, so daß $\tilde{n} \cdot r_- \cdot \tilde{n}^{-1} = s_1 \cdot s_2$ gilt.

Zusammen liefert dies die Faktorisierung $n \cdot v_+ \cdot n^{-1} = \tau(s_1) \cdot \tau(s_2)$ mit $\tau(s_1) \in \tau(U^+) \cap n \cdot U^+ \cdot n^{-1}$ und $\tau(s_2) \in \tau(U^-) \cap n \cdot U^+ \cdot n^{-1}$, weil $\tau(\tilde{n}U^-\tilde{n}^{-1}) = n \cdot \tau(w_0^{-1} \cdot U^- \cdot w_0) \cdot n^{-1} = n \cdot \tau(\tau(U^+)) \cdot n^{-1} = nU^+n^{-1}$ gilt. Setzen wir schließlich $r_1 := n^{-1} \cdot \tau(s_1) \cdot n$ und $r_2 := n^{-1} \cdot \tau(s_2) \cdot n$, so erhalten wir $v_+ = r_1 \cdot r_2$ mit $r_1, r_2 \in U^+$ sowie $n \cdot r_1 \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^+)$ und $n \cdot r_2 \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^-)$, wie gefordert. $\diamondsuit$

Nun kommen wir zu der angekündigten Aussage:

Proposition 4.30 *Es sei $y \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$. Dann existieren s_+ und r_+ in U^+ und ein $n \in N$, so daß $y = \tau(s_+) \cdot n \cdot r_+$ gilt, und $n \cdot r_+ \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^-)$ liegt.*
Diese Zerlegung ist eindeutig.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Existenz der gewünschten Zerlegung:
Nach Proposition 4.27 existieren $\tilde{s}_+, \tilde{r}_+ \in U^+$ und ein n in N, so daß $y = \tau(\tilde{s}_+) \cdot n \cdot \tilde{r}_+$. Wir faktorisieren das Element $\tilde{r}_+$ nach Lemma 4.29: $\tilde{r}_+ = r_1 \cdot r_2$, $r_1, r_2 \in U^+$ und $n \cdot r_1 \cdot n^{-1} \in \tau(U^+)$ sowie $n \cdot r_2 \cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$. Dann ist $y = \tau(\tilde{s}_+) \cdot (n \cdot r_1 \cdot n^{-1}) \cdot n \cdot r_2$. Setzen wir $s_+ := \tau(\tau(\tilde{s}_+) \cdot n \cdot r_1 \cdot n^{-1})$ und $r_+ := r_2$, so ist $y = \tau(s_+) \cdot n \cdot r_+$, und es gilt $s_+, r_+ \in U^+$ mit der gewünschten Eigenschaft an r_+.

Nun kommen wir zur Eindeutigkeit dieser Zerlegung:
Nach Proposition 4.28 ist das Element n aus dem Normalisator N in einer wie oben konstruierten Zerlegung in jedem Fall eindeutig. Wir können zum Beweis der Eindeutigkeit also wie folgt ansetzen: Es seien $s_+^{(i)}, r_+^{(i)} \in U^+$ $(i = 1, 2)$ und $n \in N$ so daß $\tau(s_+^{(1)}) \cdot n \cdot r_+^{(1)} = \tau(s_+^{(2)}) \cdot n \cdot r_+^{(2)}$ gilt sowie $n \cdot r_+^{(i)} \cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$ für $i = 1, 2$. Wir setzen $s_+ := (s_+^{(2)})^{-1} \cdot s_+^{(1)} \in U^+$ und $r_+ := r_+^{(2)} \cdot (r_+^{(1)})^{-1} \in U^+$; dann liegt wieder $n \cdot r_+ \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^-)$, und wir haben die Gleichung $\tau(s_+) \cdot n = n \cdot r_+$. Folglich haben wir $\tau(s_+) = n \cdot r_+ \cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$. Da $\tau(U^+) \cap \tau(U^-)$ trivial ist, folgt $s_+ = e = r_+$, und die Eindeutigkeit ist gezeigt. $\diamondsuit$

Wir wollen nun das Rezept vorstellen, wie wir ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen konstruieren. Dazu brauchen wir zunächst eine Definition:

Definition 4.31 *Ein Loop $x \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ heißt τ-symmetrisch, wenn $\tau(x) = x^{-1}$ gilt. Die Menge aller τ-symmetrischen Elemente in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ heiße $\mathcal{T}$.*

Insbesondere ist $\{\tau(g)^{-1} \cdot g \,:\, g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}\}$ eine Teilmenge von $\mathcal{T}$.

Bemerkung zu Definition 4.31
Der Begriff der τ-symmetrischen Elemente kommt vom analogen Ausdruck in den endlichdimensionalen Lie Gruppen und verallgemeinert dort den Begriff der θ-symmetrischen Elemente, sofern θ eine Cartan Involution einer endlichdimensionalen, halbeinfachen, reellen oder komplexen Lie Gruppe ist: Auf den Lie Gruppen $SL(n, \mathbb{R})$ und $SL(n, \mathbb{C})$ ist $\theta(g) = (\bar{g}^T)^{-1}$ die kanonische Cartan Involution beziehungsweise $\theta(X) = -\bar{X}^T$ auf den zugehörigen Lie Algebren. Dann

sind die θ-symmetrischen Matrizen die Menge aller reellen, **symmetrischen** beziehungsweise aller hermitschen Matrizen mit Determinante 1. Die Menge aller $\theta(g)^{-1}\cdot g \quad (g \in SL(n,\mathbb{R})$ oder $SL(n,\mathbb{C}))$ sind hierin die positiv definiten Matrizen. Dies ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements der Untermannigfaltigkeit aller θ-symmetrischen Elemente. $\diamondsuit$

Nun können wir das Konzept ausführen. Die Idee für dieses Vorgehen stammt von Prof. Dorfmeister:

Konzept: Die Untergruppe $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ operiert auf der Menge $\mathcal{T}$ aller τ-symmetrischen Elemente vermöge $(g,x) \mapsto \tau(g)^{-1}\cdot x\cdot g$. Wir werden unter anderem ein (diskretes) Vertretersystem der Bahnen dieser Operation konstruieren.
Wir gehen dazu wie folgt vor: Zu einem beliebigen Loop $g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ zerlegen wir das τ-symmetrische Element $x := \tau(g)^{-1}\cdot g$ bezüglich der Faktorisierung $\tau(U^+)\cdot N\cdot U^+$ von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Dann ist das Mittelelement $n \in N$ wegen Proposition 4.28 selbst τ-symmetrisch. Wir konstruieren ein Element $u_+ \in U^+$, so daß $\tau(u_+)^{-1}\cdot x\cdot u_+ = n$ gilt.
Im nächsten Schritt finden wir einen konstanten Loop $y \in G^{\mathbb{C}}$ derart, daß $\tau(y)^{-1}\cdot n\cdot y = t(\lambda)$ in der (diskreten) Gruppe aller Homomorphismen der S^1 in einen maximalen Torus T der maximal kompakten Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$ liegt.
Im letzten Schritt wird ein Loop $s \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ konstruiert, der $t(\lambda)$ τ-symmetrisch splittet, das heißt $t = \tau(s)^{-1}\cdot s$.
Zusammen erhalten wir die Gleichung
$\tau(u_+)\cdot\tau(y)\cdot\tau(s)^{-1}\cdot s\cdot y^{-1}\cdot u_+^{-1} = x = \tau(g)^{-1}\cdot g$.
Diese zeigt sofort, daß $h := g\cdot u_+\cdot y\cdot s$ von τ fixiert wird, also in der Gruppe ΛG aller, bezüglich τ reellen Loops liegt. Folglich ist $g = h\cdot s^{-1}\cdot(y^{-1}\cdot u_+^{-1}) \in \Lambda G\cdot s\cdot\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$.
An einem Beispiel werden wir sehen, daß sich nicht alle τ-symmetrischen Loops τ-symmetrisch splitten lassen. Das Verfahren wird zeigen, daß dies genau daran scheitern kann, daß nicht alle τ-symmetrischen Homomorphismen in maximale Tori splittbar sind. Wir können sogar anhand der reellen Form G von $G^{\mathbb{C}}$ charakterisieren, wann dieser Fall eintreten kann. $\diamondsuit$

Nach dem Konzept gehen wir im folgenden stets von τ-symmetrischen Loops aus, die wir mittels der Operation von $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ auf $\mathcal{T}$ auf ein Element in N reduzieren:

Satz 4.32 *Es sei $x \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ ein τ-symmetrischer Loop. Dann existieren Elemente $n \in N$ und $r,\, v \in U^+$, so daß die Gleichungen*

$$\begin{aligned} & \tau(r)\cdot x\cdot r^{-1} = n\cdot v, \\ \tau(n) = n^{-1} \quad \textit{und} \quad & n\cdot v\cdot n^{-1} = \tau(v)^{-1} \end{aligned} \tag{4.9}$$

gelten.

Beweis: Es sei $x = \tau(v_+)\cdot n\cdot r_+$ die eindeutige Zerlegung von x nach Proposition 4.30, das heißt $v_+,\, r_+$ liegen in U^+, und es gilt $n\cdot r_+\cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$.
Nach Voraussetzung gilt dann $\tau(v_+)\cdot n\cdot r_+ = x = \tau(x)^{-1} = \tau(r_+)^{-1}\cdot\tau(n)^{-1}\cdot v_+^{-1}$.

Die rechte Seite hat im allgemeinen nicht die Eigenschaft aus Proposition 4.30. Aber nach Proposition 4.28 gilt $n = \tau(n)^{-1}$, und wir erhalten die Gleichung $\tau(v_+) \cdot n \cdot r_+ = \tau(r_+)^{-1} \cdot n \cdot v_+^{-1}$. Nun splitten wir das Element $v_+^{-1} \in U^+$ gemäß Lemma 4.29, das heißt, wir erhalten $v_1, v_2 \in U^+$, so daß $n \cdot v_1 \cdot n^{-1} \in \tau(U^+)$, $n \cdot v_2 \cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$ und $v_+^{-1} = v_1 \cdot v_2$ gilt. Damit erhalten wir die Gleichung $x = \tau(r_+)^{-1} \cdot n \cdot v_+^{-1} = (\tau(r_+)^{-1} \cdot n \cdot v_1 \cdot n^{-1}) \cdot n \cdot v_2$. Dies ist wieder die Zerlegung von x nach Proposition 4.30; mit der Eindeutigkeitsaussage in dieser Proposition schließen wir die Gleichungen $r_+ = v_2$ und $\tau(v_+) = \tau(r_+)^{-1} \cdot n \cdot v_1 \cdot n^{-1}$. Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $\tau(r_+ \cdot v_+) = n \cdot v_1 \cdot n^{-1}$. Da $\tau(n)^{-1} = n$ gilt, folgt $\tau(v_1) = \tau(v_2 \cdot v_+) = n \cdot v_1 \cdot n^{-1}$ und $v_+^{-1} \cdot r_+^{-1} = v_+^{-1} \cdot v_2^{-1} = v_1$.
Zusammen erhalten wir $\tau(r_+) \cdot x \cdot r_+^{-1} = \tau(r_+) \cdot (\tau(r_+)^{-1} \cdot n \cdot v_+^{-1}) \cdot r_+^{-1} = n \cdot v_1$, mit $\tau(n)^{-1} = n$ und $n \cdot v_1 \cdot n^{-1} = \tau(v_1)^{-1}$. ♢

Bemerkung 4.33 (i) Die Zerlegung $n \cdot v$ des Elements $\tau(r_+) \cdot x \cdot r_+^{-1}$ aus dem letzten Satz ist genau dann die eindeutige Zerlegung aus Proposition 4.30, wenn $v = e$ gilt, da $n \cdot v \cdot n^{-1} = \tau(v)^{-1} \in \tau(U^+)$ ist und $\tau(U^-) \cap \tau(U^+)$ trivial ist. Die Zerlegung $(n \cdot v \cdot n^{-1}) \cdot n \cdot e \in \tau(U^+) \cdot N$ ist dagegen stets die Zerlegung aus Proposition 4.30.

(ii) Wenn wir ein τ-symmetrisches $n \in N$ gegeben haben, und ein $v \in U^+$ derart, daß $n \cdot v$ wieder τ-symmetrisch ist, dann folgt die Gleichung
$n \cdot v \cdot n^{-1} = \tau(v)^{-1}$. ♢

Wir werden für das folgende eine weitere Involution von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ einführen:

Lemma 4.34 *Es sei $n \in N$ ein fixiertes τ-symmetrisches Element. Dann wird auf $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ durch*

$$\phi(g) := \tau(n \cdot g \cdot n^{-1}), \quad g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$$

eine stetige, differenzierbare Involution definiert. Ihre Ableitung $d\phi : \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist gegeben durch $d\phi(X) = \tau(Ad(n)\,X)$.
Es sei $U^{++} := \{q \in U^+ : \phi(q) \in U^+\} = U^+ \cap \phi(U^+)$. Dies ist eine ϕ-invariante Untergruppe von U^+;
es gilt $U^{++} = U^+ \cap (w_0 \cdot n)^{-1} \cdot U^- \cdot (w_0 \cdot n)$ mit dem Weyl Gruppen Element $w_0 \in W^\circ$ aus Proposition 4.27. Die Untergruppe U^{++} ist zusammenhängende und einfach zusammenhängende, nilpotente Lie Gruppe mit Lie Algebra $\mathfrak{u}^{++} = \mathfrak{u}^+ \cap Ad(w_0 \cdot n)^{-1}(\mathfrak{u}^+)$. Sie ist endlichdimensional.
Insbesondere ist die Exponentialabbildung von $\mathfrak{u}^{++}$ nach U^{++} ein surjektiver Diffeomorphismus.

Beweis: Es ist $\phi \circ \phi(g) = \tau(n \cdot \tau(n \cdot g \cdot n^{-1}) \cdot n^{-1}) = n^{-1} \cdot \tau(\tau(n \cdot g \cdot n^{-1})) \cdot n^{-1} = g$. Die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von ϕ folgt, da τ stetig und differenzierbar ist und ebenso Konjugation mit Gruppenelementen.
Die ϕ-Invarianz der Gruppe U^{++} und der Lie Algebra $\mathfrak{u}^{++}$ sind klar. Ebenso ist klar, daß $\mathfrak{u}^{++}$ die Lie Algebra von U^{++} ist.
Weiterhin gilt $U^{++} = U^+ \cap \phi(U^+) = U^+ \cap n^{-1} \cdot \tau(U^+) \cdot n = U^+ \cap n^{-1} \cdot (w_0^{-1} \cdot U^- \cdot$

$w_0) \cdot n = U^+ \cap (w_0 \cdot n)^{-1} \cdot U^- \cdot (w_0 \cdot n)$. Damit folgt, daß U^{++} endlichdimensional ist. Nach Proposition 4.21 und Lemma 4.22 gilt $U^+ = (U^+ \cap (w_0 \cdot n)^{-1} \cdot U^- \cdot (w_0 \cdot n)) \cdot (U^+ \cap (w_0 \cdot n)^{-1} \cdot U^+ \cdot (w_0 \cdot n)$. Wieder nach Proposition 4.21 ist dieses Produkt ein Diffeomorphismus auf die Gruppe U^+, welche nach Proposition 4.24 zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Dies gilt damit auch für die beiden Faktoren, insbesondere für die endlichdimensionale, nilpotente Lie Gruppe U^{++}. Nach [HilNe], Kapitel III, Satz 3.23, und Korollar 3.24 ist damit die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{u}^{++} \to U^{++}$ ein Diffeomorphismus. $\diamondsuit$

Bemerkung: Die Gleichung $\phi(U^+) = (w_0 \cdot n)^{-1} \cdot U^+ \cdot (w_0 \cdot n)$ gilt nicht elementweise, da Konjugation mit dem Weyl Gruppenelement $w_0 \in N/C$ nur auf der ganzen Untergruppe U^+ wohldefiniert ist. Bei elementweiser Konjugation ist $w_0 \cdot v \cdot w_0^{-1}, \quad v \in U^+$ natürlich abhängig vom gewählten Vertreter w_0. $\diamondsuit$

Wir zerlegen nun die nilpotente Lie Algebra $\mathfrak{u}^{++}$ in ihre (± 1)-Eigenräume bezüglich der Involution $d\phi$: $\quad \mathfrak{u}^{++} = \mathfrak{u}^{++}_{(+1)} \oplus \mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$. Damit gilt das Lemma:

Lemma 4.35 *Die Menge aller ϕ-symmetrischen Elemente in U^{++} ist genau* $\exp(\mathfrak{u}^{++}_{(-1)})$.

Beweis: Ist X in $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$, so gilt $\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi(X)) = \exp(-X) = (\exp(X))^{-1}$, und $\exp(X)$ ist ϕ-symmetrisches Element von U^{++}.
Es sei umgekehrt g ϕ-symmetrisch in U^{++}. Da die Exponentialabbildung surjektiv ist auf U^{++}, existiert ein Y in $\mathfrak{u}^{++}$, so daß $g = \exp(Y)$ gilt. Dann haben wir $\exp(d\phi(Y)) = \phi(g) = g^{-1} = \exp(-Y)$. Da die Exponentialabbildung auch injektiv ist, folgt $d\phi(Y) = -Y$, und das Lemma ist gezeigt. $\diamondsuit$

Nun können wir den nächsten Reduktionschritt durchführen:

Proposition 4.36 *Es sei n ein τ-symmetrisches Element in der Gruppe N und v in U^+, so daß $x := n \cdot v$ wieder τ-symmetrisch ist. Dann existiert ein Loop g in der Untergruppe U^+, so daß $\tau(g)^{-1} \cdot x \cdot g = n$ gilt.*

Beweis: Nach Bemerkung 4.33 (ii) gilt für x die Gleichung $n \cdot v \cdot n^{-1} = \tau(v)^{-1}$; das heißt $\phi(v) = v^{-1}$. Der Loop v liegt damit automatisch in U^{++} und ist ϕ-symmetrisch. Nach Lemma 4.35 existiert ein V in $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$, das unter der Exponentialabbildung auf v geht. Nun setzten wir $g := \exp(-\frac{1}{2} \cdot V)$ und rechnen: $\tau(g)^{-1} \cdot x \cdot g = \tau(\exp(\frac{1}{2}V)) \cdot n \cdot \exp(V) \cdot \exp(-\frac{1}{2}V) = n \cdot \tau(n \cdot \exp(\frac{1}{2}V) \cdot n^{-1}) \cdot \exp(\frac{1}{2}V) = n \cdot \phi(\exp(\frac{1}{2}V)) \cdot \exp(\frac{1}{2}V) = n \cdot \exp(d\phi(\frac{1}{2}V)) \cdot \exp(\frac{1}{2}V) =$
$n \cdot \exp(-\frac{1}{2}V) \cdot \exp(\frac{1}{2}V) = n.$ $\diamondsuit$

Es wird also die Reduktion des Elements $x = n \cdot v$ auf n vorgenommen mit einer ϕ-symmetrischen Quadratwurzel von v in U^{++}.
Von jetzt an haben wir es also nur noch mit τ-symmetrischen Elementen in der Gruppe N, dem Zentralisator der Cartan Untergruppe C in der polynomialen Loop Gruppe $\Lambda^{pol} G^{\mathbb{C}}$, zu tun.
Nach den einführenden Notationen und Bezeichnungen in diesem Abschnitt 4.3 hat

jedes $n \in N$ eine Faktorisierung $n = p \cdot h \cdot t$, wobei $t = t(\lambda) \in \mathbb{T}$ ein Homomorphismus der S^1 in den maximalen Torus T von U ist, p ein Element des Normalisators von $\mathfrak{t}$ in U ist und h in der Cartan Untergruppe C von $G^{\mathbb{C}}$ liegt. Diese Zerlegung ist nicht eindeutig, da $N_U(\mathfrak{t}) \cap C = T$ nicht trivial ist. Der Homomorphismus t hingegen ist eindeutig: Ist $n = p_1 \cdot h_1 \cdot t_1 = p_2 \cdot h_2 \cdot t_2$, so ist $t_1 \cdot t_2^{-1} = h_1^{-1} \cdot p_1^{-1} \cdot p_2 \cdot h_2$ ein konstanter Homomorphismus der S^1 nach T, also gleich dem neutralen Element e. Nun werden wir Eindeutigkeit in der ganzen Faktorisierung herstellen:

Lemma 4.37 *Zu jedem $n \in N$ existieren $q \in N_U(\mathfrak{t})$, $H_- \in \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ und $t \in \mathbb{T}$, so daß $n = q \cdot \exp(H_-) \cdot t$ gilt. Diese Zerlegung ist eindeutig.*

Beweis: n besitzt eine Zerlegung $n = p \cdot h \cdot t$, wie oben beschrieben. Wegen der Polarzerlegung $C = T \cdot \exp(\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$ existieren eindeutige $h_+ \in T$ und $H_- \in \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, so daß $h = h_+ \cdot \exp(H_-)$. Wir setzen $q := p \cdot h_+$. Dann ist wieder $q \in N_U(\mathfrak{t})$, und wir haben die gewünschte Zerlegung $n = q \cdot \exp(H_-) \cdot t$.
Der Homomorphismus t ist wie oben gezeigt eindeutig. Folglich ist für die Eindeutigkeit der ganzen Zerlegung nur $q_1 \cdot \exp(H_1) = q_2 \cdot \exp(H_2)$ anzusetzen. Da H_1, H_2 nach Voraussetzung in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} \leq i \cdot \mathfrak{u}$ liegen, zeigt bereits die Polar Zerlegung $G^{\mathbb{C}} = U \cdot \exp(i \cdot \mathfrak{u})$ der ganzen Lie Gruppe auch hier die Eindeutigkeit von $q \in N_U(\mathfrak{t})$ und $H \in \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$. ♢

Diese eindeutige Zerlegung wenden wir jetzt natürlich auf τ-symmetrische $n \in N$ an:

Proposition 4.38 *Es sei $n \in N$ τ-symmetrisch und $n = q \cdot \exp(H_-) \cdot t$ seine eindeutige Zerlegung nach Lemma 4.37. Dann gelten die Gleichungen $q = \tau(q)^{-1}$, $t = \tau(q \cdot t^{-1} \cdot q^{-1})$ und $H_- = \tau(Ad(q)(-H_-))$.*

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung $q \cdot \exp(H_-) \cdot t = n = \tau(n)^{-1} = \tau(t)^{-1} \cdot \tau(\exp(H_-)) \cdot \tau(q)^{-1} = \tau(q)^{-1} \cdot \tau(q \cdot \exp(-H_-) \cdot q^{-1}) \cdot \tau(q \cdot t \cdot q^{-1})$. Wenn gezeigt ist, daß der letzte Term wieder die Zerlegung aus 4.37 ist, so folgt die Behauptung mit der Eindeutigkeit: τ läßt die Gruppe $N_U(\mathfrak{t})$ invariant, da $\mathfrak{t}$ und U invariant sind unter τ, folglich ist $\tau(q)^{-1}$ wieder in $N_U(\mathfrak{t})$. Weiterhin läßt $Ad(q)$ die Unteralgebra $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ invariant, weil $i \cdot \mathfrak{u}$ und die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ darunter invariant sind ($q \in U$). Folglich ist auch $\exp(\tau(Ad(q)(-H_-)))$ wieder in $\exp(\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$. Schließlich ist auch $\tau(q \cdot t \cdot q^{-1})$ wieder ein Homomorphismus der S^1 in den maximalen Torus T, da $q \cdot T \cdot q^{-1} \subseteq C \cap U = T$ und $\tau(T) = T$ gilt. ♢

Jetzt können wir unser Element n ähnlich wie in Proposition 4.36 τ-symmetrisch reduzieren auf einen Loop in ΛU:

Proposition 4.39 *Es sei $n \in N$ τ-symmetrisch und $n = q \cdot \exp(H_-) \cdot t$ seine Zerlegung nach Lemma 4.37. Dann liegt n in der Bahn von $q \cdot t$ unter der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$*

Beweis: Der Beweis wird durch die folgende Rechnung geführt, wobei wir die Gleichungen aus der letzten Propositon verwenden:

$\tau(\exp(-\frac{1}{2}H_-))^{-1} \cdot n \cdot \exp(-\frac{1}{2}H_-) = q \cdot \tau(q \cdot \exp(\frac{1}{2}H_-) \cdot q^{-1}) \cdot \exp(H_-) \cdot t \cdot \exp(-\frac{1}{2}H_-) = q \cdot \exp(\tau(Ad(q)(\frac{1}{2}H_-))) \cdot \exp(+\frac{1}{2}H_-) \cdot t = q \cdot \exp(-\frac{1}{2}H_-) \cdot \exp(+\frac{1}{2}H_-) \cdot t = q \cdot t$. $\diamondsuit$

Bis jetzt haben wir also gezeigt, daß jeder τ-symmetrische Loop $x \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ unter der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ auf der Menge $\mathcal{T}$ aller τ-symmetrischen Loops in der Bahn eines Elements $q \cdot t$ liegt, wobei q in $N_U(\mathfrak{t})$ und t in T liegt, und die Gleichungen $q = \tau(q)^{-1}$ und $t^{-1} = \tau(q \cdot t \cdot q^{-1})$ gelten. Für die nächsten Reduktionsschritte benötigen wir nicht nur die Voraussetzung, daß x τ-symmetrisch ist, sondern auch, daß ein Loop g in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ existiert, der x splittet, das heißt $x = \tau(g)^{-1} \cdot g$. Die τ-symmetrischen und in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ splittbaren Loops sind natürlich die Vereinigung von vollen Bahnen der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ auf $\mathcal{T}$.

Satz 4.40 *Es sei $n = q \cdot t$ τ-symmetrisch in der Faktorisierung, die in Proposition 4.39 konstruiert wurde. Dann hat q eine τ-symmetrische Splittung in der maximal kompakten Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$, das heißt, es existiert ein $r_+ \in U$, so daß $q = \tau(r_+)^{-1} \cdot r_+$ gilt.*

Beweis: Nach Voraussetzung existiert ein Loop g in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, so daß $\tau(g)^{-1} \cdot g = q \cdot t$. Da die Wirkung von τ auf unsere Loop Gruppe punktweise ist, und ebenso die Verknüpfung in der Loop Gruppe, vertauschen τ und Inversenbildung mit der Punktauswertung $\lambda \mapsto \lambda_0 \in S^1$. Weil $t(\lambda = 0) = e$ gilt, folgt die Existenz eines Elements r in $G^{\mathbb{C}}$, so daß $q = \tau(r)^{-1} \cdot r$ gilt. Dann bekommen wir die folgende Gleichung: $\tau(r)^{-1} \cdot r = q = \theta(q) = \theta(\tau(q)^{-1}) = \theta \circ \tau(\tau(r)^{-1} \cdot r)^{-1} = \theta \circ \tau(r^{-1} \cdot \tau(r)) = \tau(\theta(r)^{-1}) \cdot \tau(\theta(\tau(r))) = \tau(\theta(r)^{-1}) \cdot \theta(r)$.
Dies ist äquivalent zur Gleichung $r \cdot \theta(r)^{-1} = \tau(r \cdot \theta(r)^{-1})$. Daher existiert ein f in $Fix(\tau)$, so daß $\theta(r) = f \cdot r$. Dieses f ist θ-symmetrisch, da $f = \theta(r) \cdot r^{-1}$.
Nun zerlegen wir das Element r bezüglich der Polar Zerlegung in $G^{\mathbb{C}}$. Das heißt, wir finden Elemente U in $\mathfrak{u} (= Fix(\theta)$ in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ und r_+ in der maximal kompakten Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$, so daß $r = \exp(i \cdot U) \cdot r_+$ gilt. Dies liefert $f = \theta(r) \cdot r^{-1} = (\exp(-i \cdot U) \cdot r_+) \cdot (\exp(i \cdot U) \cdot r_+)^{-1} = \exp(-i \cdot U) \cdot \exp(-i \cdot U) = \exp(-2 \cdot i \cdot U)$. Wir setzen $F := -2 \cdot i \cdot U$ und schließen $\exp(F) = f = \tau(f) = \exp(\tau(F))$. Da die Exponentialabbildung auf dem (τ-invarianten) Unterraum $i \cdot \mathfrak{u}$ injektiv ist, folgt $\tau(F) = F$. Damit wird auch $r_- := \exp(i \cdot U) = \exp(-\frac{1}{2}F)$ von τ fixiert. Zusammen erhalten wir $q = \tau(r)^{-1} \cdot r = \tau(r_- \cdot r_+)^{-1} \cdot r_- \cdot r_+ = \tau(r_+)^{-1} \cdot \tau(r_-)^{-1} \cdot r_- \cdot r_+ = \tau(r_+)^{-1} \cdot r_+$ und sind fertig. $\diamondsuit$

Bemerkung: Das Element r welches q in $G^{\mathbb{C}}$ τ-symmetrisch splittet, können wir direkt ermitteln, sofern das τ-symmetrische Element x von der Form $\tau(g)^{-1} \cdot g$ ist: Wir haben nämlich in dem Verfahren einen Loop z bestimmt, für den $\tau(z)^{-1} \cdot x \cdot z = q \cdot t$ gilt. Dann ist $q = \tau(r)^{-1} \cdot r$ mit $r := g \cdot z|_{\lambda=1}$.

Nun werden wir die letzte Reduktion bezüglich der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ vornehmen. Dies wird uns Homomorphismen in einen (anderen) maximalen Torus von U liefern:

Proposition 4.41 *Es sei $n \in N$ τ-symmetrisch und τ-symmetrisch splittbar in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Weiterhin sei $n = q \cdot t$ die Zerlegung nach Proposition 4.39 und $q = \tau(r_+)^{-1} \cdot r_+$ mit $r_+ \in U$ nach Satz 4.40. Dann ist $\tau(r_+) \cdot n \cdot r_+^{-1} = r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}$ ein Homomorphismus der S^1 in den maximalem Torus $r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$. Dieser ist wieder τ-invariant.*

Beweis: Es ist $\tau(r_+) \cdot n \cdot r_+^{-1} = \tau(r_+) \cdot q \cdot t \cdot r_+^{-1} = r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}$.
Offensichtlich ist $r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}$ ein Homomorphismus in die Gruppe $r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$. Da r_+ in U liegt, ist $r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$ wieder ein maximaler Torus.
Dieser ist auch τ-invariant: $\tau(r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}) = \tau(r_+) \cdot T \cdot \tau(r_+)^{-1} = r_+ \cdot q^{-1} \cdot T \cdot q \cdot r_+^{-1} = r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$, weil q den Torus T normalisiert.
Der Homomorphismus $r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}$ ist mit n natürlich wieder τ-symmetrisch und splittbar. $\diamondsuit$

Wir haben es also nun nur noch zu tun mit τ-symmetrischen Homomorphismen in maximale Tori, die τ-invariant sind. Bevor wir uns daran machen, solche Homomorphismen τ-symmetrisch in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ zu splitten, müssen wir noch ein wichtiges Problem lösen:
Wenn wir ein τ-symmetrisches und splittbares $n = q \cdot t \in N$ in der Zerlegung nach Proposition 4.39 gegeben haben, so existieren im allgemeinen überabzählbar viele Elemente c im maximalen Torus T, so daß $n' := q \cdot c \cdot t$ wieder τ-symmetrisch und splittbar ist. Ein Beispiel für diesen Fall geben wir unten. Die in Proposition 4.41 konstruierten r_+ in U liefern damit überabzählbar viele maximale Tori $r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$ in U. Es sind aber tatsächlich nur endlich viele:

Satz 4.42 *Es sei $n = q \cdot t$ ein τ-symmetrisches und splittbares Element von N in der Faktorisierung aus Proposition 4.39, sowie $r^+ \in U$ (aus Satz 4.40) mit $q = \tau(r_+)^{-1} \cdot r_+$.*
Weiterhin sei $c \in T$ derart, daß $n \cdot c$ $(= q \cdot c \cdot t)$ wieder τ-symmetrisch und splittbar ist. Dann existiert ein s in $T' := r_+ \cdot T \cdot r_+^{-1}$ von der Ordnung 2, so daß $r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1} \cdot s$ in der Bahn der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ des Elements $n \cdot c$ liegt.
Die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in T' ist $2^l - 1$, wobei l gleich der Mächtigkeit eines Systems einfacher Wurzeln des Wurzelsystems Δ° von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist.

Beweis: Das Element $n = q \cdot c \cdot t$ liegt in der $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$-Bahn von $\tau(r_+) \cdot q \cdot c \cdot t \cdot r_+^{-1} = r_+ \cdot c \cdot t \cdot r_+^{-1} = (r_+ \cdot c \cdot r_+^{-1}) \cdot (r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}) \in T' \cdot \mathbb{T}'$, wobei $\mathbb{T}' = r_+ \cdot \mathbb{T} \cdot r_+^{-1}$ gesetzt wird. Weiter sei $c' := r_+ \cdot c \cdot r_+^{-1}$ und $t' := r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1}$.
Nach Proposition 4.41 ist der maximale Torus T' τ-invariant, desselben seine Lie Algebra $\mathfrak{t}' \leq \mathfrak{u}$. Dann ist $\mathfrak{c}' := \mathfrak{t}' \oplus i \cdot \mathfrak{t}'$ eine τ-invariante Cartan Unteralgebra mit kanonischer, reeller Form $\mathfrak{c}'_{\mathbb{R}} = i \cdot \mathfrak{t}'$. Es existiert ein H in $\mathfrak{t}'$ mit $c' = exp(H)$. Mit dem Element $n \cdot c$ ist auch $t' \cdot c'$ τ-symmetrisch und splittbar. Da t' und c' vertauschen, gilt dasselbe für c'. Insbesondere ist $e = \tau(c') \cdot c' = \exp(\tau(H)) \cdot \exp(H) = \exp(\tau(H) + H)$. Nun können wir das Element $t' \cdot c'$ mit einem Element aus T' τ-symmetrisch abändern: $t' \cdot c' \mapsto \tau(\exp(-\frac{1}{2}H))^{-1} \cdot t' \cdot c' \cdot \exp(-\frac{1}{2}H) = t' \cdot \exp(+\frac{1}{2}\tau(H)) \cdot \exp(H) \cdot \exp(-\frac{1}{2}H) = t' \cdot \exp(\frac{1}{2} \cdot (H + \tau(H)))$. Es ist $\exp(\frac{1}{2} \cdot (H + \tau(H)))$

gleich e oder hat Ordnung 2, und liegt in T'.

Es ist $t' = \prod_{\alpha\in\Pi^\circ} \exp(i\cdot \mathbb{R}\cdot H_\alpha) \cong (S^1)^l$. Damit hat jeder maximale Torus 2^l Elemente, deren Quadrat e ist. $\diamondsuit$

Bemerkung 4.43 Mit dem letzten Satz haben wir also ein diskretes Vertretersystem der τ-symmetrischen und splittbaren Elemente unter der Operation von $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ indem wir wie folgt vorgehen: Wir suchen in jeder Doppelnebenklasse von unserem fixierten, maximalen Torus T in $N_U(\mathfrak{t})$ nach einem Vertreter q, der τ-symmetrisch und splittbar ist. Dies sind (aller-) höchstens $|W^\circ|$ viele. Zu jedem solchen q ermitteln wir ein r_+ in U nach Satz 4.40, welches q splittet: $q = \tau(r_+)^{-1}\cdot r_+$.
Dann berechnen wir alle Homomorphismen $t(\lambda) \in \mathbb{T}$, die $t^{-1} = \tau(q\cdot t\cdot q^{-1})$ genügen. Diese Eigenschaft eines Homomorphismus ist natürlich unabhängig von gewählten Vertreter q, das heißt, sie ist nur von der Nebenklasse $q\cdot T$ abhängig. Die Menge aller solchen Homomorphismen ist eine Untergruppe von $\mathbb{T}\,(\cong (\mathbb{Z})^l)$, also isomorph zu einem $(\mathbb{Z})^k$ mit $0\le k\le l$. Insbesondere ist dies eine diskrete Menge.

Zuletzt berechnen wir alle Elemente s in $T' := r_+\cdot T\cdot r_+^{-1}$ der Ordnung 2, welche τ-symmetrisch und splittbar sind. Mit $t' := r_+\cdot t\cdot r_+^{-1}$ ist dann das Element $s\cdot t' = t'\cdot s \in \mathbb{T}'\cdot T'$. Wenn diese Element s eine Splittung in T' besitzt, so können wir $s\cdot t'$ τ-symmetrisch (mit $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$) reduzieren auf den Homomorphismus $t'\in\mathbb{T}'$. Andernfalls behandeln wir das Element $s\cdot t'$ noch einmal mit Satz 4.40, das heißt wir finden ein r'_+ in U, sodaß $s = \tau(r'_+)^{-1}\cdot r'_+$ gilt; dann reduzieren wir $s\cdot t' \mapsto \tau(r'_+)\cdot s\cdot t'\cdot (r'_+)^{-1} = r'_+\cdot t'\cdot (r'_+)^{-1} \in \mathbb{T}'' := (r'_+\cdot r_+)\cdot\mathbb{T}\cdot(r'_+\cdot r_+)^{-1}$.
Die Aussage des Satzes 4.42 ist, daß die Anzahl der so entstehenden maximalem Tori höchstens gleich der Mächtigkeit der Weyl Gruppe $W^\circ \cong N_U(\mathfrak{t})/T$ mal der Anzahl der Elemente der Ordnung 2 und 1 in einem maximalen Torus ist, das heißt höchstens $|W^\circ|\cdot 2^l$. Insgesamt erhalten wir eine diskrete, höchstens abzählbar unendliche Menge von Homomorphismen der S^1 in endlich viele, verschiedene, maximale Tori derart, daß jeder τ-symmetrische und splittbare Loop bezüglich der Operation von $\Lambda^+G^{\mathbb{C}}$ in der Bahn eines der konstruierten Homomorphismen liegt. $\diamondsuit$

Es folgen jetzt zwei
Beispiele:
(i) Wir setzen $G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$ und definieren

$$\tau(g) := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot \bar{g}^{T-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad g\in SL(2,\mathbb{C}).$$

Weiterhin nehmen wir die kanonische Cartan Involution $\theta(g) := (\bar{g})^{T-1}$ die mit τ vertauscht.
Als Cartan Untergruppe C wählen wir die Diagonalmatrizen in $SL(2,\mathbb{C})$. Wir nehmen für q ein triviales Weyl Gruppenelement. Die Homomorphismen der S^1 in den maximalen Torus $T = SU(2)\cap C$ sind von der Gestalt $diag(\lambda^k,\lambda^{-k})$, $k\in\mathbb{Z}$,

und nur der triviale ist τ-symmetrisch. Nach Satz 4.42 brauchen wir nur nach den Elementen der Ordnung 2 und 1 in T zu suchen, die τ- symmetrisch und splittbar sind. Dies ist neben dem neutralen Element nur die Matrix $c := diag(-1,-1)$. Diese Matrix hat weder im Torus T noch in C eine Splittung, wie man sofort errechnet. Es gilt aber die Gleichung

$$\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dies ist also die Matrix r_+ in $U = SU(2)$, die c splittet.

(ii) Im zweiten Beispiel gehen wir von der Gruppe $G^{\mathbb{C}} = SL(3,\mathbb{C})$ aus mit der reellen Form $G = SL(3,\mathbb{R})$; es ist also $\tau(g) = \bar{g}$. Als Cartan Involution wählen wir wieder $\theta(g) = (\bar{g})^{T-1}$ auf $G^{\mathbb{C}}$, beziehungsweise $\theta(X) = -\bar{X}^T$ auf der zugehörigen Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = sl(3,\mathbb{C})$. Die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ beziehungsweise Cartan Untergruppe C seien wieder die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $G^{\mathbb{C}}$.
Wir greifen uns diesmal als Weyl Gruppenelement die Spiegelung an der Wurzel $\alpha_{1,2}$ heraus, wählen einen Vertreter q in der zugehörigen Nebenklasse von $T = C \cap SU(3)$ im Normalisator von $\mathfrak{t} = \mathfrak{c} \cap su(3)$ in $U = SU(3)$, der τ-symmetrisch und splittbar ist. Ein solcher ist gegeben mit

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in N_U(\mathfrak{t})$$

Die Gruppe aller Homomorphismen der S^1 nach T, die der Gleichung $t^{-1} = \tau(q \cdot t \cdot q^{-1})$ genügen, ist dann $\{diag(\lambda^k, \lambda^k, \lambda^{-2k}) : k \in \mathbb{Z}\}$.
Eine Splittung des Weyl Gruppenelements q der Gestalt $q = \tau(r_+)^{-1} \cdot r_+$ ist gegeben mit

$$r_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \in SU(3).$$

Wir bestimmen nun zunächst alle Elemente c in T, für welche $q \cdot c$ wieder τ-symmetrisch ist. Eine kurze Rechnung zeigt, daß dies die Gruppe $\{diag(\mu, \mu, \mu^{-2}) : \mu \in S^1\}$ ist.
Diese Elemente vertauschen (in diesem Fall) alle mit q und lassen sich τ-symmetrisch in T splitten, es ist nämlich $\tau(b)^{-1} \cdot b = diag(\mu, \mu, \mu^{-2})$ mit der ebenfalls τ-symmetrischen Matrix $diag(\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}, \mu^{-1})$ mit einer fest gewählten Wurzel $\sqrt{\mu}$ von $\mu \in S^1$. Wir haben also zum Weyl Gruppenelement q die τ-symmetrischen Homomorphismen $r_+ \cdot t \cdot r_+^{-1} \in r_+ \cdot \mathbb{T} \cdot r_+^{-1}$ mit $t = diag(\lambda^k, \lambda^k, \lambda^{-2k})$ $(k \in \mathbb{Z})$ ermittelt. $\diamondsuit$

Nun kommen wir zum letzten Schritt. Eine weitere Reduktion der τ-symmetrischen Homomorphismen ist jetzt nicht mehr möglich. Wir sind nun in der folgenden Ausgangslage:

Es ist T ein τ-invarianter, maximaler Torus der maximal kompakten Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$, und wir haben einen Homomorphismus der S^1 nach T gegeben, der τ-symmetrisch ist. Die Lie Algebra von T sei $\mathfrak{t}$, und $\mathfrak{c} := \mathfrak{t} \oplus i \cdot \mathfrak{t}$ die zugehörige Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit kanonischer, reeller Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = i \cdot \mathfrak{t}$.
Den τ-symmetrischen Homomorphismus t wollen wir nun in der vollen Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ τ-symmetrisch splitten. Wir werden sehen, daß dies nicht immer möglich ist, aber wir haben ein hinreichendes Kriterium, welches nur von der gewählten, reellen Form G von $G^{\mathbb{C}}$ abhängt und sicherstellt, wann die Splittung der Homomorphismen immer möglich ist. Zunächst brauchen wir noch etwas Vorbereitung (siehe [Helg], Chapter VII, § 7, Lemma 7.6 und Corollar 7.8):

Proposition 4.44 *Es sei* $\mathfrak{t}_e := \{T \in \mathfrak{t} : \exp(T) = e\}$ *das sogenannte Einheitsgitter in* $\mathfrak{t}$. *Dies ist eine endlich erzeugte, abelsche Gruppe vom Rang* $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{t}) = l$.
Es existieren Elemente $C_1, \ldots, C_l$ *in* $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, *so daß* $\{2\pi i C_1, \ldots, 2\pi i C_l\}$ *eine Basis des Gitters* $\mathfrak{t}_e$ *ist.*
Es sei für jedes $\alpha \in \Delta^\circ$ *das Element* H_α *definiert durch* $\kappa(H, H_\alpha) = \alpha(H) \quad \forall H \in \mathfrak{c}$. *Dann ist* $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = \sum_{\alpha \in \Delta^\circ} \mathbb{R} \cdot H_\alpha$ *und die von der Menge* $\{(2\pi i)\frac{2}{(\alpha,\alpha)} \cdot H_\alpha : \alpha \in \Delta^\circ\}$ *erzeugte, additive Gruppe* $\mathfrak{t}_{\Delta^\circ}$ *ist ein Untergitter des Einheitsgitters* $\mathfrak{t}_e$, *wobei das Skalarprodukt aus* $(\alpha, \beta) := \kappa(H_\alpha, H_\beta)$ *kommt.*
Wenn die maximal kompakte Untergruppe U *von* $G^{\mathbb{C}}$ *einfach zusammenhängend ist, so sind die Gitter gleich :* $\mathfrak{t}_{\Delta^\circ} = \mathfrak{t}_e$. *In diesem Fall ist* $\{\frac{4\cdot\pi\cdot i}{(\alpha,\alpha)} \cdot H_\alpha : \alpha \in \Pi^\circ\}$ *eine Basis von* $\mathfrak{t}_e$, *wobei* Π° *eine Basis des Wurzelsystems* Δ° *sei.*

Es existiert noch ein weiteres interessantes Gitter in $\mathfrak{t}$: Wir setzen $\mathfrak{t}(\mathfrak{u}) = \{H \in \mathfrak{t} : \exp(H) \in Z\}$, wobei Z das Zentrum von $G^{\mathbb{C}}$ bezeichne, (dies liegt bekanntlich stets in U). Dann gilt (siehe [Helg], Ch VII, § 6, Lemma 6.5): $\mathfrak{t}(\mathfrak{u}) = \{H \in \mathfrak{t} : \alpha(H) \in 2 \cdot \pi \cdot i\,\mathbb{Z}\}$. Insbesondere ist $\mathfrak{t}_e$ ein Untergitter von $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$, und dieses ist unabhängig von der kompakten Lie Gruppe U, deren Lie Algebra $\mathfrak{u}$ ist.
Das Einheitsgitter $\mathfrak{t}_e$ hängt dagegen von der gewählten Lie Gruppe U zur Lie Algebra $\mathfrak{u}$ ab; das Einheitsgitter und $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$ stimmen genau dann überein, wenn das Zentrum von U trivial ist.

Beispiel: Die kompakte Gruppe $SU(n)$ ist für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend. In der Komplexifizierung $sl(n,\mathbb{C})$ der zugehörigen Lie Algebra $su(n)$ ist die Killing Form gegeben durch $\kappa(X,Y) = 2n \cdot Spur(X \cdot Y)$. Wir nehmen die Diagonalmatrizen in $sl(n,\mathbb{C})$ als Cartan Unteralgebra und betrachten die Linearformen $e_i(diag(z_1, \ldots, z_n)) = z_i$. Dann sind die Wurzeln gegeben mit $\alpha_{ij} = e_i - e_j \; i \neq j$. Wir setzen an $H_{\alpha_{i,j}} = x_{i,j} \cdot (E_{ii} - E_{jj})$. Dann erhalten wir mit $\alpha = \alpha_{ij}$ die Gleichung $2x_{ij} = \alpha(H_\alpha) = (\alpha,\alpha) = \kappa(H_\alpha, H_\alpha) = 2n \cdot Spur(H_\alpha^2) = 2n \cdot 2x_{ij}^2$. Dies liefert $x_{ij} = \frac{1}{2n}$ und $(\alpha,\alpha) = \frac{1}{n}$ für alle $i \neq j$. Damit ist $\frac{2}{(\alpha,\alpha)} \cdot H_\alpha = E_{ii} - E_{jj}$. Es ist also $\frac{4\cdot\pi\cdot i}{(\alpha,\alpha)} \cdot H_\alpha = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot (E_{ii} - E_{jj})$ für $\alpha = \alpha_{ij}$. Wir können für die Basis des Gitters $\mathfrak{t}_e$ nach Proposition 4.44 folglich $C_k := 2\pi i \cdot (E_{kk} - E_{k+1,k+1})$ für $1 \leq k \leq l = n-1$ wählen. Das Einheitsgitter $\mathfrak{t}_e$ hat in diesem Fall den Index n im Gitter $\mathfrak{t}(\mathfrak{u})$. $\diamondsuit$

Wir kehren nun zurück zu Homomorphismen $t : S^1 \to T$. Indem wir die Ableitung von $t(\lambda)$ bei $\lambda = e$ bilden, finden wir ein Element H in T, so daß $t(\lambda = e^{i\cdot\varphi}) = \exp(\varphi \cdot H)$ für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt. Dieses H ist auch eindeutig. Insbesondere ist $\exp(2\cot\pi H) = e$; es liegt also $2\pi \cdot H$ im Einheitsgitter $\mathfrak{t}_e$. Damit existieren eindeutig bestimmte, ganze Zahlen m_j, so daß $H = i \cdot \sum_{j=1}^{l} m_j \cdot C_j$ gilt. Wir fassen zusammen:

Proposition 4.45 *Die Gruppe $\mathcal{T}$ aller Homomorphismen der S^1 ist gleich*

$$\{\lambda = e^{i\cdot\varphi} \mapsto \exp(i\,\varphi\,H) \,:\, H = \sum_{j=1}^{l} n_j \cdot C_j,\ n_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Diese Gruppe ist kanonisch isomorph zu Z^l. Die Untergruppe aller τ-symmetrischen Homomorphismen ist $\{t \in \mathcal{T} \,:\, t = \exp(i\,\varphi\,H) \text{ mit } \tau(H) = H\}$.

Beweis: Mit der Vorarbeit bleibt für den ersten Teil der Proposition nur zu zeigen, daß $\exp(i\,\varphi\,H)$ mit $H \in \mathfrak{t}_e$ einen Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\cdot\varphi})$ definiert. Dies ist jedoch klar.
Für einen τ-symmetrischen Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\cdot\varphi}) = \exp(i\,\varphi\,H)$ gilt $\exp(-i\,\varphi \cdot \tau(H)) = \exp(\tau(i\,\varphi\,H)) = \tau(\exp(i\,\varphi\,H)) = \tau(t) = t^{-1} = \exp(-i\,\varphi\,H)$ für **alle** $\varphi \in \mathbb{R}$. Damit ist $-i \cdot \tau(H) = -i \cdot H$ oder $\tau(H) = H$. Die Umkehrung ist trivial. $\diamondsuit$

Jetzt können wir schließlich die Splittung unseres τ-symmetrischen Homomorphismus vornehmen. Die hier entscheidende Idee, die 4π-periodische Kurve ψ in Gleichung (5.10) durch die Kurve η aus (5.11) zu einer 2π-periodischen Kurve zu schließen, verdanke ich Prof. Dorfmeister:

Satz 4.46 *Es sei $t(\lambda = e^{i\cdot\varphi}) = \exp(i\,\varphi\,H)$ ein τ-symmetrischer Homomorphismus in den τ-invarianten, maximalem Torus T. Dann wird durch*

$$\begin{array}{lcl} \psi & : & \mathbb{R} \to T \\ \psi & : & \varphi \mapsto \psi(\varphi) := \exp(\tfrac{1}{2} i\,\varphi\,H) \end{array} \tag{4.10}$$

eine analytische Abbildung von $\mathbb{R}$ in den Torus T definiert. Diese ist punktweise τ-symmetrisch, und $\psi(2\pi)$ ist gleich e oder hat Ordnung 2. Insbesondere wird $\psi(2\pi)$ von τ fixiert.
Wenn $\psi(2\pi)$ ungleich dem neutralen Element e ist und in der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von $Fix\,(\tau)$, das heißt in G liegt, so existiert ein X in $\mathfrak{k} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{g}$, so daß $\psi(2\pi) = \exp(2\pi \cdot X)$ gilt. Dann definiert

$$\begin{array}{lcl} \eta & : & \mathbb{R} \to K \\ \eta & : & \varphi \mapsto \eta(\varphi) := \exp(\varphi \cdot X) \end{array} \tag{4.11}$$

eine analytische Abbildung von $\mathbb{R}$ nach K, und

$$\begin{array}{lcl} \tilde{s} & : & \mathbb{R} \to U \\ \tilde{s} & : & \varphi \mapsto \eta(\varphi) \cdot \psi(\varphi) \end{array} \tag{4.12}$$

ist analytische Abbildung von $\mathbb{R}$ nach U mit $\tilde{s}(2\pi) = \tilde{s}(0)$.
Für den Loop $s \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$, $s(\lambda = e^{i\varphi}) := \tilde{s}(\varphi)$ gilt $t = \tau(s)^{-1} \cdot s$.
Wenn $\psi(2\pi) = e$ ist, so setzen wir $s(\lambda = e^{\varphi}) = \psi(\varphi)$; dann splittet s wiederum den Homomorphismus t τ-symmetrisch. Wenn $\psi(2\pi)$ nicht in der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von $Fix(\tau)$, das heißt, nicht in G liegt, so hat t keine τ-symmetrische Splittung in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.

Beweis: Nach Proposition 4.45 wird das Element $H \in \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ von τ fixiert. Damit ist die Einparametergruppe ψ punktweise τ-symmetrisch. Nach Prososition 4.44 ist $\psi(2\pi) = \exp(i\,\pi\,H)$ gleich e oder hat die Ordnung 2. Damit ist $\psi(2\pi)$ in jedem Fall auch fix unter τ. Liegt $\psi(2\pi)$ in G und ist ungleich e, so liegt dieses Element auch in der zusammenhängenden, kompakten Gruppe $K = G \cap U$. Die Exponentialabbildung $\exp : \mathfrak{k} \to K$ ist surjektiv; daher existiert ein $X \in \mathfrak{k}$ mit $\psi(2\pi) = \exp(2\pi \cdot X)$, und die Einparametergruppe η aus Gleichung (4.11) läuft in K und hat die gewünschte Eigenschaft $\psi(2\pi) \cdot \eta(2\pi) = e$.
Nun können wir die Splittungseigenschaft von $\tilde{s}$ nachrechnen: $\tau(\tilde{s}(\varphi))^{-1} \cdot \tilde{s}(\varphi) = \tau(\psi(\varphi))^{-1} \cdot \eta(\varphi)^{-1} \cdot \eta(\varphi) \cdot \psi(\varphi) = \tau(\psi(\varphi))^{-1} \cdot \psi(\varphi) = \tau(\exp(\frac{1}{2}\,i\,\varphi H))^{-1} \cdot \exp(\frac{1}{2}\,i\,\varphi H) = \exp(-\frac{1}{2}\,i\,\varphi\,\tau(H))^{-1} \cdot \exp(\frac{1}{2}\,i\,\varphi H) = \exp(i\,\varphi\,H) = t(\lambda = e^{i\,\varphi})$, da η in K läuft, also punktweise von τ fixiert wird.
$\tilde{s}(\varphi)$ ist eine analytische Abbildung mit $\tilde{s}(2\pi) = \tilde{s}(0)\,(= e)$. Folglich ist der Loop s definiert und liegt in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Wenn $\psi(2\pi) = e$ ist, so wählen wir $X = 0$ und die Aussage folgt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß t keine Splittung hat, wenn $\psi(2\pi)$ nicht in der Zusammenhangskomponente von e in $Fix(\tau)$ liegt:
Wir führen den Beweis durch Widerspruch, das heißt, wir nehmen an, es existiere ein Loop $g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ derart, daß $t = \tau(g)^{-1} \cdot g$ gilt. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $g(1)$ gleich e ist, denn es gilt $e = t(1) = \tau(g(1))^{-1} \cdot g(1)$, folglich $\tau(g(1)) = g(1)$. Dann wird t auch von $g(1)^{-1} \cdot g(\lambda)$ gesplittet.
Wir betrachten die 2π-periodische, glatte Kurve $\tilde{g}(\varphi) := g(e^{i\varphi})$. Dann definieren wir mit der analytischen Kurve ψ aus Gleichung (4.10) die Kurve $\rho(\varphi) := \tilde{g}(\varphi) \cdot \psi(\varphi)^{-1}$ und zeigen, daß diese punktweise von τ fixiert wird:
$\tau(\psi(\varphi))^{-1} \cdot \psi(\varphi) = \psi(\varphi)^2 = t(e^{i\varphi}) = \tau(\tilde{g}(\varphi))^{-1} \cdot \tilde{g}(\varphi)$; dies liefert $\tilde{g}(\varphi) \cdot \psi(\varphi)^{-1} = \tau(\tilde{g}(\varphi) \cdot \psi(\varphi)^{-1})$, also die Behauptung.
Weiterhin gilt für die Kurve ρ: $\rho(0) = \tilde{g}(0) \cdot \psi(0)^{-1} = e \cdot e^{-1} = e$ und $\rho(2\pi) = \tilde{g}(2\pi) \cdot \psi(2\pi)^{-1} = e \cdot \psi(2\pi)^{-1} = \psi(2\pi)$. Dies ist der gewünschte Widerspruch, da die glatte Kurve ρ in $Fix(\tau)$ läuft und e mit $\psi(2\pi)$ verbindet. Diese Elemente liegen aber nach Voraussetzung in verschiedenen Komponenten von $Fix(\tau)$. $\diamondsuit$

Nach diesem Satz wollen wir noch die wichtige Frage klären, ob sich die Splittung eines τ-symmetrischen Homomorphismus $t(\lambda)$ mit einem Loop in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ durchführen läßt:

Satz 4.47 *Es sei $t(\lambda) \not\equiv e$ ein τ-symmetrischer Homomorphismus der S^1 in den τ-invarianten, maximalen Torus T von U. Dann existiert* **kein** *$k(\lambda)$ in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$, so daß $t = \tau(k)^{-1} \cdot k$ gilt.*
Wenn g ein Loop in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ ist, für welchen das Element $\tau(g)^{-1} \cdot g$ in der Bahn des Elements $t \not\equiv e$ unter der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ liegt, so ist g nicht in der „big cell" $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.

Beweis: Wir führen den Beweis der ersten Aussage durch Widerspruch: Wir nehmen an, es sei $e \not\equiv t = \tau(k)^{-1} \cdot k$ mit einem k in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$. Dann zerlegen wir k wie folgt: $k(\lambda) = k|_{\lambda=0} \cdot (k|_{\lambda=0})^{-1} \cdot k(\lambda)$. Dann ist $k|_{\lambda=0}$ in $G^{\mathbb{C}}$, und $(k|_{\lambda=0})^{-1} \cdot k(\lambda)$ liegt in der Untergruppe $U^{\lambda+}$ von U^+ (siehe auch Proposition 4.26) Es liegt $\tau((k|_{\lambda=0})^{-1} \cdot k(\lambda))^{-1}$ in $\tau(U^{\lambda+}) = U^{\lambda-} (\leq U^-)$.
Damit hat also unser $t(\lambda)$ eine Faktorisierung in $U^- \cdot G^{\mathbb{C}} \cdot U^+$. Der konstante Loop $\tau(k)^{-1}|_{\lambda=0} \cdot k|_{\lambda=0}$ in $G^{\mathbb{C}}$ liegt (nach der Birkhoff Zerlegung von $G^{\mathbb{C}}$) in einer Doppelnebenklasse $U^{\circ-} \cdot w \cdot C \cdot U^{\circ+}$ mit einem w in der Weyl Gruppe $W^\circ = N_{G^{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c})/C$. Also liegt t selbst in der Doppelnebenklasse $U^- \cdot w \cdot C \cdot U^+$. Es sind aber die Nebenklassen $t \cdot C$ und $w \cdot C$ genau dann gleich, wenn $w^{-1} \cdot t(\lambda)$ in C liegt. Da t nach Voraussetzung nicht konstant ist, folgt der Widerspruch.

Nun zeigen wir leicht den zweiten Teil der Aussage: Wenn $\tau(g)^{-1} \cdot g$ in der $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$-Bahn von t liegt, und wir annehmen, daß $g = h \cdot v_+$ mit einem h in ΛG und v_+ in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$, dann ist $\tau(v_+)^{-1} \cdot v_+ = \tau(g)^{-1} \cdot g = \tau(u_+)^{-1} \cdot t \cdot u_+$ mit einem u_+ in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$. Damit steht die daraus folgende Gleichung $t = \tau(v_+ \cdot u_+^{-1})^{-1} \cdot v_+ \cdot u_+^{-1}$ im Widerspruch zum ersten Teil dieses Satzes. ♢

Zuletzt zeigen wir noch eine Aussage zur Existenz weiterer Doppelnebenklassen bezüglich der Untergruppen ΛG und $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$:

Satz 4.48 *Wenn die Komplexkonjugation τ von $G^{\mathbb{C}}$ bezüglich G selbst eine Cartan Involution ist, dann ist G gleich U (das heißt $\tau = \theta$), und τ ist die negative Identität auf der kanonischen, reellen Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ jeder τ-invarianten Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Insbesondere wird jeder Homomorphismus in einen τ-invarianten, maximalen Torus T in U von τ fixiert. Es gilt in diesem Fall $\Lambda G^{\mathbb{C}} = \Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.*
Wenn τ **keine** *Cartan Involution ist, so existiert stets ein τ-symmetrischer und splittbarer Homomorphismus der S^1 in einen τ-invarianten, maximalen Torus der maximal kompakten Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$. Insbesondere ist $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ echte Teilmenge der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.*

Beweis: Es sei τ Cartan Involution, die mit der Cartan Involution θ vertauscht. Dann ist $\tau = \theta$. Daher ist τ die Identität auf jeder maximal abelschen Unteralgebra $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{u}$, und gleich der negativen Identität auf der kanonischen, reellen Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = i \cdot \mathfrak{t}$ der zugehörigen Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c} = \mathfrak{t} \oplus i \cdot \mathfrak{t}$. Nach Proposition 4.45 existiert zu jedem Homomorphismus t der S^1 in den zugehörigen maximalen Torus T von U ein Element H in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, so daß $t(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(i\varphi H)$ gilt. Daher ist $\tau(t) = \exp(-i\varphi\tau(H)) = \exp(-i\varphi \cdot (-H)) = \exp(i\varphi H) = t$. Folglich existieren (außer e) keine τ-symmetrischen Homomorphismen. Damit existiert nach Proposition 4.41 für jeden Loop g ein Element v_+ in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$, so daß das Element $\tau(g)^{-1} \cdot g = \tau(v_+)^{-1} \cdot v_+$ gilt. Dann ist $h := g \cdot v_+^{-1}$ in ΛG, und folglich ist g in $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.

Wir beweisen jetzt den zweiten Teil: Nach Voraussetzung ist nun τ nicht gleich der Idetität auf $\mathfrak{u}$. Wir konstruieren uns induktiv eine maximal abelsche, τ-invariante Unteralgebra von $\mathfrak{u}$, auf der τ nicht gleich der Identität ist. Dazu zerlegen wir $\mathfrak{u}$ in seine (± 1)-Eigenräume $\mathfrak{u}_\pm$ bezüglich τ.
Es sei $\mathfrak{t}_-$ eine maximal abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{u}_-$. Dann ist $\mathfrak{t}_- \neq \{0\}$, weil nach Voraussetzung $\mathfrak{u}_-$ nicht trivial ist. Weiter sei $\mathfrak{t}_+$ eine maximal abelsche Unteralgebra des Zentralisators $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_+}(\mathfrak{t}_-)$ von $\mathfrak{t}_-$ in $\mathfrak{u}_+$. Dann ist $\mathfrak{t} := \mathfrak{t}_+ + \mathfrak{t}_-$ eine τ-invariante Unteralgebra. Wir müssen noch zeigen, daß sie maximal abelsch ist in $\mathfrak{u}$: Es sei $Y = Y_+ + Y_-$ im Zentralisator von $\mathfrak{t}$. Dann vertauscht Y insbesondere mit jedem $X_- \in \mathfrak{t}_-$: $0 = [Y, X_-] = [Y_+, X_-] + [Y_-, X_-]$. Anwenden von τ zeigt, daß $[Y_+, X_-] = 0 = [Y_-, X_-]$ gilt. Folglich ist Y_- in $\mathfrak{t}_-$ und Y_+ in $\mathfrak{z}_{\mathfrak{u}_+}(\mathfrak{t}_-)$. Ebenso vertauscht Y mit allen Elementen in $\mathfrak{t}_+$, und das selbe Argument zeigt, daß Y_+ auch mit $\mathfrak{t}_+$ elementweise vertauscht, also in $\mathfrak{t}_+$ liegt. Zusammen folgt $Y \in \mathfrak{t}$.
Damit ist auch die kanonische, reelle Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = i \cdot \mathfrak{t}$ τ-invariant, und der $(+1)$-Eigenraum von τ auf $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ ist nicht trivial. Wir betrachten nun das Gitter in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, welches von den $C_1, \ldots, C_l$ aus Proposition 4.44 erzeugt wird. Dieses ist τ-invariant. Denn aus $\exp(2\pi\, i\, H) = e$ folgt $e = \tau(e) = \exp(-2\pi\, i\, \tau(H)) = \exp(2\pi\, i \cdot (-\tau(H)))$, also ist auch $-\tau(H)$ und damit $\tau(H)$ im Gitter. Unsere Involution τ kann nicht die negative Identität auf diesem Gitter sein, da $\{C_1, \ldots, C_l\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ ist, und der $(+1)$-Eigenraum von τ auf $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ nicht trivial ist. Daher existiert ein H im Gitter derart, daß $\tau(H) \neq -H$. Dann ist $\tilde{H} := H + \tau(H)$ ein τ-fixes Gitterelement ungleich 0. Der zugehörige Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\varphi}) := \exp(i\,\varphi\,\tilde{H})$ der S^1 nach $T := \exp(\mathfrak{t})$ ist dann τ-symmetrisch, braucht aber keine Splittung in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ zu besitzen. Jedoch ist dann $t^2\,(\not\equiv e)$ τ-symmetrisch mit Splittung $t^2 = \tau(t)^{-1} \cdot t$. Mit Satz 4.47 folgt dann die Behauptung. $\diamondsuit$

Bemerkung 4.49 (i) Auch wenn τ keine Cartan Involution von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist, existieren im allgemeinen maximal abelsche Unteralgebren von $\mathfrak{u}$, auf welchen τ als die Identität operiert, wie das folgende Beispiel zeigt:
Wir betrachten die Lie Algebra $sl(2,\mathbb{C})$ mit der reellen Form $su(1,1)$. Die zugehörige Involution τ ist gegeben durch $\tau(X) = -diag(1,-1)\,(\bar{X})^T\,diag(1,-1)$. Die τ-invariante, kompakte, reelle Form sei wie immer $su(2)$. Eine maximal abelsche Unteralgebra in dieser sind die rein imaginären Diagonalmatrizen mit Spur 0. Diese werden von τ fixiert.
(ii) Der erste Teil von Satz 4.48 ist bekannt: Zum Beispiel in [GoWal], Theorem 5.5:
Es sei $C^{\mathbb{R}} := \exp(\mathfrak{c}_{\mathbb{R}})$. Dann ist die Produktabbildung
$\Lambda U \times C^{\mathbb{R}} \times U^{\circ +} \times U^{\lambda +} \rightarrow \lambda G^{\mathbb{C}}$ ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten. Dies

ist die Verallgemeinerung der klassischen Iwasawa Zerlegung in endlichdimensionalen, halbeinfachen Lie Gruppen auf die Loop Gruppen, sofern die reelle Form (ΛU) von einer **Cartan Involution** der zugrundeliegenden Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ stammt.

Nun ist $U^{\circ +} \cdot U^{\lambda +} = U^+$ und die Gruppe $C^{\mathbb{R}} \cdot U^+$ liegt in B^+. Diese wiederum ist Untergruppe von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$. Folglich gilt stets $\Lambda U \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} = \Lambda G^{\mathbb{C}}$. $\diamondsuit$

Es werden zum Abschluß dieses Kapitels noch zwei Beispiele gebracht. Das erste wird zeigen, daß der zweite Fall im letzten Satz auch auftreten kann, das heißt, daß nicht immer alle τ-symmetrischen Homomorphismen gesplittet werden können, falls $Fix(\tau)$ nicht zusammenhängend ist. Das zweite illustriert das Verfahren in der Loop Gruppe $\Lambda SL(2,\mathbb{C})$ mit der reellen Form $\Lambda SL(2,\mathbb{R})$:

Beispiele:
(i) Wir wählen die Gruppe $G^{\mathbb{C}} = SO(n,\mathbb{C})$ $(n \geq 3)$ mit der Komplexkonjugation

$$\tau(g) = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \cdot \bar{g} \cdot \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}, \quad g \in G^{\mathbb{C}},$$

wobei $p,\, q \geq 1,\ p+q = n$. Eine mit τ vertauschende Cartan Involution von $G^{\mathbb{C}}$ ist gegeben durch $\theta(g) = (\bar{g})^{T-1}$.
Dann ist $Fix(\tau)$ die Menge aller Matrizen $g \in SL(n,\mathbb{C})$ mit $g \cdot g^T = E_n$, wobei g von der Gestalt

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ist, mit reellen Matrizen A und D und rein imaginären Matrizen B und C. Diese Gruppe hat zwei Zusammenhangskomponenten, da dies für die maximal kompakte Untergruppe K von $Fix(\tau)$ der Fall ist:
$K = Fix(\theta) \cap Fix(\tau) = S(O(p) \times O(q)) + : K_0 \cup K_1$, wobei K_0 isomorph ist zu $SO(p) \times SO(q)$ und K_1 zu $(diag(-1,1,\ldots,1) \cdot SO(p)) \times ((diag(-1,1,\ldots,1) \cdot SO(q)))$.
Damit hat $Fix(\tau)$ die beiden Komponenten (in Polarzerlegung):

$$G = K_0 \cdot \exp\left(\underbrace{\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix},\ B \in i \cdot \mathbb{R}^{p \times q} \}}_{=\mathfrak{p}} \right)$$

sowie die Nebenklasse $K_1 \cdot \exp(\mathfrak{p})$.

Wir nehmen uns nun das Element $Y := E_{p,p+1} - E_{p+1,p}$ in $\mathfrak{u} = so(n)$. Dann ist $\tau(Y) = -Y$, und es existiert eine maximal abelsche, τ-invariante Unteralgebra $\mathfrak{t}$ von $\mathfrak{u}$, die Y enthält. Es definiert damit $t(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(\varphi Y)$ einen τ-symmetrischen Homomorphismus in den zugehörigen, maximalen Torus $T = \exp(\mathfrak{t})$ von U, da $\exp(2\pi Y) = E_n$ ist. Für die Kurve $\psi(\varphi) = \exp(\frac{1}{2}\varphi Y)$ in Gleichung (4.10) gilt nun $\psi(2\pi) = diag(1,\ldots,1,-1,-1,1,\ldots,1)$. Diese Matrix liegt aber in

K_1, damit ist nach Satz 4.46 der Homomorphismus t nicht splittbar in $\Lambda SO(n,\mathbb{C})$.

(ii) Wir betrachten in diesem zweiten Beispiel die Gruppe $G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$. Diese kleine Lie Gruppe genügt, um das Prinzip der Splittung von Homomorphismen zu illustrieren, wie sie in Satz 4.46 allgemein durchgeführt wurde. Bis auf Isomorphie ist $SL(2,\mathbb{R})$ die einzige nicht kompakte, reelle Form von $SL(2,\mathbb{C})$. Wir wählen also $G = SL(2,\mathbb{R})$, und folglich ist $\tau(X) = \bar{X}$. Als τ-invariante, kompakte, reelle Form wählen wir $SU(2)$. Wir nehmen die Diagonalmatrizen kanonisch als Cartan Untergruppe beziehungsweise als Cartan Unteralgebra.
Nach dem Verfahren bestimmen wir zunächst ein Element q in der Gruppe $N_U(\mathfrak{t})$, welches in der nicht trivialen Nebenklasse der Weyl Gruppe $W^\circ = N_U(\mathfrak{t})/T$ liegt und τ-symmetrisch ist. Es ist $T = \{diag(\mu,\mu^{-1}) : \mu \in S^1\}$. Ein solches q ist gegeben durch $q = i \cdot (E_{1,2} + E_{2,1})$. Die Gruppe aller Homomorphismen der S^1 in den maximalen Torus T, die der Gleichung $t^{-1} = \tau(q \cdot t \cdot q^{-1})$ genügen, ist trivial, da $\tau(q \cdot diag(\lambda^k, \lambda^{-k}) \cdot q^{-1}) = \tau(diag(\lambda^{-k}, \lambda^k)) = diag(\lambda^k, \lambda^{-k})$ gilt. Sodann brauchen wir nur alle Elemente s in T der Ordnung 2 zu bestimmen, für welche $q \cdot s$ wieder τ-symmetrisch ist. Das einzige Element der Ordnung 2 in T, $(s = -e)$ erfüllt dies. Mit $r_1 := diag(i,-i) \in T$ hat s eine τ-symmetrische Splittung: $s = \tau(r_1)^{-1} \cdot r_1$. Dieses r_1 vertauscht allerdings nicht mit q. Aber es hat das Element s auch eine τ-symmetrische Splittung mit $r_2 := q$ selbst. Damit liegen q und $q \cdot s$ in der selben Bahn unter der Operation von $\Lambda^+ SL(2,\mathbb{C})$, wir brauchen also nur eine Splittung von q in $SL(2,\mathbb{C})$ zu finden. Es wird q gesplittet von der Matrix $r := \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (E_{11} + i \cdot E_{12} + i \cdot E_{21} + E_{22}) \in SU(2)$.
Nun begeben wir uns in die triviale Nebenklasse von T in $N_U(\mathfrak{t})$, das heißt, wir nehmen das neutrale Element e als τ-symmetrisches q. Die Gruppe aller Homomorphismen, die obiger Gleichung genügen, sind dann natürlich alle τ-symmetrischen Homomorphismen in den Torus T. Dies ist die volle Gruppe $\mathbb{T} = \{diag(\lambda^k, \lambda^{-k}) : k \in \mathbb{Z}\}$. Wieder ist $s = -e$ das Element, für welches $q \cdot s$ τ-symmetrisch ist. Allerdings vertauscht die Splittung von s mit dem Element r_1 mit allen Homomorphismen, so daß wir uns auf deren Splittung beschränken können.
Weiterhin stellen wir fest, daß mit der Matrix $p := E_{12} - E_{21} \in SU(2)$ stets gilt $t^{-1} = \tau(p)^{-1} \cdot t \cdot p$, das heißt, daß t und t^{-1} hier stets in der selben $\Lambda^+ SL(2,\mathbb{C})$-Bahn liegen. Dies ist **kein** allgemeines Phänomen, da die negative Identität auf einem Wurzelsystem Δ° im allgemeinen nicht durch ein Weyl Gruppen Element dargestellt wird, zum Beispiel in der Serie a_l für $l \geq 2$ von einfachen Lie Algebren.
Es bleibt uns also nur noch die Homomorphismen $t = diag(\lambda^k, \lambda^{-k})$ mit $k \geq 0$ gemäß Satz 4.46 zu splitten: Wenn k gerade ist, so wird ein solcher Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(i\varphi k \cdot diag(1,-1))$ gesplittet von $s_k(\lambda) = diag(\lambda^{\frac{k}{2}}, \lambda^{-\frac{k}{2}})$.
Wenn k ungerade ist, so betrachten wir die Kurve $\psi(\varphi) = \exp(\frac{k}{2} i\varphi \cdot diag(1,-1)) = diag(e^{\frac{i\varphi k}{2}}, e^{-\frac{i\varphi k}{2}})$. Dann ist $\psi(2\pi)$ die negative Einheitsmatrix. Wir müssen nun ein X in $\mathfrak{k} = so(2)$ berechnen, derart, daß $\exp(2\pi X) = -e$ ist. Dies wird bekanntlich von $X := \frac{1}{2} \cdot (E_{12} - E_{21}) \in so(2)$ geleistet. Dann wird $t(\lambda)$ τ-symmetrisch

gesplittet von dem Loop $s(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(\varphi X) \cdot \psi(\varphi)$ und es ist

$$
\begin{aligned}
s_k(\lambda) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi k}{2}} \cdot \cos(\frac{\varphi}{2}) & e^{-\frac{i\varphi k}{2}} \cdot \sin(\frac{\varphi}{2}) \\ -e^{\frac{i\varphi k}{2}} \cdot \sin(\frac{\varphi}{2}) & e^{-\frac{i\varphi k}{2}} \cdot \cos(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix} = \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{\frac{k+1}{2}} + \lambda^{\frac{k-1}{2}} & i \cdot (\lambda^{-\frac{k+1}{2}} - \lambda^{-\frac{k-1}{2}}) \\ i \cdot (\lambda^{\frac{k+1}{2}} - \lambda^{\frac{k-1}{2}}) & \lambda^{-\frac{k+1}{2}} + \lambda^{-\frac{k-1}{2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Damit sind wir mit diesem Beispiel fertig. Wir haben die disjunkte Doppelnebenklassenzerlegung von $\Lambda SL(2,\mathbb{C})$ bezüglich der Untergruppen $\Lambda SL(2,\mathbb{R})$ und $\Lambda^+ SL(2,\mathbb{C})$ konstruiert:
$\Lambda SL(2,\mathbb{C}) = \bigcup_{k\geq 0} \Lambda SL(2,\mathbb{R}) \cdot s_k(\lambda) \cdot \Lambda^+ SL(2,\mathbb{C})$. $\diamondsuit$

4.4 Die Kodimensionen der Doppelnebenklassen

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit der Frage beschäftigen, welche Kodimension für jeden, im letzten Abschitt konstruierten Doppelnebenklassenvertreter s die Untermannigfaltigkeit $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ hat. Wir werden diese Fage nicht vollständig klären, können aber unter bestimmten Voraussetzungen an die reelle Lie Gruppe G zeigen, daß das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ eine offene und dichte Teilmenge der ganzen Loop Gruppe ist, indem wir zeigen, daß jede andere Doppelnebenklasse (endliche) positive Kodimension in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ hat.
Wir benötigen zunächst etwas Vorarbeit.

Lemma 4.50 *Es sei $\mathfrak{c}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ und $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ seine kanonische, reelle Form. Weiterhin sei X aus $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ und $\alpha \in \Delta^\circ$ eine Wurzel und $E_\alpha \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha \setminus \{0\}$. Dann gilt $Ad(\exp(i\varphi X))E_\alpha = e^{i\varphi\alpha(X)} \cdot E_\alpha$ für alle φ in $\mathbb{R}$.*
Wenn H in dem von $C_1, \ldots, C_l$ erzeugten Gitter in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ liegt, so ist $\alpha(H)$ in $\mathbb{Z}$ für alle α in Δ°. (siehe Proposition 4.44 zur Definition)

Beweis: Es ist $Ad(\exp(i\varphi X))E_\alpha = \exp(i\varphi ad(X))E_\alpha = e^{i\varphi\alpha(X)}E_\alpha$, da $[X, E_\alpha] = \alpha(X)E_\alpha$ gilt.
Die Voraussetzung an das Element H ist äquivalent zu $\exp(2\pi H) = e$ nach Proposition 4.44. Damit folgt $\alpha(H) \in \mathbb{Z}$. $\diamondsuit$

Die Eigenschaft $\alpha(H) \in \mathbb{Z}$ gilt natürlich auch für alle $H \in \mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, für welche $\exp(2\pi H)$ im Zentrum von $G^{\mathbb{C}}$ liegt.

Um Kodimensionen berechnen zu können, machen wir davon Gebrauch, daß jede Doppelnebenklasse $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ als Mannigfaltigkeit diffeomorph zu $s^{-1} \cdot \Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ ist, also zu einem Produkt abgeschlossener Untergruppen. Der Tangentialraum dieser Untermannigfaltigkeit beim neutralen Element ist die Summe der zugehörigen Loop Algbren: $s^{-1} \cdot \Lambda\mathfrak{g} \cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Die Kodimension dieses reellen Unterraums von $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist dann die Kodimension der betrachteten Doppelnebenklasse.
Wir kommen zum Hauptsatz dieses Abschnitts. Wir brauchen noch eine Definition:

Definition 4.51 *Es bezeichne für jede Wurzel $\alpha \in \Delta^\circ$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ bezüglich der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ $\mathcal{E}_\alpha$ den Unterraum der Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ aller Abbildungen der S^1 mit Werten im Wurzelraum $\mathbb{C}\cdot\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, das heißt, es ist $\mathcal{E}_\alpha = \{X(\lambda) \in \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} : X(\lambda) = f(\lambda)\cdot E_\alpha\}$, wobei E_α ein von Null verschiedener Vertreter aus $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$ ist. Weiterhin bezeichne $p_\alpha : \Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{E}_\alpha$ die Projektion der Loop Algebra auf $\mathcal{E}_\alpha$ bezüglich der Wurzelraumzerlegung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{c} \oplus \sum_{\alpha\in\Delta^\circ} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\alpha$ von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

Satz 4.52 *Es sei $t(\lambda)$ ein τ-symmetrischer Homomorphismus in den τ-invarianten, maximalem Torus T mit der Splittung $t = \tau(s)^{-1}\cdot s$ wie sie in Satz 4.46 konstruiert wurde. Dann hat t die Darstellung $t(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(i\varphi H_0)$, wobei H_0 von τ fixiert wird und in dem von den Elementen $C_1, \dots, C_l$ erzeugten Gitter in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ liegt.*
Es sei β eine Wurzel aus Δ°. Wenn $\tau(\beta) = \beta$ gilt, so ist die Kodimension des reellen Unterraums $p_\beta(s^{-1}\cdot\Lambda\mathfrak{g}\cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ in $\mathcal{E}_\beta$ gleich Null, falls $\beta(H_0)$ kleiner oder gleich 1 ist und sie ist gleich $\beta(H_0) - 1$, falls $\beta(H_0) \geq 2$.

Wenn $\tau(\beta) = \gamma \neq \beta$ gilt, so gilt $\beta(H_0) = \gamma(H_0)$, und die Kodimension von $(p_\beta + p_\gamma)(s^{-1}\cdot\Lambda\mathfrak{g}\cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ in $\mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_\gamma$ ist wiederum gleich Null, falls $\beta(H_0) \leq 1$ ist, und sie ist gleich $2\cdot(\beta(H_0) - 1)$, wenn $\beta(H_0) \geq 2$ ist.

Insbesondere ist die Kodimension $d(s)$ von $s^{-1}\cdot\Lambda\mathfrak{g}\cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ in der vollen Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ gleich

$$d(s) = \sum_{\beta\in\Delta^\circ,\beta(H_0)\geq 2} (\beta(H_0) - 1) = \frac{1}{2}\cdot \sum_{\beta\in\Delta^\circ,\beta(H_0)\neq 0} (|\beta(H_0)| - 1). \tag{4.14}$$

Beweis: Die erste Aussage ist klar nach Proposition 4.44 und 4.45.
Nach Lemma 4.50 ist $\beta(H_0)$ stets eine ganze Zahl.
Im ersten Fall läßt τ den komplex-eindimensionalen Wurzelraum $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_\beta$ invariant. Da τ $\mathbb{C}$-antilinear ist, existiert ein E_β in diesem Wurzelraum, welches fix ist unter τ.
Für den Beweis bezeichne hier F_+ die Menge aller Abbildungen $f(\lambda)$ der S^1 nach $\mathbb{C}$ derart, daß $f(\lambda)\cdot E_\beta$ in $\mathcal{E}_\beta$ liegt, und die Fourier Reihe von f die Gestalt $\sum_{k\geq 0} f_k\cdot\lambda^k$ hat. Analog werde F_- definiert. $F_-^\star$ bezeichne den Unterraum aller $f(\lambda)$ aus F_-, für welche $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$ gilt.
Für den Beweis bestimmen wir alle Funktionen f aus $F_-^\star$ derart, daß ein Loop v_+ aus $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ existiert, so daß $f\cdot E_\beta - v_+$ in $s^{-1}\cdot\Lambda\mathfrak{g}\cdot s$ liegt. Dies ist äquivalent zur Bedingung $s(f\cdot E_\beta - v_+)s^{-1} \in \Lambda\mathfrak{g}$. Dies wiederum ist äquivalent zur Gleichung $s(f\cdot E_\beta - v_+)s^{-1} = \tau(s)(\bar{f}\cdot E_\beta - \tau(v_+))\tau(s)^{-1}$. Auflösen nach $(f\cdot E_\beta - v_+)$ liefert schließlich die äquivalente Gleichung $\tau\circ Ad(t)(f\cdot E_\beta - v_+) = f\cdot E_\beta - v_+$.
Weil die Involution τ die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ invariant läßt, die Unterräume $\mathcal{E}_\alpha$ permutiert und den Unterraum $\mathcal{E}_\beta$ invariant läßt, vertauscht die Projektion p_β mit τ. Nach Lemma 4.50 operiert $Ad(t)$ durch Multiplikation auf den Räumen $\mathfrak{c}$ und $\mathcal{E}_\alpha$, es vertauscht folglich $Ad(t)$ mit allen Projektionen aus Definition 4.51.
Daher können wir ohne Einschränkung für den Loop v_+ mit $u_+\cdot E_\beta$ ansetzen, wobei

u_+ in F_+ liegt.
Es ist nach Lemma 4.50 $Ad(t)(f \cdot E_\beta) = f \cdot \exp(i\varphi\beta(H_0)) \cdot E_\beta = f(\lambda)\lambda^{\beta(H_0)} \cdot E_\beta$. Damit ist obige Gleichung äquivalent zu $\lambda^{-\beta(H_0)} \cdot \overline{(f(\lambda) - u_+(\lambda))} = f - u_+$ beziehungsweise zur Gleichung
$\lambda^{\beta(H_0)} \cdot f - \bar{f} = \lambda^{\beta(H_0)} \cdot u_+ - \overline{u_+}$.
Wenn $\beta(H_0) \leq 1$ gilt, so hat diese Gleichung für jedes $f \in F_-^\star$ eine Lösung $u_+ \in F^+$, nämlich $u_+ := \lambda^{-\beta(H_0)} \cdot \overline{f(\lambda)}$, weil $\overline{f(\lambda)}$ in $F_+^\star$ liegt.
Wenn $\beta(H_0) \geq 2$ ist, so sind die Koeffizienten von λ^k gleich 0 für alle $1 \leq k \leq \beta(H_0)-1$ in der rechten Seite der letzten Gleichung, da u_+ in F_+ zu wählen ist. Daher hat diese Gleichung genau für den reellen Unterraum aller $f(\lambda) = \sum_{n<0} f_n \cdot \lambda^n$ in $F_-^\star$ eine Lösung, für die $f_{-k} = \bar{f}_{k-\beta(H_0)}$ gilt für alle $1 \leq k \leq \beta(H_0) - 1$. Das kanonische Vektorraumkomplement hierzu in $F_-^\star$ ist gegeben durch alle Laurent Polynome $f(\lambda) = \sum_{n=-1}^{-\beta(H_0)+1} f_n\lambda^n$ mit $f_{-k} = -\bar{f}_{k-\beta(H_0)}$ für alle $1 \leq k \leq \beta(H_0)-1$. Dieser hat offenbar die reelle Dimension $\beta(H_0) - 1$. Insgesammt ist gezeigt, daß das Produkt dieses $(\beta(H_0) - 1)$-dimensionalen Unterraums von $F_-^\star$ mit E_β in der direkten Summe mit $p_\beta(s^{-1} \cdot \Lambda\mathfrak{g} \cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ gleich $\mathcal{E}_\beta$ ergibt. Das zeigt den ersten Teil der Behauptung.

Die Behandlung des zweiten Falles erfolgt ähnlich: Zunächst haben wir $\gamma(H_0) = \tau(\beta)(H_0) = \beta(\tau^{-1}(H_0)) = \beta(\tau(H_0)) = \beta(H_0)$. Wir nehmen ein E_β aus $\mathfrak{g}_\beta^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ und setzten $E_\gamma := \tau(E_\beta)$.
Wir gehen in den τ-invarianten Raum $\mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_\gamma$ und bestimmen den reellen Untervektorraum von $F_-^\star \times F_-^\star$ aller (f_1, f_2), für welche ein Loop v_+ in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ existiert, so daß $f_1(\lambda) \cdot E_\beta + f_2(\lambda) \cdot E_\gamma - v_+$ in $s^{-1} \cdot \Lambda\mathfrak{g} \cdot s$ liegt. Dies führt wieder auf die Gleichung $\tau \circ Ad(t)(f_1E_\beta + f_2E_\gamma - v_+) = f_1E_\beta + f_2E_\gamma - v_+$.
Es ist $p_\beta + p_\gamma$ die Projektion der vollen Loop Algebra auf $\mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_\gamma$, da $p_\beta \circ p_\gamma = p_\gamma \circ p_\beta = 0$ gilt. Wieder vertauscht τ mit der Projektion $p_\beta + p_\gamma$, ebenso $Ad(t)$. Daher können wir annehmen, daß $v_+ = u_1 \cdot E_\beta + u_2 \cdot E_\gamma$ ist, mit Funktionen u_1, u_2 in F_+.
Da $\beta(H_0) = \gamma(H_0)$ gilt, folgt sofort die äquivalente Gleichung
$f_1 - u_1 = \lambda^{-\beta(H_0)} \cdot (\bar{f}_2 - \bar{u}_2)$ beziehungsweise $\lambda^{\beta(H_0)}f_1 - \bar{f}_2 = \lambda^{\beta(H_0)}u_1 - \bar{u}_2$. Diese Gleichung hat für $\beta(H_0) \leq 1$ mit $u_2 := -\lambda^{-\beta(H_0)}\bar{f}_1 \in F_+$ und $u_1 := -\lambda^{-\beta(H_0)}\bar{f}_2 \in F_+$ stets eine Lösung.
Wenn $\beta(H_0) \geq 2$ ist, so ist diese Gleichung genau für den Unterraum aller (f_1, f_2) von $F_-^\star \times F_-^\star$ eine Lösung, für welche $f_{-k}^{(1)} = \overline{f_{-\beta(H_0)+k}^{(2)}}$ gilt für alle $1 \leq k \leq \beta(H_0) - 1$, wobei $f_j^{(i)}$ den Koeffizienten von λ^j in der Fourier Reihe der Funktion $f_i(\lambda)$ bezeichnet. Das kanonische Vektorraumkomlement in $F_-^\star \times F_-^\star$ ist der reelle Unterraum $\{(f, -\lambda^{-\beta(H_0)}\bar{f}) : f(\lambda) = \sum_{n=-1}^{-\beta(H_0)+1} f_n \cdot \lambda^n \in F_-^\star\}$ der reellen Dimension $2(\beta(H_0) - 1)$.

Da der Verktorraum $s^{-1} \cdot \Lambda\mathfrak{g} \cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ insbesondere $\Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ enthält, folgt die Formel für die Kodimension, da im zweiten Fall die Kodimension von $(p_\beta + p_\gamma)(s^{-1} \cdot \Lambda\mathfrak{g} \cdot s + \Lambda^+\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ in $\mathcal{E}_\beta + \mathcal{E}_\gamma$ gleich $2 \cdot (\beta(H_0) - 1) = (\beta(H_0) - 1) + (\gamma(H_0) - 1)$ ist. $\diamondsuit$

Bevor wir die Konsequenz dieses Satzes auf der Gruppenseite betrachten, folgt noch ein einfaches Beispiel zur Illustration:

Beispiel: Wir betrachten das Beispiel (ii) am Ende des Abschnitts 4.3. Es sei also $G^{\mathbb{C}} = SL(2,\mathbb{C})$ zusammen mit der reellen Form $G = SL(2,\mathbb{R})$. Wir betrachten den τ-symmetrischen Homomorphismus $t(\lambda) = diag(\lambda^k, \lambda^{-k})$ mit k in $\mathbb{N}$ mit seiner Splittung $t = \tau(s_k)^{-1}s_k$. Dann gilt mit der Wurzel $\beta := \alpha_{1,2}$ die Gleichung $\beta(H_k := diag(k,-k)) = 2k \geq 2$. Weiterhin ist $\tau(\alpha) = \alpha$ für beide Wurzeln α in Δ°.
Nach Satz 4.52 ist dann die Kodimension von $p_\beta(s^{-1}\Lambda sl(2,\mathbb{R})s + \Lambda^+ sl(2,\mathbb{C}))$ in $\mathcal{E}_\beta$ gleich $\beta(H_k) - 1 = 2k - 1$.
Ein komplementärer Unterraum der Projektion von $s^{-1}\Lambda sl(2,\mathbb{R})s + \Lambda^+ sl(2,\mathbb{C})$ auf $\mathcal{E}_\beta$ (dies sind die Loops mit Werten in $\mathbb{C} \cdot E_{1,2}$) ist gegeben durch $i\,\mathbb{R}\,\lambda^{-1} \cdot E_{1,2}$. $\diamondsuit$

Nun wird das Ergebnis aus Satz 4.52 auf die Loop Gruppen übertragen:

Korollar 4.53 *Wenn in der Situation von Satz 4.52 ein β in Δ° existiert mit $|\beta(H_0)| \geq 2$, so hat das Produkt $(s^{-1}\Lambda G\, s)\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ als Mannigfaltigkeit eine endliche, positive Kodimension in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Diese ist gleich der Kodimension der Doppelnebenklasse $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.*
Wenn für jedes von τ fixierte Element H_0, für welches $\exp(2\pi i \cdot H_0) = e$ ist, und für welches der zugehorige, τ-symmetrische Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\varphi H_0}) = \exp(i\varphi H_0)$ eine Splittung in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ besitzt, ein β in Δ° existiert mit $|\beta(H_0)| \geq 2$, so ist das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ offen und dicht in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.

Beweis: Die Kodimension des Produkts $(s^{-1}\Lambda G\, s)\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ ist gleich der Kodimension der Summe der zugehörigen Lie Algebren in $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Diese ist nach Satz 4.52 und Gleichung (4.14) mit der Voraussetzung im Korollar positiv. Insbesondere enthält $(s^{-1}\Lambda G\, s)\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ keine nicht leeren, offenen Teilmengen von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Damit können wir den zweiten Teil beweisen: Nach Satz 4.42 und der Bemerkung 4.43 treten in dem in Abschnitt 4.3 beschriebenen Verfahren zur Bestimmung von Doppelnebenklassen höchstens abzählbar unendlich viele Vertreter auf. Eine abzählbare Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten $\Lambda G \cdot s \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ von je positiver Kodimension hat keine inneren Punkte nach dem Satz von Baire. Daher ist das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ dicht in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, und offen, da die Summe der zugehörigen Lie Algebren gleich $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist. $\diamondsuit$

Das folgende Beispiel zeigt, daß tatsächlich der Fall eintreten kann, daß ein τ-fixes H_0 in $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ existiert, für welches $\exp(2\pi i \cdot H_0) = e$ ist, und die Summe auf der rechten Seite von Gleichung (4.14) Null ist, das heißt, für jede Wurzel β in Δ° ist $\beta(H_0) \in \{0, \pm 1\}$:

Beispiel: Wir betrachten die einfache, komplexe Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}} = SO(3,\mathbb{C})$ zusammen mit der Komplexkonjugation $\tau(X) := diag(1,-1,-1)\bar{X}diag(1,-1,-1)$. Dann ist die maximal kompakte Untergruppe $SO(3)$ von $SO(3,\mathbb{C})$ invariant unter τ. Weiterhin nehmen wir die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c} := \mathbb{C} \cdot (E_{12} - E_{21})$ von $so(3,\mathbb{C})$. Diese ist invariant unter τ und der Cartan Involution $\theta(X) = \bar{X}$. Damit

ist die kanonische reelle Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ gegeben durch $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = i \cdot \mathbb{R} \cdot (E_{12} - E_{21})$, und $\mathfrak{t} = i \cdot \mathfrak{c}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}(E_{12} - E_{21})$ ist maximaler Torus von $so(3)$.
Nach [Helg], Chapter III, § 8, Seite 188, 189 ist eine der beiden Wurzeln β im Wurzelsystem der $so(3,\mathbb{C})$ bezüglich der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ gegeben durch $\beta(E_{12} - E_{21}) = -i$. Nach Gleichung (16) im obigen Zitat ist die Killing Form der $so(3,\mathbb{C})$ gegeben durch $\kappa(X,Y) = Spur(X \cdot Y)$. Damit können wir das Element H_β aus $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$ und (β,β) berechnen: Wir setzen an $H_\beta = z \cdot (E_{12} - E_{21})$. Dann gilt die Gleichungskette
$z(-i) = \beta(H_\beta) = (\beta,\beta) = \kappa(H_\beta, H_\beta) = z^2(-2)$. Folglich ist $H_\beta = \frac{i}{2}(E_{12} - E_{21})$ und $(\beta,\beta) = \frac{i}{2}(-i) = \frac{1}{2}$.
Dies liefert $\frac{2}{(\beta,\beta)}H_\beta = 2i(E_{12} - E_{21})$. In diesem Fall hat das von $(2\pi i) \cdot \frac{2}{(\beta,\beta)}H_\beta$ erzeugte Untergitter (vergleiche Proposition 4.44 des Einheitsgitters $\mathfrak{t}_e (= \{X \in \mathfrak{t} : \exp(X) = e\})$ den Index 2 in $\mathfrak{t}_e$. Denn es ist bekanntlich $\mathfrak{t}_e = 2\pi\mathbb{Z}(E_{12} - E_{21})$. Folglich wählen wir für das Element H_0 ein Element in $\frac{1}{2\pi i} \cdot \mathfrak{t}_e$, welches kein ganzes Vielfaches von $\frac{2}{(\beta,\beta)}H_\beta$ ist, also zum Beispiel $H_0 = i(E_{12} - E_{21})$. Dann gilt $\tau(H_0) = H_0$ und der zugehörige Homomorphismus $t(\lambda = e^{i\varphi}) = \exp(i\varphi H_0)$ ist τ-symmetrisch.

Es gilt aber $\beta(H_0) = i \cdot (-i) = 1$. Damit ist für dieses H_0 die rechte Seite der Gleichung (4.14) gleich Null.
Dies heißt aber nicht, daß neben dem Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda G^{\mathbb{C}}$ noch eine weitere offene Doppelnebenklasse existiert: Es ist obiger Homomorphismus $t(\lambda)$ **nicht** splittbar in $\Lambda SO(3,\mathbb{C})$ wegen Satz 4.46. Wir haben hierfür nur zu zeigen, daß mit der Abbildung $\psi(\varphi) = \exp(\frac{1}{2}i\varphi H_0)$ das Element $\psi(2\pi)$ nicht in der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von $Fix(\tau)$. Da $\psi(\varphi)$ in $SO(3)$ läuft, haben wir nur zu zeigen, daß $\psi(2\pi)$ nicht in der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von $Fix(\tau) \cap SO(3)$ liegt. Nun ist $\psi(2\pi) = diag(-1,-1,1)$, und

$$Fix(\tau) \cap SO(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(2) \end{pmatrix} \cup diag(-1,-1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & SO(2) \end{pmatrix}$$

Damit ist $t(\lambda)$ nicht splittbar. $\diamondsuit$

Bemerkung 4.54 Es konnte nicht geklärt werden, ob das Phänomen aus dem letzten Beispiel allgemein gilt. Das heißt, zu klären ist folgende Frage:
Wenn ein Element H_0 in dem von den Elementen $C_1, \ldots, C_l$ erzeugten Gitter (siehe Proposition 4.44 und 4.45) liegt und von τ fixiert wird, und für jede Wurzel $\beta \in \Delta^\circ$ gilt $|\beta(H_0)| \leq 1$, so liegt $\exp(\pi i H_0)$ **nicht** in der Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von $Fix(\tau)$. $\diamondsuit$

Wir können jedoch noch ein positives Resultat zeigen bezüglich der offenen Doppelnebenklassen. Nach [Helg], Chapter VII, § 8, Cor. 7.8 ist das von den Elementen $\{(2\pi i)\frac{2}{(\alpha,\alpha)}H_\alpha : \alpha \in \Pi^\circ\}$ erzeugte Gitter $\mathfrak{t}_{\Delta^\circ}$ gleich dem Einheitsgitter $\mathfrak{t}_e$, wenn die maximal kompakte Untergruppe U von $G^{\mathbb{C}}$ einfach zusammenhängend ist. Wir können nun zeigen, daß stets für jedes Element H_0 im Gitter $\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{t}_{\Delta^\circ}$ eine Wurzel β existiert, so daß $|\beta(H_0)|$ größer oder gleich 2 ist. Wir brauchen noch etwas Vorbereitung:

Definition 4.55 *Eine Linearform $\mu : \mathfrak{c} \to \mathbb{C}$ auf der Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ heißt Gewicht, wenn $< \mu, \alpha > := \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ eine ganze Zahl ist für jede Wurzel α in Δ°. Die Menge aller Gewichte heißt Λ.*
Ein Gewicht μ heißt dominant bezüglich einer Basis Π° von Δ°, wenn $< \mu, \alpha >$ größer oder gleich 0 ist für alle $\alpha \in \Delta^{\circ +}$, dem Systen positiver Wurzeln bezüglich Π°.
Ein dominantes Gewicht μ heißt minimal, wenn $< \mu, \alpha > \in \{0, \pm 1\}$ für alle α in Δ° gilt.

Es gelten die folgenden, bekannten Aussagen über Gewichte (siehe [Hum], § 13, und Exercise 13.13 und [BourI], Chapter VI, Exercices § 1, Exercice 24) :

Lemma 4.56 *(i) Eine Linearform μ von $\mathfrak{c}$ ist genau dann ein Gewicht, wenn $< \mu, \alpha >$ eine ganze Zahl ist für alle Wurzeln aus einer Basis Π° von Δ°. Ein Gewicht ist schon dominant, wenn diese Zahlen alle größer oder gleich 0 sind.*
(ii) Wenn $\Pi^\circ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ eine Basis von Δ° ist, so existieren Gewichte μ_k $(1 \le k \le l)$, so daß $< \mu_k, \alpha_j > = \delta_{kj}$ gilt für alle $1 \le k, j \le l$. In diesem Fall heißen die Gewichte $\mu_1, \ldots, \mu_l$ fundamentale, dominante Gewichte. Sie bilden eine Basis des Gitters aller Gewichte in $\mathfrak{c}^\star$.
(iii) Das Wurzelgitter $\Delta^\circ_{\mathbb{Z}} := \sum_{j=1}^{l} \mathbb{Z} \cdot \alpha$ ist Untergitter von Λ. Der Index ist die Determinante der Cartan Matrix des Wurzelsystems Δ°.
(iv) Jede Nebenklasse des Wurzelgitters $\Delta^\circ_{\mathbb{Z}}$ in Λ enthält genau ein minimales, dominantes Gewicht.

Nun können wir den angestrebten Satz zeigen:

Satz 4.57 *Es sei $\mathfrak{c}$ eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ mit kanonischer, reeller Form $\mathfrak{c}_{\mathbb{R}}$, und $H_0 \neq 0$ sei in dem von den Elementen $\{\frac{2}{(\alpha,\alpha)} H_\alpha : \alpha \in \Pi^\circ\}$ erzeugten Gitter $\frac{1}{2\pi i}\mathfrak{t}_{\Delta^\circ}$. Dann existiert eine Wurzel $\beta \in \Delta^\circ$, so daß $\beta(H_0)$ größer oder gleich 2 ist.*

Dieser Satz läßt sich auch (mühsam) zeigen, indem man jedes Wurzelsystem $A_l, \ldots, G_2$ einzeln durchgeht. Dies ist aber sehr aufwendig.

Beweis: Es sei $\Pi^\circ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ ein System einfacher Wurzeln. Dann hat H_0 die Darstellung $H_0 = \sum_{j=1}^{l} m_j \frac{2}{(\alpha_j,\alpha_j)} H_j$, wobei $H_j := H_{\alpha_j}$ gesetzt wird, und m_j in $\mathbb{Z}$ liegt. Wir setzen zum Beweis voraus, daß $\beta(H_0) \in \{0, \pm 1\}$ gilt für alle β in Δ° und folgern $H_0 = 0$:
Es sei also β eine Wurzel. Dann ist $\beta(H_0) = \sum_{j=1}^{l} m_j \frac{2}{(\alpha_j,\alpha_j)} \beta(H_j) = \sum_{j=1}^{l} m_j \frac{2}{(\alpha_j,\alpha_j)} \kappa(\beta, \alpha_j) = \sum_{j=1}^{l} m_j \frac{2(\beta,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}$.

Es bezeichne $\check{\Delta}^\circ$ das zu Δ° duale Wurzelsystem. Dies ist $\{\frac{2}{(\gamma,\gamma)}\gamma \,:\, \gamma \in \Delta^\circ\}$ mit dem selben Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$.
Dann ist $\check{\Pi}^\circ := \{\frac{2}{(\gamma,\gamma)}\gamma \,:\, \gamma \in \Pi^\circ\}$ eine Basis des dualen Wurzelsystems (nach [Hum], Exercise 10.1).
Wir setzen also $\check{\alpha}_j := \frac{2}{(\alpha_j,\alpha_j)}\alpha_j$ für alle $1 \leq j \leq l$. Damit ist $\beta(H_0) = \sum_{j=1}^{l} m_j(\beta,\check{\alpha}_j) = \sum_{j=1}^{l} m_j(\check{\alpha}_j,\beta)$. Es ist $\check{\beta} = \frac{2}{(\beta,\beta)}\beta$, folglich ist $(\check{\beta},\check{\beta}) = \frac{4}{(\beta,\beta)}$.
Nun betrachten wir die Linearform $\mu := \sum_{j=1}^{l} m_j\check{\alpha}_j$. Dann wird $\beta(H_0) = (\sum_{j=1}^{l} m_j\check{\alpha}_j,\, \beta) = (\mu,\beta) = \frac{2}{(\check{\beta},\check{\beta})}(\mu,\check{\beta})$.
Da $\beta(H_0)$ stets ganze Zahl ist, wird die Linearform μ ein Gewicht des gecheckten Wurzelsystems; es ist μ (wie jedes Gewicht) auch dominant bezüglich einer geeigneten Basis $\check{\Pi}^\circ$ von $\check{\Delta}^\circ$.
Da $\beta(H_0)$ nach Voraussetzung für jedes β aus Δ° nur die Werte 0, 1 oder -1 annimmt, ist μ sogar ein minimales Gewicht von $\check{\Delta}^\circ$. Weiterhin liegt μ im Wurzelgitter $\check{\Delta}^\circ_{\mathbb{Z}}$. Nach Lemma 4.56 enthält jede Nebenklasse von $\check{\Delta}^\circ_{\mathbb{Z}}$ im Gitter aller Gewichte $\check{\Lambda}$ **genau** ein minimales Gewicht. Im Wurzelgitter ist die Null offenbar minimal. Damit ist $\mu = 0$, folglich sind alle $m_j = 0$. $\diamondsuit$

Damit können wir nun den abschließenden Satz dieses Abschnitts formulieren.

Satz 4.58 *Es sei $\mathfrak{t}$ maximal abelsch in der kompakten Lie Algebra $\mathfrak{u}$. Dann ist der Index des Wurzelgitters $\mathfrak{t}_{\Delta^\circ}$ im Einheitsgitter $\mathfrak{t}_e$ nur abhängig von der gewählten kompakten Lie Gruppe U. Wenn die Gitter gleich sind, so ist das Produkt $\Lambda G \cdot \Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ offen und dicht in der vollen Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Dies ist stets der Fall, wenn die kompakte Gruppe U einfach zusammenhängend ist.*
In diesem Fall ist auch jeder τ-symmetrische Homomorphismus $t(\lambda)$ splittbar in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$.

Beweis: Zu zeigen ist nur noch die letzte Aussage: Wenn U einfach zusammenhängend ist, so ist die Fixpunktgruppe von τ in U zusammenhängend nach [Helg], VII, Theorem 8.2. Nach unserem Satz 4.46 folgt dann die Behauptung. $\diamondsuit$

4.5 Die Iwasawa Zerlegung in getwisteten Loop Gruppen

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir getwistete Loop Gruppen. Die getwisteten Loop Algebren wurden bereits in Definition 3.25 für die polynomialen Loop Algebren eingeführt, und in Proposition 3.48 wurde der Twistungsautomorphismus $\hat{\sigma}$ auf die vervollständigte Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{l}$ $(\mathfrak{l} = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ fortgesetzt.
Wir wiederholen hier noch einmal die Konstruktion für die Loop Gruppen:

Notationen: Es sei $\sigma \neq id$ ein involutorischer Automorphismus der halbeinfachen, zusammenhängenden Lie Gruppe G. Die Ableitung $d\sigma$ auf der zugehörigen,

reellen, halbeinfachen Lie Algebra $\mathfrak{g}$ werde ebenfalls mit σ bezeichnet. Es sei - wie immer - τ die Komplexkonjugation der komplexen Lie Algebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ beziehungsweise Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ bezüglich $\mathfrak{g}$ beziehungsweise G.
Wir setzten σ $\mathbb{C}$-linear auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ fort und bezeichnen diese Involution wieder mit σ. Wir setzen voraus, daß σ einen Lift auf die komplexe Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ besitzt, das heißt, daß eine Involution auf $G^{\mathbb{C}}$ existiert, deren Ableitung beim neutralen Element gleich der Involution σ auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist. Dann vertauschen die Involutionen τ und σ. In der Lie Algebra $\mathfrak{g}$ wählen wir eine Cartan Involution $\theta_{\mathfrak{g}}$, die mit der Involution σ von $\mathfrak{g}$ vertauscht. Diese existiert nach [Helg], Chapter III, Exercises B 4, und die $\mathbb{C}$-antilineare Fortsetzung θ von $\theta_{\mathfrak{g}}$ auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ vertauscht mit τ und der Fortsetzung von σ auf $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Wie in Bemerkung 1.43 (ii) beschrieben, können wir eine Cartan Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ konstruieren, die σ- und $\theta_{\mathfrak{g}}$-invariant ist. Deren Komplexifizierung $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ ist dann invariant unter θ, τ und σ.

Die Involution θ hat einen Lift auf die Lie Gruppe $G^{\mathbb{C}}$ (siehe Proposition 1.10 (i)). Dieser werde ebenfalls mit θ bezeichnet.

Nun setzen wir die Involution σ auf die Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ durch Twistung fort, indem wir $\hat{\sigma}(g)(\lambda) := \sigma(g(-\lambda)), \quad \forall \lambda \in S^1, \ \forall g \in \Lambda G^{\mathbb{C}}$ setzen. Dann ist die Einschränkung von $\hat{\sigma}$ auf die Untergruppe $G^{\mathbb{C}}$ aller konstanten Loops in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ gleich σ. Die Fixpunktgruppe von $\hat{\sigma}$ in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ werde mit $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ bezeichnet. Es ist dies also die Menge aller Loops g, für welche $\sigma(g(\lambda)) = g(-\lambda)$ für alle λ in S^1 gilt.

Wie im letzten Abschnitt werden die Involutionen τ und θ von $G^{\mathbb{C}}$ durch punktweise Operation auf die Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ fortgesetzt. Dann haben wir die folgende Proposition:

Proposition 4.59 *Die Involution $\hat{\sigma}$ ist stetig auf der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$. Die Involutionen τ, θ und $\hat{\sigma}$ von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ vertauschen.*

Beweis: Die Stetigkeit von $\hat{\sigma}$ zeigt man wie die Stetigkeit der Involutuion $\hat{\sigma}$ auf der zugehörigen Loop Algebra $\Lambda\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ in Proposition 3.48.
Wir zeigen die Vertauschbarkeit von τ und $\hat{\sigma}$ auf $\Lambda G^{\mathbb{C}}$, indem wir einen Loop g in seine Fourier Reihe in λ entwickeln:
$\hat{\sigma} \circ \tau(\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k \cdot \lambda^k) = \hat{\sigma}(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \tau(A_{-l})\lambda^l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \sigma(\tau(A_{-l}))(-\lambda)^l = \tau(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \sigma(A_{-l})(-\lambda)^{-l}) = \tau(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(A_k)(-\lambda)^k) = \tau \circ \hat{\sigma}(\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k \cdot \lambda^k)$. $\diamondsuit$

Ziel dieses Abschnitts ist es, die in Abschnitt 4.3 konstruierte Reduktion eines τ-symmetrischen Loops $x(\lambda)$ auf ein Element n im Normalisator der Cartan Untergruppe C mittels der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$ durchzuführen für τ-symmetrische x in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$. Dabei soll die Reduktion nur mittels der Operation von $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ $(= \Lambda^+ G^{\mathbb{C}} \cap \Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma})$ erfolgen.

Wir beschränken uns dabei auf solche Involutionen σ, welche die Cartan Untergruppe C von $G^{\mathbb{C}}$ punktweise fixieren. Zumindest für alle Involutionen, die innere Automorphismen einer komplexen, halbeinfachen Lie Algebra sind, existiert stets eine Cartan Unteralgebra, die von der Involution punktweise fixiert wird (siehe [Kac], Chapter 8, § 8.1, Lemma 8.1 und Proposition 8.1). Läßt eine Involution von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ eine Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ punktweise fix, so ist sie von der Gestalt $\exp(ad(H))$ mit einem H in $\mathfrak{c} \cap Fix(\theta)$. (siehe obiges Zitat in [Kac]). Damit läßt dies Involution jeden Wurzelraum $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha}$ $(\alpha \in \Delta^{\circ})$ invariant.

Für den Rest dieses Abschnitts gelten also obige Notationen, und die Involution σ lasse die Cartan Unteralgebra $\mathfrak{c}$ beziehungsweise C punktweise fix.
Dann gilt folgendes Lemma:

Lemma 4.60 *Die Involution $\hat{\sigma}$ von $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ läßt die Untergruppen U^+, U^- und N invariant, sofern die Involution σ von $G^{\mathbb{C}}$ die Cartan Untergruppe C punktweise fixiert.*

Beweis: Die Invarianz vom Normalisator N von C in $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ folgt schon aus der Invarianz von C.
Die Wurzelräume $\mathbb{C} \cdot \lambda^k \cdot E_{\alpha}, \quad \alpha \in \Delta^{\circ},\ k \in \mathbb{Z}$ sind invariant unter $\hat{\sigma}$, da die Wurzelräume $\mathbb{C} \cdot \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}_{\alpha}$ σ-invariant sind. Damit folgt die Behauptung. $\diamondsuit$

Für die Reduktion eines τ-symmetrischen Loops y aus $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ mittels der Gruppe $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ auf ein Element in der Gruppe N machen wir Gebrauch von Eindeutigkeitsaussagen in Abschnitt 4.3:

Proposition 4.61 *Es sei $y \in \Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$, und es seien s_+, v_+ und $n \in N$ die Elemente aus Proposition 4.30, für welche $y = \tau(s_+) \cdot n \cdot r_+$ ist und $n \cdot r_+ \cdot n^{-1}$ in $\tau(U^-)$ liegt. Dann sind auch s_+, v_+ und n in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$.*

Beweis: Dies folgt sofort mit dem Lemma 4.60, da τ und $\hat{\sigma}$ vertauschen und die Zerlegung in Proposition 4.60 eindeutig ist: Es ist $y = \hat{\sigma}(y) = \tau(\hat{\sigma}(s_+)) \cdot \hat{\sigma}(n) \cdot \hat{\sigma}(r_+)$, und es liegt nach Voraussetzung $\hat{\sigma}(n) \cdot \hat{\sigma}(r_+) \cdot \hat{\sigma}(n)^{-1}$ in $\hat{\sigma}(\tau(U^-)) = \tau(\hat{\sigma}(U^-)) = \tau(U^-)$. $\diamondsuit$

Damit haben wir die folgende, zu Satz 4.32 analoge Aussage für getwistete Loop Gruppen:

Proposition 4.62 *Es sei $x \in \Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$ ein τ-symmetrischer Loop. Weiterhin seien $r, v \in U^+$ und $n \in N$ wie in Satz 4.32, so daß die Gleichungen (4.9) gelten. Dann sind auch r, v und n in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}_{\sigma}$.*

Beweis: Der Beweis von Satz 4.32 geht von der Zerlegung in Proposition 4.30 aus: $x = \tau(v_+) \cdot n \cdot r_+$. Für diese Zerlegung haben wir in der letzten Proposition gezeigt, daß v_+, n und r_+ in der getwisteten Loop Gruppe liegen. Weiterhin wird im Beweis zu Satz 4.32 v_+^{-1} zerlegt in das Produkt $v_1 \cdot v_2$, mit $v_1,\ v_2 \in U^+$, und $n \cdot v_1 \cdot n^{-1} \in \tau(U^+)$ sowie $n \cdot v_2 \cdot n^{-1} \in \tau(U^-)$. Da n und v_+ von $\hat{\sigma}$ fixiert werden, und diese Zerlegung eindeutig ist, da $U^+ \cap U^-$ trivial ist, folgt mit Lemma 4.60, daß auch v_1 und v_2 in der getwisteten Loop Gruppe liegen. Damit folgt mit dem Rest des Beweises von Satz 4.32 sofort die Behauptung in der Proposition. $\diamondsuit$

Mit dieser Proposition kann also das τ-symmetrische und $\hat{\sigma}$-fixe Element x mit

einem Element r in der Loop Gruppe $\Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ reduziert werden auf $n \cdot v$ mit $n \in N \cap \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ und $v \in U^+ \cap \Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$.
Um die Reduktion auf n in der getwisteten Loop Gruppe vornehmen zu können, müssen wir nocheinmal die Involution ϕ aus Lemma 4.35 betrachten; wir erhalten sofort die folgenden Aussagen:

Proposition 4.63 *Wenn in der Situation von Lemma 4.34 das τ-symmetrische n aus N von $\hat{\sigma}$ fixiert wird, so vertauscht die Involution ϕ $(\phi(g) := \tau(n \cdot g \cdot n^{-1}))$ mit $\hat{\sigma}$. Die ϕ-invariante Untergruppe $U^{++} = U^+ \cap \phi(U^+)$ und ihre Lie Algebra $\mathfrak{u}^{++}$ sind $\hat{\sigma}$-invariant. Insbesondere ist der (-1)-Eigenraum $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$ von ϕ in $\mathfrak{u}^{++}$ auch $\hat{\sigma}$-invariant.* ♢

Nun können wir schließlich die zu Proposition 4.36 analoge Reduktion in getwisteten Loop Gruppen durchführen:

Satz 4.64 *Es sei x ein τ-symmetrischer, $\hat{\sigma}$-fixer Loop, und $x = n \cdot v$ die Zerlegung nach Proposition 4.62 in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$. Dann liegt der in Proposition 4.36 konstruierte Loop $g = \exp(-\frac{1}{2} \cdot V)$, $V \in \mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$ ebenfalls in $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$. Mit diesem Loop gilt die Gleichung $\tau(g)^{-1} \cdot x \cdot g = n$.*

Beweis: Der Loop v ist ϕ-symmetrisch und $\hat{\sigma}$-fix. Damit existiert - wie im Beweis zu Proposition 4.36 gezeigt - ein V in $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$, so daß $v = \exp(V)$ gilt. Der Unterraum $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$ ist nach Proposition 4.63 invariant unter $\hat{\sigma}$. Da nach Lemma 4.34 und 4.35 die Exponentialabbildung von $\mathfrak{u}^{++}_{(-1)}$ ein Diffeomorphismus auf die Menge aller ϕ-symmetrischen Elemente in U^{++} ist, folgt $\hat{\sigma}(V) = V$. Damit ist auch $g = \exp(-\frac{1}{2} \cdot V)$ fix unter $\hat{\sigma}$, und wir sind fertig. ♢

Die Splittung der τ-symmetrischen Elemente n in N in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ läßt sich nicht in der geschlossenen Form durchführen, wie dies in Abschnitt 4.3 im ungetwisteten Fall möglich war.

Zum Abschluß sei hier noch ein Phänomen der Iwasawa Zerlegung in den getwisteten Loop Gruppen aufgezeigt: Im allgemeinen existieren neben dem Produkt $\Lambda G_\sigma \cdot \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ weitere offene Doppelnebenklassen: Wenn im ungetwisteten Fall ein τ-symmetrischer, konstanter Loop q aus N eine Splittung in der Loop Gruppe $\Lambda G^{\mathbb{C}}$ besitzt, so auch in $G^{\mathbb{C}}$ mittels der Einsetzung $\lambda \mapsto 1$. Folglich existiert auch eine Splittung in $\Lambda^+ G^{\mathbb{C}}$.
In getwisteten Loop Gruppen $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$ liefert die Einsetzung $\lambda \mapsto \lambda_0$ ebenfalls einen (konstanten) Loop in $G^{\mathbb{C}}$. Dieser liegt aber nur dann in der getwisteten Loop Gruppe, wenn er in $H^{\mathbb{C}}$ liegt, also der Fixpunktgruppe von σ in $G^{\mathbb{C}}$. Es sei dies zuletzt an einem Beispiel illustriert:

Beispiel: Es sei $G^{\mathbb{C}} = SL(2, \mathbb{C})$ und $G = SU(1,1)$. Dann ist die Involution τ gegeben durch $\tau(g) = diag(1,-1)(\bar{g})^{T-1} diag(1,-1)$. Die Involution σ von $G^{\mathbb{C}}$ sei die Konjugation mit der Matrix $diag(1,-1)$. Der konstante Loop $q := diag(-1,-1)$ ist τ-symmetrisch und liegt in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$. Er wird τ-

symmetrisch gesplittet von dem Loop $w = \lambda \cdot E_{12} - \lambda^{-1} \cdot E_{21}$, das heißt, es gilt $q = \tau(w)^{-1} \cdot w$. Es ist auch w in der getwisteten Loop Gruppe $\Lambda G_\sigma^{\mathbb{C}}$. Eine kurze Rechnung zeigt, daß q **keine** τ-symmetrische Splittung in $\Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ besitzt. Daher ist $\Lambda G_\sigma \cdot w \cdot \Lambda^+ G_\sigma^{\mathbb{C}}$ eine von der „big cell" verschiedene Doppelnebenklasse. Da die Summe $\Lambda \mathfrak{g}_\sigma + (w \cdot \Lambda^+ \mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}} \cdot w^{-1})$ die ganze, getwistete Loop Algebra $\Lambda \mathfrak{g}_\sigma^{\mathbb{C}}$ ergibt, ist obige Doppelnebenklasse auch offen. $\diamondsuit$

Literaturverzeichnis

[Aom] K. Aomoto: *On some double coset decompositions of complex semi-simple Lie groups*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 18, No. 1, 1966.

[Bal] Vladimir Balan: *On the DPW Method for the Tangent Group*, Presented at the Conference of Finsler Spaces, Feb. 14-16, Craiova, Romania (to appear).

[Ber] Marcel Berger: *Les Espaces Symetriques non Compacts*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., III. Ser. 74, 85 - 177 (1959).

[BourI] N. Bourbaki: *Groupes et algebres de Lie*, Chapitre IV - VI, Hermann, Paris 1968.

[BourII] N. Bourbaki: *Groupes et algebres de Lie*, Chapitre VII - VIII, Diffusion C.C.L.S., Paris 1975.

[DoGrSzm] J. Dorfmeister, H. Gradl, J. Szmigielski: *Systems of PDEs obtained from factorization in loop groups*, Acta Applicandae Mathematicae 53 (1998), 1 - 58.

[DoHa] J. Dorfmeister, G. Haak: *Meromorphic Potentials and Smooth CMC Surfaces*, Math. Zeitschr. 224 (1997), 603 - 640.

[DPW] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu: *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Communications in Analysis and Geometry 6 (1998), 633 - 668.

[Dorfm.95] J. Dorfmeister: *Constant Mean Curvature Surfaces, Harmonic Maps, and Loop Groups*, 20. Kolloquium über Differentialgeometrie: Vortragsauszüge, Technische Universität München, 1995.

[Gok] I. C. Gokhberg: *A factorisation problem in normed rings, functions of isometric and symmetric operators, and singular integral equations*, Russian Math. Surveys 19 (1964), 63 - 114.

[GoWal] R. Goodman, N. R. Wallach: *Structure and unitary cocycle representations of loop groups and the group of diffeomorphisms of the circle*, Journal für Mathematik, Band 347 (1984), 69 - 133.

[Guest] Martin A. Guest: *Harmonic Maps, Loop Groups, and Integrable Systems*, Cambridge University Press, London Mathematical Society Student Texts 38, 1997.

[Hein] Wolfgang Hein: *Einführung in die Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Spinger-Verlag, Hochschultext (1980).

[Hel] Frederic Helein: *Willmore Immersions and Loop Groups*, Journal of Differential Geometry, preprint (to appear).

[Helg] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, 1978.

[HilNe] J. Hilgert, K.-H. Neeb: *Lie Gruppen und Lie Algebren*, Vieweg Verlag 1991.

[Hum] James E. Humphreys: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag 1972.

[Kac] Victor Kac: *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press 1990 (Third Edition).

[KacII] Victor Kac: *Constructing Groups Associated to Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Infinite dimensional groups with applications, Spinger-Verlag New York Inc. 1985, 167 - 216.

[Kn] Antony W. Knapp: *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser 1996.

[Koo] T.H. Koornwinder: *The Structure of real semisimple Lie Groups*, MC Syllabus 49, Mathematisch Centrum Amsterdam 1982.

[Mat] T. Matsuki: *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan, Vol. 31, No. 2, 1979.

[Oni] A. L. Onishchik: *Topology of Transitive Transformation Groups*, Barth Verlag 1994.

[PetKac] D.H. Peterson, Victor Kac: *Infinite flag varieties and conjugacy theorems*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 80, (1983), 1778 - 1782.

[PresSeg] Andrew Pressley, Graeme Segal: *Loop Groups*, Clarendon Press, Oxford Science Publications 1986.

[Ros] W. Rossmann: *The Structure of semisimple symmetric Spaces*, Can. J. Math., Vol XXXI, No. 1, 1979, 157 - 180.

[Schl] Henrik Schlichtkrull: *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Birkhäuser Verlag, Progress in Mathematics Vol. 49, 1984.

[TitsI] Jacques Tits: *Groups and group functors attached to Kac-Moody data*, Proc. Meet. Max-Planck-Inst. Math., Bonn 1984, Lect. Notes Math. 1111, 193 - 223 (1985).

[TitsII] Jacques Tits: *Uniqueness and Presentation of Kac-Moody Groups over Fields*, Journal of Algebra 105, 542 - 573 (1987).

[Wan] Zhe-xian Wan: *Introduction to Kac-Moody Algebra*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 1991.

[War] Garth Warner: *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups I*, Springer-Verlag, Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 188, 1972.