

Differential Geometry - Dynamical Systems

*** Monographs # 5 ***

Dorel Fetcu

Properties of Harmonic Mappings and Morphisms

[Romanian; Proprietăți ale aplicațiilor și morfismelor armonice]

Ph.D. Thesis

University "Alexandru Ioan Cuza" of Iassy

2005

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Properties of Harmonic Mappings and Morphisms* Monographs # 5

Differential Geometry - Dynamical Systems * ISSN 1454-511X * Monographs # 5

Editor-in-Chief Prof.Dr. Constantin Udriște
Managing Editor Prof.Dr. Vladimir Balan
University Politehnica of Bucharest

Properties of Harmonic Mappings and Morphisms, Dorel Fetcu.
Bucharest. Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2005

Includes bibliographical references.

©Balkan Society of Geometers, Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2005
Neither the book nor any part may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, microfilming or by any information storage and retrieval system, without the permission in writing of the publisher.

**PROPRIETĂȚI ALE APLICAȚIILOR ȘI
MORFISMELOR ARMONICE**

DOREL FETCU

Cuprins

Introducere	3
1 Capitol introductiv	7
1.1 Operatori pe fibrare vectoriale	7
1.2 Aplicații armonice	11
1.3 A doua variație a energiei	14
1.4 Morfisme armonice	14
2 Aplicații între varietăți aproape Kähler și φ-varietăți reperate	16
Introducere	16
2.1 φ -varietăți repere	16
2.2 Aplicații $\pm(J, \varphi)$ -olomorfe	19
2.3 Armonicitatea aplicațiilor $\pm(J, \varphi)$ -olomorfe	20
2.4 Stabilitatea aplicațiilor (J, φ) -olomorfe între o varietate Kähler și o varietate cosimplectică	22
3 Aplicații armonice între φ-varietăți repere	28
Introducere	28
3.1 Aplicații armonice între φ -varietăți repere de dimensiune pară	28
3.2 Aplicații armonice între φ -varietăți repere de dimensiune impară	32
3.3 Aplicații armonice pe fibratul tangent al unei varietăți cosim- plectice	35
4 Aplicații armonice și φ-pluriarmonice între \mathcal{C}-varietăți	41
Introducere	41
4.1 Produse de φ -varietăți repere	41
4.2 Aplicații armonice între produse de \mathcal{C} -varietăți	43
4.3 Aplicații φ -pluriarmonice	47

5	Aplicații armonice definite pe varietăți aproape de contact	53
	Introducere	53
5.1	Aplicații armonice definite pe varietăți aproape de contact	53
5.2	Aplicații armonice între o varietate aproape de contact și fibratul său tangent	56
5.3	Aplicații armonice pe varietăți de contact complexe	58
6	Varietăți hiper-reperate și armonicitate	63
	Introducere	63
6.1	Varietăți hiper-reperate. Generalități	63
6.2	Varietăți hiper-reperate și armonicitate	68
6.3	Fibratul tangent al unei varietăți 3-aproape de contact	70
7	Morfisme φ-pseudo armonice	73
	Introducere	73
7.1	Aplicații φ -pseudo orizontal slab conforme	73
7.2	Morfisme φ -pseudo armonice	81
7.3	O ψ -structură metrică reperată asociată pe fibratul tangent al unei varietăți metrice aproape de contact	83
8	Curbe biarmonice în grupul Heisenberg generalizat	85
	Introducere	85
8.1	Aplicații biarmonice	85
8.2	Grupul Heisenberg generalizat	86
8.3	Curbe biarmonice în \mathbb{H}_{2n+1}	87

Introducere

Acest volum reproduce teza de doctorat a autorului, elaborată sub conducerea științifică a domnului profesor doctor Vasile Oproiu, la Facultatea de Matematică a Universității "Al.I.Cuza" din Iași.

Teoria aplicațiilor armonice între varietăți riemanniene este o teorie ce a cunoscut o dezvoltare deosebită în ultimii 40 de ani, primul articol consacrat studiului acestei probleme, [7], fiind publicat în 1964. De atunci au apărut numeroase lucrări în acest domeniu, devenit unul clasic în geometria riemanniană de astăzi.

Lucrarea de față este dedicată studiului aplicațiilor armonice și biarmonice și morfismelor armonice între varietăți riemanniene, accentul căzând pe studiul aplicațiilor și morfismelor armonice între φ -varietăți metrice reperate. De altfel majoritatea lucrării (capitolele 2-7) este alcătuită din rezultate obținute în acest context. În ultimul capitol, al optulea, se extind unele rezultate obținute în [4], pentru curbile biarmonice din grupul Heisenberg, la cazul curbelor biarmonice în grupul Heisenberg generalizat.

În general, toate capitolele, mai puțin primul, se bazează pe câte o lucrare științifică scrisă de autor între anii 1999-2004.

În **Capitolul 1** sunt prezentate noțiuni și rezultate fundamentale din teoria aplicațiilor armonice, cum ar fi definițiile densității de energie, energiei și aplicațiilor armonice, teoremele referitoare la prima și a doua variație a energiei, ecuația Euler-Lagrange, sau definiția și teorema de caracterizare a morfismelor armonice. Toate acestea vor fi folosite apoi pe parcursul lucrării. În elaborarea acestui prim capitol am urmat îndeaproape monografiile [1], [8] și [45].

În **Capitolul 2** sunt studiate aplicațiile între varietăți aproape Kähler și varietăți aproape de contact. Pentru astfel de aplicații definim și calculăm densitățile parțiale de energie și energiile parțiale și, apoi, folosind tehnici similare celor din [48] pentru aplicațiile între varietăți Kähler, demonstrăm că orice aplicație $\pm(J, \varphi)$ -olomorfă este armonică și, mai mult, un minim al energiei în clasa sa de omotopie, unde am notat cu J structura aproape complexă pe prima varietate și cu φ tensorul de tip (1,1) ce apare în structura aproape de contact pe cea de-a doua varietate. Este studiată apoi stabilitatea aplicațiilor (J, φ) -olomorfe între o varietate Kähler și o varietate cosim-

plectică și stabilitatea aplicațiilor (J, φ) -olomorfe între o varietate Kähler și o \mathcal{C} -varietate, obținându-se rezultate similare celui din [45] în cazul aplicațiilor între varietăți Kähler. În final studiem aplicația incluziune $i : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$, unde M este o varietate Kähler iar pe varietatea produs avem definită o structură de varietate cosimplectică. Pentru i determinăm nucleul operatorului Jacobi. Trebuie precizat că în debutul acestui capitol se face o scurtă prezentare a unor noțiuni și rezultate din teoria φ -varietăților reperate, unele dintre ele obținute independent de către autor, rezultate ce vor fi folosite pe parcursul întregii lucrări. Acest capitol are la bază lucrarea [11], a autorului, pentru partea introductivă fiind folosite, în special, lucrarea [22] și monografia [2].

În **Capitolul 3** folosim structurile aproape complexă și aproape de contact induse pe o φ -varietate reperată de dimensiune pară și, respectiv, impară, introduse în [22], pentru a găsi condiții suficiente de armonicitate pentru aplicațiile definite între astfel de varietăți. Astfel, găsim condiții ca o φ -varietate reperată de dimensiune pară, dotată cu structura aproape complexă indusă, să devină o varietate Kähler, și, în acest caz condiția necesară și suficientă pentru ca o aplicație între două astfel să fie armonică este ca aplicația tangentă indusă să comute cu structurile induse. Găsim, în continuare, condițiile ce trebuiesc îndeplinite pentru comutativitate și, deci, pentru armonicitatea aplicației. Rezultate similare obținem și în cazul φ -varietăților de dimensiune impară, folosind teorema din [24], conform căreia orice aplicație φ -olomorfă între două varietăți de contact este armonică. În ultima parte a capitolului construim o φ^C -structură metrică reperată pe fibratul tangent, TM , al unei varietăți aproape de contact, (M, φ, ξ, η) , folosind liftul complet, φ^C , al câmpului tensorial de tip $(1,1)$, φ , de pe M pe TM , și lifturile verticale și complete ale câmpului vectorial ξ și ale 1-formei η . Arătăm că, în cazul în care M este o varietate cosimplectică, atunci TM , dotat cu φ^C -structura metrică reperată indusă, îndeplinește condițiile impuse anterior pentru varietățile de dimensiune pară, și bazându-ne pe aceasta găsim, în final, rezultate legate de armonicitatea aplicațiilor între fibratele vectoriale ale unor varietăți cosimplete (o importantă sursă de inspirație fiind lucrarea [37]), și de armonicitatea proiecției canonice a unui fibrat vectorial pe varietatea bază, atunci când aceasta este cosimplectică. Capitolul reproduce, în mare măsură, lucrarea [12].

În debutul **Capitolului 4** definim o structură aproape complexă pe varietatea produs a două φ -varietăți metrice reperate și demonstrăm, în același mod ca în cazul produselor de varietăți cosimplete, (vezi [5]), că aceasta varietate este o varietate Kähler dacă și numai dacă cele două varietăți sunt \mathcal{C} -varietăți. Apoi, găsim condiții necesare și suficiente pentru ca aplicația produs a două aplicații între φ -varietăți metrice reperate să fie \pm -olomorfă și, astfel, armonică, dacă aceste varietăți sunt \mathcal{C} -varietăți. Folosind rezultatele anterioare și procedând la fel ca în cazul varietăților cosimplete,

(vezi [21]), demonstrăm că o aplicație φ -olomorfă între \mathcal{C} -varietăți este armonică. Demonstrăm că, în cazul în care M este o \mathcal{C} -varietate compactă, aplicația identitate pe M este o aplicație armonică stabilă. În continuare, studiem aplicațiile φ -pluriarmonice definite pe o φ -varietate reperată, în același mod ca în cazul varietăților Kähler și al varietăților aproape de contact (vezi [24]). Găsim condițiile necesare și suficiente ca o aplicație definită pe o φ -varietate metrică reperată să fie φ -pluriarmonică. Demonstrăm că o aplicație, $f : M \rightarrow N$, cu $\text{rang } f \geq 3$, între o φ -varietate metrică reperată și un spațiu formă complex având curbura secțională olomorfă constantă nenulă, φ -pluriarmonică, are proprietatea $f_*\varphi = \pm Jf_*$, unde J este structura complexă pe N , iar dacă M este compactă, atunci f este stabilă. Mai demonstrăm că orice aplicație armonică între o \mathcal{C} -varietate compactă și o varietate Kähler cu tensorul de curbură tare nenegativ, este φ -pluriarmonică. În final, folosind $\varphi^{\mathcal{C}}$ -structura indusă pe fibratul tangent al unei \mathcal{C} -varietăți, M , obținută la fel ca în Capitolul 3, demonstrăm că proiecția canonică, $\pi : TM \rightarrow M$, este o aplicație $\varphi^{\mathcal{C}}$ -pluriarmonică. Rezultatele din acest capitol se regăsesc în lucrarea [15].

În **Capitolul 5** studiem aplicațiile definite pe varietăți metrice aproape de contact cu valori într-o φ -varietate metrică reperată. Arătăm că, dacă domeniul unei aplicații φ -olomorfe, $f : (M, \varphi, \xi, \eta, g) \rightarrow N$, este o varietate metrică aproape de contact normală, astfel încât $d\eta_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, și 2-forma fundamentală corespunzătoare lui g este închisă, sau o varietate metrică de contact, iar codomeniul este o φ -varietate metrică reperată normală cu 2-forma fundamentală închisă, atunci f este o aplicație armonică. Demonstrăm, apoi, că o aplicație între două varietăți Sasaki complexe, a cărei aplicație tangentă indusă comută (sau anti-comută) cu tensorii ce definesc structurile aproape complexe pe cele două varietăți și cu doi din tensorii ce definesc structurile aproape de contact complexe, este o aplicație armonică. Deasemeni, prezentăm și un exemplu de aplicație cu proprietățile de mai sus, definită pe grupul Heisenberg complex cu valori în aceeași mulțime. În ultima secțiune a acestui capitol găsim câteva exemple, legate de primele rezultate, obținute folosind structuri induse pe fibratele tangente ale unor varietăți aproape de contact, structuri construite în același mod ca în capitolele precedente, cu ajutorul lifturilor verticale și complete ale câmpurilor tensoriale, de la varietatea bază la fibratul său tangent. Acest capitol reproduce o parte din lucrarea autorului, [10].

În **Capitolul 6** definim noțiunea de varietate hiper-reperată, o generalizare a celor de varietate hipercomplexă și de varietate 3-aproape de contact, (vezi [2]). Demonstrăm că pe o varietate hiper-reperată există o metrică asociată tuturor celor trei φ_i -structuri ce intervin în definiția ei, unde $i = 1, 2, 3$. Arătăm, folosind o structură aproape complexă pe $M \times \mathbb{R}^n$, definită în Capitolul 2, că dimensiunea unei varietăți hiper-reperate, M , este de forma $4m+3n$, și că pe o astfel de varietate nu există o patra φ -structură

reperată care să satisfacă condițiile de anti-comutativitate cu primele trei structuri. Demonstrăm că, dacă două din structurile ce definesc o hiper-varietate sunt normale, atunci și a treia structură este normală. Utilizând un rezultat din [23], generalizat în [27], demonstrăm că, dacă $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o hiper-varietate metrică, astfel încât $d\eta_a^i = 0$ și $d\omega_i = 0$, pentru orice $i = 1, 2, 3$ și $a = 1, \dots, n$, unde ω_i sunt 2-formele fundamentale corespunzătoare celor trei structuri, atunci fiecare structură pe M este normală și, astfel, M este o hiper \mathcal{C} -varietate. Găsim că, pentru o astfel de varietate tensorul Ricci se anulează. Studiem apoi armonicitatea aplicațiilor între varietăți hiper-reperate și demonstrăm că o aplicație φ_i -olomorfă, cu $i = 1, 2$, este o aplicație armonică. În final dăm două exemple de structuri hiper-reperate obținute pe fibratul tangent al unei varietăți 3-aproape de contact, folosind lifturile verticale, orizontale și complete ale câmpurilor tensoriale de la varietate la fibratul său tangent. Aceste rezultate se găsesc în lucrările [10] și [13].

În **Capitolul 7** studiem morfismele φ -pseudo armonice definite pe o varietate riemanniană cu valori într-o φ -varietate metrică reperată. Definim mai întâi aplicațiile φ -pseudo orizontal slab conforme (φ -[PHWC]), ca fiind aplicațiile $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, între o varietate riemanniană și o φ -varietate metrică reperată, cu proprietatea $[df \circ df^*, \varphi] = 0$, și găsim caracterizări pentru astfel de aplicații. Pentru o φ -[PHWC] aplicație, f , ca mai sus, obținem o ψ -structură metrică reperată pe varietatea riemanniană M , indusă de φ -structura metrică reperată de pe N , mai întâi în cazul în care N este o varietate aproape de contact și, apoi, în cazul general. Folosind această structură găsim câteva clase de aplicații φ -[PHWC]. În continuare definim morfismele φ -pseudo armonice ca fiind aplicațiile φ -[PHWC] armonice și, folosind rezultatele precedente, găsim exemple de astfel de aplicații. Încheiem obținând o ψ -structură metrică reperată indusă pe fibratul tangent al unei varietăți metrică aproape de contact. Acest capitol are la bază lucrarea [14].

În **Capitolul 8** studiem curbele biarmonice în grupul Heisenberg generalizat. În articolul [4] sunt determinate în totalitate aceste curbe în cazul grupului Heisenberg (de dimensiune 3). În lucrarea de față găsim ecuația biarmonică a curbelor în cazul dimensiunii $2n+1$ și, folosind tehnici asemănătoare celor din lucrarea citată, găsim exemple notabile de curbe biarmonice și non-armonice în acest context (unele din ele generalizând rezultate din [4]). Lucrarea [16] stă la baza acestui capitol.

Autorul dorește să își exprime recunoștința față de domnul profesor Vasile Oproiu, pentru numeroasele discuții avute, pentru sfaturile primite de-a lungul timpului, pentru sprijinul constant și pentru încrederea acordată.

Autorul mulțumește, deasemeni, familiei și prietenei sale pentru înțelegeri și pentru sprijinul acordat.

Capitolul 1

Capitol introductiv

În acest capitol vom trece în revistă principalele noțiuni și rezultate din teoria aplicațiilor armonice ce vor fi folosite pe parcursul lucrării de față. În acest scop vom urma îndeaproape lucrările [1], [8] și [45].

Vom presupune ca fiind cunoscute noțiunile de varietate diferențiabilă netedă finit dimensională, conexiune liniară, varietate riemanniană, fibrat vectorial, etc. (de exemplu vezi monografiile [18], [19], [42] și [47]).

1.1 Operatori pe fibrate vectoriale

Fie M o varietate riemanniană. Dacă E și F sunt două fibrate vectoriale peste M vom face următoarele notații, E^* , dualul lui E ; $E \oplus F$, suma directă (Whitney) a lui E cu F ; $E \otimes F$, produsul tensorial al lui E cu F ; $\otimes^k E$, puterea tensorială k a lui E ; $\Lambda^k E$, puterea exterioră k a lui E ; $\odot^k E$, puterea simetrică k a lui E .

Fie E un fibrat vectorial oarecare, de clasă C^∞ , peste M ,

$$E = \bigcup_{x \in M} E_x,$$

unde $\pi : E \rightarrow M$ este proiecția canonică și $E_x = \pi^{-1}(x)$ este un spațiu vectorial de dimensiune r (care nu depinde de x), numit fibra în x .

Notăm cu $\Gamma(E)$, mulțimea C^∞ -secțiunilor lui E , adică mulțimea aplicațiilor de clasă C^∞ , $s : E \rightarrow M$, astfel încât $\pi \circ s = id$, adică $s(x) \in E_x$, $x \in M$. Atunci $\Gamma(E)$ este un spațiu vectorial și un C^∞ -modul; adică, dacă pentru orice $f \in C^\infty(M)$, $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, se definesc

$$(f \cdot s)(x) := f(x)s(x), \quad (s_1 + s_2)(x) := s_1(x) + s_2(x), \quad x \in M,$$

atunci $f \cdot s, \quad s_1 + s_2 \in \Gamma(E)$.

Spunem că $\tilde{\nabla}$ este o conexiune (sau o derivare covariantă) a lui E dacă pentru orice câmp vectorial $X \in \chi(M)$, aplicația

$$\tilde{\nabla}_X : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E),$$

satisface următoarele condiții

$$\begin{aligned} (i) \quad \tilde{\nabla}_{X+Y}s &= \tilde{\nabla}_X s + \tilde{\nabla}_Y s, \\ (ii) \quad \tilde{\nabla}_{fX}s &= f\tilde{\nabla}_X s, \\ (iii) \quad \tilde{\nabla}_X(s_1 + s_2) &= \tilde{\nabla}_X s_1 + \tilde{\nabla}_X s_2, \\ (iv) \quad \tilde{\nabla}_X(f \cdot s) &= Xf \cdot s + f\tilde{\nabla}_X s, \end{aligned}$$

pentru orice $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \chi(M)$ și $s, s_1, s_2 \in \Gamma(E)$.

Pentru $X, Y \in \chi(M)$ și $s \in \Gamma(E)$, se definește

$$\tilde{R}(X, Y)s := \tilde{\nabla}_X(\tilde{\nabla}_Y s) - \tilde{\nabla}_Y(\tilde{\nabla}_X s) - \tilde{\nabla}_{[X, Y]}s.$$

\tilde{R} se numește câmpul tensorial de curbura al lui E relativ la conexiunea $\tilde{\nabla}$.

Un fibrat vectorial E admite un produs interior, h , dacă pe fiecare fibră E_x este definit un produs interior

$$h_x : E_x \times E_x \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in M,$$

și h_x , ca funcție de x , este de clasă C^∞ , adică, pentru orice $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, funcția $h(s_1, s_2)$, definită prin

$$h(s_1, s_2)(X) := h(s_1(x), s_2(x)), \quad x \in M,$$

este de clasă C^∞ .

O conexiune $\tilde{\nabla}$ este compatibilă cu un produs interior h , pe E , dacă pentru orice $X \in \chi(M)$ și $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$, avem

$$X \cdot h(s_1, s_2) = h(\tilde{\nabla}_X s_1, s_2) + h(s_1, \tilde{\nabla}_X s_2).$$

În continuare, fie M și N două varietăți diferențiabile și fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Se definește fibratul indus peste M de fibratul tangent al varietății N , TN , în felul următor. Fie $\pi : TN \rightarrow N$ proiecția canonică, și fie

$$f^{-1}TN = \{(x, u) \in M \times TN, \pi(u) = f(x), x \in M\} = \bigcup_{x \in M} T_{f(x)}N.$$

Mulțimea tuturor C^∞ -secțiunilor lui $f^{-1}TN$, notată $\Gamma(f^{-1}TN)$, este

$$\Gamma(f^{-1}TN) = \{V : M \rightarrow TN, V \text{ is a } C^\infty \text{ - map, } V(x) \in T_{f(x)}N, x \in M\}.$$

În cele ce urmează, notăm cu ∇^M, ∇^N conexiunile Levi-Civita pe varietățile riemanniene (M, g) și, respectiv, (N, h) . Atunci, pentru $f \in C^\infty(M, N)$, se poate defini conexiunea indusă pe fibratul indus peste M de TN , $E = f^{-1}TN$, după cum urmează. Pentru $X \in \chi(M)$ și $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$, definim $\tilde{\nabla}_X V \in \Gamma(f^{-1}TN)$, prin

$$(\tilde{\nabla}_X V)(x) = \nabla_{f_* X}^N V := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P_{f \circ \sigma_t}^N)^{-1} V(\sigma(t)), \quad x \in M,$$

unde $t \rightarrow \sigma(t) \in M$ este o C^1 curbă în M , satisfăcând $\sigma(0) = x$, $\sigma'(0) = X_x \in T_x M$ și σ_t este o curbă dată de $\sigma_t(s) = \sigma(s)$, $0 \leq s \leq t$, iar $P_{f \circ \sigma_t}^N : T_{f(x)}N \rightarrow T_{f(\sigma(t))}N$ este transportul paralel în lungul curbei $f \circ \sigma_t$ în raport cu conexiunea Levi-Civita pe N .

Mai mult, $E = f^{-1}TN$ admite un produs interior, provenit din metrica riemanniană h , pe N , notat tot cu h , definit de

$$h_{f(X)} : T_{f(x)}N \times T_{f(x)}N \rightarrow \mathbb{R},$$

deoarece $E_x = T_{f(x)}N$. Conexiunea indusă, $\tilde{\nabla}$, și produsul interior h , pe $f^{-1}TN$ sunt compatibile.

În continuare, fie E un fibrat vectorial peste varietatea riemanniană M . Notăm cu $\mathcal{A}^p = C(\Lambda^p T^*M \otimes E)$ spațiul p -formelor netede pe M cu valori în E . Operatorul diferențială exterioară $d : \mathcal{A}^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(E)$, relativ la conexiunea $\tilde{\nabla}$, pe E , este dat de

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i} (\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) + \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}), \end{aligned}$$

unde termenii acoperiți de $\hat{}$ sunt omiși.

În continuare presupunem că M este o varietate compactă și orientabilă. Pe fibratul vectorial $\Lambda^p T^*M \otimes E$ produsul interior este indus de cel de pe E și de metrica riemanniană de pe M . Acest produs se notează cu \langle, \rangle_x , $x \in M$, pe fiecare fibră $\Lambda^p T_x^*M \otimes E_x$. Se poate defini un produs global, notat \langle, \rangle , pe $\mathcal{A}^p(E)$ prin

$$(\omega, \eta) := \int_M \langle \omega, \eta \rangle *1, \quad \omega, \eta \in \mathcal{A}^p(E),$$

unde $*1$ este forma volum a varietății M . Acum se poate defini codiferențiala exterioară $d^* : \mathcal{A}^{p+1}(E) \rightarrow \mathcal{A}^p(E)$, prin

$$(d\omega, \eta) = (\omega, d^* \eta), \quad \omega \in \mathcal{A}^p(E), \quad \eta \in \mathcal{A}^{p+1}(E).$$

Se obține că

$$d^* \omega(X_1, \dots, X_p) = - \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{e_i} \omega)(e_i, X_1, \dots, X_p),$$

unde $\omega \in \mathcal{A}^{p+1}(E)$, $X_1, \dots, X_p \in \chi(M)$, iar $\{e_i\}_{i=1}^m$ este un câmp local ortonormat de repere pe M .

Pentru $X \in \chi(M)$, aplicația

$$\mathcal{A}^p(E) \ni \omega \rightarrow \tilde{\nabla}_X \omega \in \mathcal{A}^p(E),$$

se numește derivata covariantă și este definită prin

$$(\tilde{\nabla}_X \omega)(X_1, \dots, X_p) := \tilde{\nabla}_X(\omega(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k).$$

Aici $\tilde{\nabla}$ este conexiunea pe E , și ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M . Atunci, pentru $\omega \in \mathcal{A}^p(E)$ avem

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (\tilde{\nabla}_{X_i} \omega)(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}).$$

Pentru $p = 1$, avem $d\omega(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X \omega)(Y) - (\tilde{\nabla}_Y \omega)(X)$.

Definiția 1.1.1 Operatorul diferențial

$$\Delta := dd^* + d^*d : \mathcal{A}^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^p(E),$$

se numește laplacianul pentru p-formele cu valori în E .

Propoziția 1.1.1 Laplacianul, Δ , este un operator diferențial eliptic autoadjunct de ordinul doi.

Observația 1.1.2 Fie $f \in C^\infty(M)$. Atunci $\Delta f = d^*df = -\text{trace} \nabla df$.

Definiția 1.1.2 O p-formă ω se numește armonică dacă $\Delta \omega = 0$.

Propoziția 1.1.3 O p-formă ω este armonică dacă și numai dacă $d\omega = 0 = d^*\omega$.

Teorema 1.1.4 (de unică prelungire) Fie $\omega \in \mathcal{A}^p(E)$ o p-formă armonică. Dacă ω se anulează pe o submulțime deschisă a lui M atunci ω se anulează pe M .

Formula lui Weitzenböck. Vom prezenta această formulă doar pentru 0 și 1-formele cu valori în E .

1. Dacă $\omega \in \mathcal{A}^0(E)$ atunci

$$\Delta \omega = -\text{trace} \nabla d\omega = -\text{trace} \nabla^2 \omega.$$

2. Dacă $\omega \in \mathcal{A}^1(E)$ și $X \in \chi(M)$ atunci

$$\Delta\omega(X) = -\text{trace}\nabla^2\omega(X) + \sum_{i=1}^m \tilde{R}(e_i, X)\omega(e_i) - \sum_{i=1}^m \omega(R^M(e_i, X)e_i),$$

unde $\{e_i\}_{i=1}^m$ este o bază ortonormată în T_xM și R^M este tensorul de curbură al conexiunii Levi-Civita pe M .

1.2 Aplicații armonice

Definiția 1.2.1 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație de clasă C^1 între două varietăți riemanniene. Se definește funcția densitate de energie a lui f , $e(f) \in C(M)$, prin

$$e(f)_x = \frac{1}{2}\text{trace}_g(f^*h)(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (f^*h)(u_i, u_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m h(f_*u_i, f_*u_i), \quad x \in M,$$

unde f^*h este câmpul tensorial de tip $(0,2)$ pe M , definit prin $(f^*h)(X, Y) = h(f_*X, f_*Y)$, $X, Y \in \chi(M)$, $\text{trace}_g(f^*h)$ este urma câmpului tensorial f^*h în raport cu g , $f_* : T_xM \rightarrow T_xN$ este aplicația tangentă indusă de f , iar $\{u_i\}_{i=1}^m$ este o bază ortonormată a spațiului tangent, T_xM , în $x \in M$.

Observația 1.2.1 Densitatea de energie a lui f , nu depinde de alegerea bazei $\{u_i\}_{i=1}^m$.

Observația 1.2.2 Luând coordonatele locale $\{x_1, \dots, x_m\}$, $\{y_1, \dots, y_n\}$, pe două vecinătăți ale lui x și $f(x)$, în M și, respectiv, N , și notând $f^\alpha = y_\alpha \circ f$, $\alpha = 1, \dots, n$, obținem expresia densității de energie

$$e(f)(z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta} g^{ij}(z) h_{\alpha\beta}(f(z)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}(z) \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}(z),$$

pentru orice z în vecinătatea lui x . Aici (g^{ij}) este matricea inversă a matricii (g_{ij}) , unde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ și $h_{\alpha\beta} = h(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta})$.

Observația 1.2.3 Expresia densității de energie a unei aplicații f , din Definiția 1.2.1, poate fi scrisă în forma, echivalentă,

$$e(f) = \frac{1}{2} |df|^2.$$

Definiția 1.2.2 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație de clasă C^1 între două varietăți riemanniene. Dacă M este compactă și orientabilă, se definește energia aplicației f , prin

$$E(f) := \int_M e(f) * 1 = \frac{1}{2} \int_M |df|^2 * 1.$$

Definiția 1.2.3 O aplicație $f : M \rightarrow N$, de clasă C^∞ , se numește aplicație armonică dacă este un punct critic al energiei, E , în $C^\infty(M, N)$, adică, pentru orice variație netedă $f_t \in C^\infty(M, N)$, cu $-\varepsilon < t < \varepsilon$, a lui f , avem

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(f_t) = 0,$$

unde prin variație netedă, f_t , se înțelege că $f_0 = f$, și că f_t depinde de t ca o funcție de clasă C^∞ .

Definiția 1.2.4 Pentru orice variație netedă, f_t , a lui f , $-\varepsilon < t < \varepsilon$, considerăm

$$V(x) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x), \quad x \in M.$$

Atunci V este o aplicație de clasă C^∞ de la M la fibratul tangent, TN , al varietății N , ce satisface

$$V(x) \in T_{f(x)}N, \quad x \in M.$$

Reciproc, pentru o aplicație de clasă C^∞ , $V : M \rightarrow TN$, satisfăcând relația de mai sus, definind

$$f_t(x) := \exp_{f(x)}(tV(x)), \quad x \in M,$$

se obține că $f_t \in C^\infty(M, N)$ și

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x) = V(x), \quad x \in M.$$

Un astfel de câmp vectorial, V , se numește câmp vectorial de variație în lungul lui f .

Observația 1.2.4 Câmpurile vectoriale de variație sunt secțiuni ale fibratului vectorial $f^{-1}TN$, indus peste M de TN .

Teorema 1.2.5 (Prima variație a energiei) Fie $f \in C^\infty(M, N)$. Pentru orice variație netedă a lui f , f_t , $-\varepsilon < t < \varepsilon$, considerăm $V(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_t(x)$, $x \in M$. Atunci

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(f_t) = - \int_M h(V, \tau(f)) * 1,$$

unde h este metrica riemanniană pe N . Astfel f este o aplicație armonică dacă și numai dacă verifică ecuația Euler-Lagrange, $\tau(f) = 0$, unde

$$\tau(f)(x) := -d^*df = \text{trace} \nabla df,$$

se numește câmpul de tensiune al lui f .

Definiția 1.2.5 Câmpul tensorial $\alpha_f = \nabla df$ se numește forma a doua fundamentală a lui f . O aplicație pentru care forma a doua fundamentală este identic nulă se numește aplicație total geodezică.

Propoziția 1.2.6 Pentru o aplicație netedă, $f : M \rightarrow N$, și pentru $X, Y \in \chi(M)$, avem

$$\alpha_f(X, Y) = \tilde{\nabla}_X df(Y) - df(\nabla_X Y),$$

unde $\tilde{\nabla}$ este conexiunea pe fibratul indus, $f^{-1}TN$, iar ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M .

Propoziția 1.2.7 Expresimările în coordonate locale pentru α_f și pentru $\tau(f)$ sunt

$$(\alpha_f)_{ij}^A = f_{ij}^A - {}^M \Gamma_{ij}^k f_k^A + {}^N \Gamma_{BC}^A f_i^B f_j^C, \quad \tau(f)^A = g^{ij} (\alpha_f)_{ij}^A,$$

unde $i, j, k = 1, \dots, m$, $A, B, C = 1, \dots, n$, iar ${}^M \Gamma_{ij}^k$ și ${}^N \Gamma_{BC}^A$ sunt simbolii Riemann-Christoffel ai conexiunilor Levi-Civita pe M și, respectiv, N .

Propoziția 1.2.8 Dacă (M, g) , (N, h) și (P, k) sunt trei varietăți riemanniene, iar $f \in C^\infty(M, N)$ și $\varphi \in C^\infty(N, P)$, atunci

$$\alpha_{\varphi \circ f} = d\varphi(\nabla df) + \nabla d\varphi(df, df),$$

$$\tau(\varphi \circ f) = d\varphi(\tau(f)) + \text{trace} \nabla d\varphi(df, df).$$

Să notăm că compunerea a două aplicații total geodezice este tot o aplicație total geodezică, dar compunerea a două aplicații armonice nu este, în general, o aplicație armonică.

Teorema 1.2.9 (de unică prelungire) Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică, constantă pe o submulțime deschisă a lui M . Atunci f este constantă pe M .

În continuare vom prezenta câteva dintre cele mai cunoscute exemple de aplicații armonice.

1. Dacă $M = S^1$, atunci o aplicație $f : S^1 \rightarrow (N, h)$ este armonică dacă este geodezică.
2. Aplicația identitate $id : (M, g) \rightarrow (M, g)$ este armonică.
3. Dacă M și N sunt două varietăți Kähler atunci o aplicație $f : M \rightarrow N$ este armonică dacă și numai dacă este o aplicație \pm -olomorvă.
4. Fie $\phi : S^3 \rightarrow S^2$ aplicația Hopf, adică

$$\phi : S^3 \setminus \{(z^1, z^2) \in \mathbb{C}^2, |z^1|^2 + |z^2|^2 = 1\} \rightarrow S^2,$$

$$\phi(z^1, z^2) = (2z^1 \bar{z}^2, |z^1|^2 - |z^2|^2).$$

Aplicația ϕ este o aplicație armonică.

1.3 A doua variație a energiei

Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică. Considerăm o variație netedă $f_{s,t} : M \rightarrow N$, cu $f_{0,0} = f$. Câmpurile vectoriale de variație corespunzătoare, V și W , sunt date de

$$V(x) := \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} f_{s,0}(x) \in T_{f(x)}N, \quad W(x) := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f_{0,t}(x) \in T_{f(x)}N,$$

pentru $x \in M$.

În continuare, vom privi energia, E , ca fiind o funcție pe mulțimea $C^\infty(M, N)$. Hessiana lui E , $H(E)_f(V, W)$, într-un punct critic f (o aplicație armonică), se definește prin

$$H(E)_f(V, W) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{(s,t)=(0,0)} E(f_{s,t}).$$

Avem

Teorema 1.3.1 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație armonică. Atunci Hessiana energiei E în f este dată de

$$H(E)_f(V, W) = \int_M h(J_f(V), W) * 1, \quad V, W \in \Gamma(f^{-1}TN),$$

unde J_f este un operator diferențial eliptic autoadjunct de ordin doi, numit operatorul Jacobi, ce acționează pe $\Gamma(f^{-1}TN)$, de forma

$$J_f V = - \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}) V - \sum_{i=1}^m R^N(V, f_* e_i) f_* e_i,$$

pentru $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$ și $\{e_i\}_{i=1}^m$ o bază ortonormată în TM , unde $\tilde{\nabla}$ este conexiunea indusă pe fibratul indus, iar R^N este tensorul de curbura pe N .

Definiția 1.3.1 Indexul aplicației f este dimensiunea celui mai amplu subspațiu al lui $\Gamma(f^{-1}TN)$ pe care $H(E)_f$ este negativ definit. Nulitatea lui f este dimensiunea nucleului lui f .

Notăm că indexul și nulitatea sunt finite.

Definiția 1.3.2 O aplicație armonică de index 0 se numește slab stabilă.

1.4 Morfisme armonice

Definiția 1.4.1 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă între două varietăți riemanniene. Atunci f se numește morfism armonic dacă pentru orice funcție armonică $\pi : V \rightarrow \mathbb{R}$ definită pe o submulțime deschisă, V , a lui N , cu $\pi^{-1}(V)$ nevidă, compunerea $\pi \circ f$ este armonică pe $\pi^{-1}(V)$.

Definiția 1.4.2 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație netedă între două varietăți riemanniene, și fie $x \in M$. Atunci f se numește (slab) conformă în x dacă există numărul $\Lambda(x)$ astfel încât

$$h(df_x(X), df_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y), \quad X, Y \in T_xM.$$

Pentru orice aplicație netedă $f : M \rightarrow N$ între varietăți riemanniene, și orice punct $x \in M$, notăm $\mathcal{V}_{f_x} = \ker df_x$ și $\mathcal{H}_{f_x} = \{\ker df_x\}^\perp$; atunci \mathcal{V}_{f_x} se numește spațiul vertical și \mathcal{H}_{f_x} spațiul orizontal al lui f în x .

Definiția 1.4.3 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă între varietăți riemanniene, și fie $x \in M$. Atunci f se numește aplicație orizontal slab conformă sau semiconformă în x dacă

- (i) $df_x = 0$, sau
- (ii) df_x duce spațiul orizontal $\mathcal{H}_{f_x} = \{\ker df_x\}^\perp$ conform în $T_{f(x)}N$.

Aplicația f se numește orizontal slab conformă sau semiconformă pe M dacă este orizontal slab conformă în orice punct din M .

Teorema 1.4.1 O aplicație netedă $f : M \rightarrow N$ între varietăți riemanniene este un morfism armonic dacă și numai dacă este o aplicație armonică și orizontal slab conformă.

Capitolul 2

Aplicații între varietăți aproape Kähler și φ -varietăți reperate

Introducere

În acest capitol studiem aplicațiile $\pm(J, \varphi)$ -olomorfe între o varietate aproape Kähler și o φ -varietate metrică reperată. Calculăm energiile parțiale pentru o aplicație netedă între o varietate aproape Kähler și o φ -varietate metrică reperată și demonstrăm că o aplicație $\pm(J, \varphi)$ -olomorfă este o aplicație armonică, și mai mult, un minim absolut al energiei în clasa ei de omotopie. Demonstrăm că o aplicație (J, φ) -olomorfă între o varietate Kähler și o varietate cosimplectică este slab stabilă, și determinăm nucleul operatorului Jacobi al unei astfel de aplicații. Aceste rezultate le extindem la cazul aplicațiilor între o varietate Kähler și o \mathcal{C} -varietate. În final considerăm incluziunea canonică, $i : M \hookrightarrow M \otimes \mathbb{R}$, unde M este o varietate Kähler, și pe $M \otimes \mathbb{R}$ considerăm structura cosimplectică indusă, și determinăm efectiv nucleul operatorului Jacobi în acest caz. Rezultatele prezentate aici se găsesc în lucrarea ”**Maps between almost Kähler manifolds and framed φ -manifolds**” apărută în *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 9(2), 2004.

2.1 φ -varietăți reperate

Fie M o varietate netedă m -dimensională pe care este definit câmpul tensorial de tip $(1, 1)$, φ , care satisface următoarele condiții algebrice

$$(2.1.1) \quad \varphi^3 + \varphi = 0.$$

Structura geometrică definită de φ pe M se numește o φ -structură de rang r dacă rangul r al lui φ este constant pe M și, în acest caz, M se numește φ -varietate. Urmează imediat că r este un număr par.

Dacă M este o φ -varietate și dacă există $m - r$ câmpuri vectoriale ξ_i și $m - r$ 1-forme diferențiale η_i satisfăcând

$$(2.1.2) \quad \varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{m-r} \eta_i \otimes \xi_i,$$

$$(2.1.3) \quad \eta_i(\xi_j) = \delta_j^i,$$

unde $i, j = 1, 2, \dots, m - r$, spunem că M este global reperată sau că admite o φ -structură. În acest caz M se numește φ -varietate global reperată sau, simplu, o φ -varietate reperată. Din 2.1.2 și 2.1.3, se obține, printr-un calcul algebric

$$(2.1.4) \quad \varphi\xi_i = 0, \quad \eta_i \circ \varphi = 0, \quad \varphi^3 + \varphi = 0.$$

Dacă $m = 2n + 1$ și $\text{rang } \varphi = 2n$ se obține o structură aproape de contact pe M .

Fie M o φ -varietate m -dimensională global reperată cu tensorii de structură (φ, ξ_i, η_i) , cu $\text{rang } \varphi = r$, și considerăm varietatea $M \times \mathbb{R}^{m-r}$. Vom nota un câmp vectorial pe $M \times \mathbb{R}^{m-r}$ cu $(X, \sum_{i=1}^{m-r} f_i \frac{\partial}{\partial t^i})$ unde X este tangent la M , $\{t^1, \dots, t^{m-r}\}$ sunt coordonatele uzuale pe \mathbb{R}^{m-r} și $\{f_1, \dots, f_{m-r}\}$ sunt funcții pe $M \times \mathbb{R}^{m-r}$. Pe $M \times \mathbb{R}^{m-r}$ definim câmpul tensorial de tip $(1, 1)$, J , prin

$$J(X, \sum_{i=1}^{m-r} f_i \frac{\partial}{\partial t^i}) = (\varphi X - \sum_{i=1}^{m-r} f_i \xi_i, \sum_{i=1}^{m-r} \eta_i(X) \frac{\partial}{\partial t^i}).$$

Se verifică ușor că $J^2 = -I$. Dacă structura aproape complexă J este integrabilă spunem că φ -structura reperată este normală. O φ -structură reperată este normală dacă S , câmpul tensorial de tip $(1, 2)$ definit prin

$$(2.1.5) \quad S = N_\varphi + \sum_{i=1}^{m-r} d\eta_i \otimes \xi_i,$$

se anulează, (vezi [22]), unde

$$(2.1.6) \quad N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y],$$

pentru $X, Y \in \chi(M)$, este câmpul tensorial Nijenhuis al lui φ .

Dacă g este o metrică (semi-)riemanniană pe M astfel încât

$$(2.1.7) \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \sum_{i=1}^{m-r} \eta_i(X) \eta_i(Y),$$

spunem că $(\varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o φ -structură metrică reperată și M se numește φ -varietate metrică reperată.

Metrica g se numește metrică (semi-)riemanniană asociată.

2-forma fundamentală, Ω , a φ -varietății metrică reperate M , se definește ca în cazul varietăților aproape hermitiene sau în cel al varietăților metrică aproape de contact, prin $\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$, pentru orice $X, Y \in \chi(M)$.

φ -varietatea M cu tensorii de structură (φ, ξ_i, η_i) se numește \mathcal{C} -varietate dacă este normală, $d\Omega = 0$ și $d\eta_i = 0$, $i = 1, \dots, m - r$, (vezi [3]).

Dacă pe varietatea aproape de contact (M, φ, ξ, η) este definită metrica asociată g atunci $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ se numește varietate metrică aproape de contact. Dacă pe o astfel de varietate, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, avem $\Omega = d\eta$, unde Ω este 2-forma fundamentală pe M , atunci $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ se numește varietate metrică de contact. Dacă pentru o structura metrică aproape de contact (φ, ξ, η, g) , normală, avem $d\eta = 0$ și $d\Omega = 0$ atunci $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ se numește varietate cosimplectică.

În [2] sunt demonstrate următoarele două rezultate

Lema 2.1.1 Pentru o structură metrică aproape de contact (φ, ξ, η, g) , pe varietatea diferențiabilă M , derivată covariantă a lui φ este dată de

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Omega(X, Y, Z) + g(N_\varphi(Y, Z), \varphi X) + \\ + ((L_{\varphi Y} \eta)(Z) - (L_{\varphi Z} \eta)(Y))\eta(X) + d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y).$$

unde L este derivata Lie și ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M .

Teorema 2.1.2 Structura metrică aproape de contact (φ, ξ, η, g) este cosimplectică dacă și numai dacă φ este paralel.

În același mod ca în [2] obținem, (vezi și [6]),

Lema 2.1.3 Dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o φ -varietate metrică reperată, unde $i = 1, \dots, n$, atunci

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Omega(X, Y, Z) + g(N_\varphi(Y, Z), \varphi X) + \\ + \sum_{i=1}^n [d\eta_i(\varphi Y, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(\varphi Z, X)\eta_i(Y)] + \\ + \sum_{i=1}^n [d\eta_i(\varphi Y, Z) + d\eta_i(Y, \varphi Z)]\eta_i(X).$$

Observația 2.1.4 Dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o φ -varietate metrică reperată normală, unde $i = 1, \dots, n$, atunci

$$2g((\nabla_X \varphi)Y, Z) = d\Omega(X, \varphi Y, \varphi Z) - d\Omega(X, Y, Z) + \\ + \sum_{i=1}^n [d\eta_i(\varphi Y, X)\eta_i(Z) - d\eta_i(\varphi Z, X)\eta_i(Y)].$$

Evident, în [2] autorul folosește pentru calculul diferențialelor, $d\Omega$ și $d\eta$, convenția "Alt", în timp ce, în lucrarea de față, folosim pentru astfel de calcule convenția "Det".

Observația 2.1.5 Se demonstrează ușor că, dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o \mathcal{C} -varietate atunci φ este paralel.

2.2 Aplicații $\pm(J, \varphi)$ -olomorfe

Fie $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ o φ -varietate reperată și fie TN fibratul său tangent.

Fie $T^C N$ complexificatul lui TN . Atunci φ poate fi prelungit în mod unic la un endomorfism liniar complex al lui $T^C N$, notat deasemenea cu φ , care satisface (2.1.2). Valorile proprii ale φ sunt i , 0 , $-i$. Considerăm descompunerea uzuală

$$T^C N = T' N \oplus T^0 N \oplus T'' N$$

a lui $T^C N$ în fibratele proprii corespunzătoare valorilor proprii i , 0 , $-i$ ale lui φ .

Fie M o varietate aproape complexă, cu structura aproape complexă J . Atunci complexificatul fibratului tangent, $T^C M$, se poate descompune într-o sumă directă de fibrate proprii ale lui J

$$T^C M = T' M \oplus T'' M$$

corespunzătoare valorilor proprii i , $-i$.

Definiția 2.2.1 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă între varietatea aproape complexă (M, J) și φ -varietatea reperată (N, φ, ξ, η) . Definim

$$\partial f : T' M \rightarrow T' N$$

$$\bar{\partial} \bar{f} : T' M \rightarrow T'' N$$

$$\partial_0 f : T' M \rightarrow T_0 N$$

$$\bar{\partial} f : T'' M \rightarrow T' N$$

$$\bar{\partial} \bar{f} : T'' M \rightarrow T'' N$$

$$\bar{\partial}_0 f : T'' M \rightarrow T_0 N$$

prin

$$df|_{T' M} = \partial f + \bar{\partial} \bar{f} + \partial_0 f$$

$$df|_{T'' M} = \bar{\partial} f + \bar{\partial} \bar{f} + \bar{\partial}_0 f.$$

Pentru $X \in TM$, $X' = \frac{1}{2}(X - iJX) \in T'M$, $X'' = \frac{1}{2}(X + iJX) \in T''M$, avem

$$(2.2.1) \quad \partial f(X') = \frac{1}{4}(f_*X - if_*JX - \partial_0 f(X') - i\varphi f_*X - \varphi f_*JX),$$

$$(2.2.2) \quad \partial \bar{f}(X') = \frac{1}{4}(f_*X - if_*JX - \partial_0 f(X') + i\varphi f_*X + \varphi f_*JX),$$

unde am notat cu f_* aplicația tangentă indusă de f , $f_* : TM \rightarrow TN$.

Definiția 2.2.2 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Dacă $f_*J = \varphi f_*$, atunci f se numește aplicație (J, φ) -olomorfa (sau aplicație $+(J, \varphi)$ -olomorfa); dacă $f_*J = -\varphi f_*$, atunci f se numește aplicație (J, φ) -antiolomorfa (sau aplicație $-(J, \varphi)$ -olomorfa).

Propoziția 2.2.1 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Atunci f este o aplicație $-(J, \varphi)$ -olomorfa dacă și numai dacă $\partial f = 0$ și $\partial_0 f = 0$.

Demonstrație. Dacă $f : M \rightarrow N$ este o aplicație $-(J, \varphi)$ -olomorfa atunci avem, pentru $X \in TM$, $X' = \frac{1}{2}(X - iJX) \in T'M$, $X'' = \frac{1}{2}(X + iJX) \in T''M$, folosind (2.1.4), $\partial f(X') = -\frac{1}{4}\partial_0 f(X')$.

Deoarece $\partial f \in T'N$, $\partial_0 f \in T^0N$, atunci $\partial f(X') = 0$ și $\partial_0 f(X') = 0$.

Invers, dacă $\partial f = 0$ și $\partial_0 f = 0$, obținem

$$\frac{1}{4}(f_*X - if_*JX - i\varphi f_*X - \varphi f_*JX) = 0,$$

pentru $X \in \chi(M)$.

Atunci $f_*J = -\varphi f_*$.

În mod analog, obținem

Propoziția 2.2.2 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Atunci f este o aplicație $+(J, \varphi)$ -olomorfa dacă și numai dacă $\partial \bar{f} = 0$ și $\partial_0 \bar{f} = 0$.

2.3 Armonicitatea aplicațiilor $\pm(J, \varphi)$ -olomorfe

Fie (M, g, J) o varietate aproape hermitiană, adică $g(JX, JY) = g(X, Y)$ pentru orice câmpuri vectoriale X, Y pe M , și $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o φ -varietate metrică reperată. Pentru câmpul hermitian de repere local, $\{e_i, Je_i\}$, pe M , avem câmpurile olomorf și anti-olomorf ortonormate corespunzătoare, $\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_i - iJe_i)$ și respectiv $\bar{\varepsilon}_i = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_i + iJe_i)$. Pentru o aplicație netedă $f : M \rightarrow N$ avem, după un calcul direct

$$(2.3.1) \quad |\partial f|^2 + \frac{1}{2} |\partial_0 f|^2 = \frac{1}{4}[h(f_*e_i, f_*e_i) + h(f_*Je_i, f_*Je_i) + 2h(f_*Je_i, \varphi f_*e_i)],$$

$$(2.3.2) \quad |\bar{\partial}f|^2 + \frac{1}{2} |\partial_0 f|^2 = \frac{1}{4} [h(f_*e_i, f_*e_i) + h(f_*Je_i, f_*Je_i) - 2h(f_*Je_i, \varphi f_*e_i)].$$

Definiția 2.3.1 Numim

$$|\partial f|^2 + \frac{1}{2} |\partial_0 f|^2 = e'(f)$$

și

$$|\bar{\partial}f|^2 + \frac{1}{2} |\partial_0 f|^2 = e''(f)$$

densități parțiale de energie. Dacă M este compactă, putem defini

$$E'(f) = \int_M e'(f) * 1, \quad E''(f) = \int_M e''(f) * 1, \quad E(f) = E'(f) + E''(f),$$

unde $E'(f)$ și $E''(f)$ se numesc energii parțiale, și $*1$ este forma volum pe M .

Evident f este o aplicație $+(J, \varphi)$ -olomorfa dacă și numai dacă $E'(f) = 0$ și f este o aplicație $-(J, \varphi)$ -olomorfa dacă și numai dacă $E''(f) = 0$.

Considerăm 2-forma fundamentală ω a varietății aproape Kähler (M, g, J) , definită prin $\omega(X, Y) = g(X, JY)$ cu $X, Y \in \chi(M)$ care satisface $d\omega = 0$ și Ω , 2-forma fundamentală a φ -varietății metrice reperate, $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, definită de $\Omega(X, Y) = h(X, \varphi Y)$ cu $X, Y \in \chi(N)$, care satisface $d\Omega = 0$. Definim

$$(2.3.3) \quad K(f) = E'(f) - E''(f) = \int_M h(f_*Je_i, \varphi f_*e_i) * 1,$$

unde $\{e_i, Je_i\}$ este un câmp hermitian de repere local.

Deoarece

$$\begin{aligned} \omega(e_i, e_j) &= h(Je_i, e_j) = 0, \\ \omega(Je_i, Je_j) &= -h(e_i, Je_j) = 0, \\ \omega(e_i, Je_j) &= h(Je_i, Je_j) = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

obținem

$$\begin{aligned} \langle f^*\Omega, \omega \rangle &= f^*\Omega(e_i, e_j)\omega(e_i, e_j) + f^*\Omega(e_i, Je_j)\omega(e_i, Je_j) + \\ &+ f^*\Omega(Je_i, Je_j)\omega(Je_i, Je_j) = \Omega(f_*e_i, f_*Je_j) = h(\varphi f_*e_i, f_*Je_j). \end{aligned}$$

Înlocuind în (2.3.3), avem

$$K(f) = \int_M \langle f^*\Omega, \omega \rangle * 1.$$

Propoziția 2.3.1 $K(f)$ este un invariant omotopic.

Demonstrație. Fie $f_t : M \times [0, 1] \rightarrow N$ o familie uniparametrică de aplicații. Atunci $\frac{d}{dt} f_t^* \Omega$ este o formă exactă, adică există $\theta_t = f_t^* i(f_t^* \frac{\partial}{\partial t}) \Omega$, unde $i(X)\Omega$ notează produsul interior dintre vectorul X și 2-forma Ω , astfel încât $\frac{d}{dt} f_t^* \Omega = d\theta_t$, (vezi [48]).

Urmează că

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(f_t) &= \frac{d}{dt} \int_M \langle f_t^* \Omega, \omega \rangle * 1 = \int_M \langle \frac{d}{dt} f_t^* \Omega, \omega \rangle * 1 = \\ &= \int_M \langle d\theta_t, \omega \rangle * 1 = \int_M \langle \theta_t, \delta\omega \rangle * 1 = \\ &= \int_M \langle \theta_t, - * d * \omega \rangle * 1 = - \int_M \langle \theta_t, * d(\omega)^{n-1} \rangle * 1 = 0. \end{aligned}$$

Teorema 2.3.2 *Fie M o varietate aproape Kähler, și fie N o φ -varietate metrică reperată, cu 2-forma fundamentală Ω satisfăcând $d\Omega = 0$. Dacă M este compactă, atunci orice aplicație $\pm(J, \varphi)$ -olomorfă este armonică și, mai mult, un minim al energiei în clasa sa de omotopie.*

Demonstrație. Este suficient să studiem cazul $+(J, \varphi)$ -olomorf.

Fie f o aplicație $+(J, \varphi)$ -olomorfă. Atunci $E''(f) = 0$. Considerăm $f_t : M \times [0, 1] \rightarrow N$, cu $f_0 = f$.

Atunci

$$E(f_0) = E'(f_0) + E''(f_0) = E'(f_0) - E''(f_0) = K(f_0) = K(f_t) \leq E(f_t).$$

Corolar 2.3.3 *Fie M și N ca mai sus, $f_0 : M \rightarrow N$ o aplicație $+(J, \varphi)$ -olomorfă, și $f_1 : M \rightarrow N$ o aplicație $-(J, \varphi)$ -olomorfă. Atunci f_0 și f_1 sunt omotope doar dacă sunt constante.*

Demonstrație. Dacă f_0 este omotopă cu f , atunci

$$\begin{aligned} E(f_0) &= E'(f_0) + E''(f_0) = E'(f_0) - E''(f_0) = K(f_0) = \\ &= K(f_1) = E'(f_1) - E''(f_1) = -E'(f_1) - E''(f_1) = -E(f_1). \end{aligned}$$

Astfel $E(f_0) = E(f_1) = 0$.

2.4 Stabilitatea aplicațiilor (J, φ) -olomorfe între o varietate Kähler și o varietate cosimplectică

Teorema 2.4.1 *Fie (M, g, J) o varietate Kähler compactă cu $\dim M = 2m$, și fie $(N, \varphi, \xi, \eta, h)$ o varietate cosimplectică. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație (J, φ) -olomorfă. Atunci*

$$\int_M h(J_f V, V) * 1 = \frac{1}{2} \int_M h(DV, DV) * 1 + \int_M \text{tr}(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V) * 1,$$

unde $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$, și J_f este operatorul Jacobi al lui f , definit prin

$$J_f V = - \sum_{i=1}^m (\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} - \tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i}) V - \sum_{i=1}^m R^N(V, f_* e_i) f_* e_i, V \in \Gamma(f^{-1}TN),$$

unde am notat cu R^N tensorul de curbură al varietății N . Pentru orice $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$, DV este un element din $\Gamma(f^{-1}TN \otimes T^*M)$ definit prin

$$DV(X) = \tilde{\nabla}_{JX} V - \varphi \tilde{\nabla}_X V, X \in \chi(M),$$

și $(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V)$ este definit de

$$(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V)(X, Y) = (\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla}_X V, \tilde{\nabla}_Y V),$$

unde $X, Y \in \chi(M)$. Atunci

1) f este slab stabilă, adică, toate valorile proprii ale lui J_f sunt nenegative.

2) $\ker J_f = \{V \in \Gamma(f^{-1}TN), DV = 0\}$.

Demonstrație. Pentru o bază ortonormată, $\{e_1, \dots, e_m, J_{e_1}, \dots, J_{e_m}\}$, în TM , se obține

$$\begin{aligned} h(DV, DV) &= \sum_{i=1}^m \{h(DV(e_i), DV(e_i)) + h(DV(J_{e_i}), DV(J_{e_i}))\} = \\ &= \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V - \varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V - \varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V) + \\ &\quad + h(-\tilde{\nabla}_{e_i} V - \varphi \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V, -\tilde{\nabla}_{e_i} V - \varphi \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V)\}. \end{aligned}$$

Deoarece $h(\varphi X, \varphi Y) = h(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ avem

$$\begin{aligned} &h(DV, DV) + \eta(\tilde{\nabla}_{e_i} V)\eta(\tilde{\nabla}_{e_i} V) + \eta(\tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V)\eta(\tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V) = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} V) - 2h(\varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V) + h(\tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V, \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V)\}. \end{aligned}$$

Astfel

$$\begin{aligned} (2.4.1) \quad &\int_M [h(J_f V, V) - \frac{1}{2}h(DV, DV) - \text{tr}(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V)] * 1 = \\ &= \int_M \sum_{i=1}^m \{-h(R^N(V, f_* e_i) f_* e_i, V) - h(R^N(V, f_* J_{e_i}) f_* J_{e_i}, V) + \\ &\quad + 2h(\varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J_{e_i}} V)\} * 1, \end{aligned}$$

Deoarece

$$\int_M h(J_f V, V) * 1 = \int_M \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} V) + h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} V) - \\ - h(R^N(V, f_* e_i) f_* e_i, V) - h(R^N(V, f_* J e_i) f_* J e_i, V)\} * 1, \text{ (vezi [45]).}$$

În continuare, vom demonstra că

$$(2.4.2) \quad A = R^N(V, f_* e_i) f_* e_i + R^N(V, f_* J e_i) f_* J e_i = \varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i) V.$$

Cum $(N, \varphi, \xi, \eta, h)$ este o varietate cosimplectică avem $\nabla^N \varphi = 0$, adică $\nabla_X^N \varphi Y = \varphi \nabla_X^N Y$, pentru orice $X, Y \in \chi(N)$, (vezi [2]).

De aici și din (J, φ) -olomorficitatea lui f obținem

$$A = -\varphi R^N(V, f_* e_i) f_* J e_i + \varphi R^N(V, f_* J e_i) f_* e_i = \\ = \varphi R^N(f_* e_i, V) f_* J e_i + \varphi R^N(V, f_* J e_i) f_* e_i = \varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i) V,$$

unde, pentru $X, Y, Z \in \chi(N)$, am folosit formulele

$$R^N(X, Y)Z + R^N(Y, X)Z = 0,$$

$$R^N(X, Y)Z + R^N(Y, Z)X + R^N(Z, X)Y = 0.$$

Din (2.4.1) și (2.4.2) avem

$$(2.4.3) \quad \int_M [h(J_f V, V) - \frac{1}{2}h(DV, DV) - \text{tr}(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V)] * 1 = \\ = \int_M \sum_{i=1}^m \{-h(\varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i) V, V) + 2h(\varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} V)\} * 1.$$

Pentru a încheia demonstrația, este suficient să arătăm că a doua integrală din (2.4.3) se anulează. Pentru aceasta vom arăta

$$(2.4.4) \quad \int_M \sum_{i=1}^m -h(\varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i) V, V) * 1 = \\ = \int_M \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} \varphi V) - h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} \varphi V)\} * 1.$$

Atunci integrala din (2.4.3) coincide cu

$$\int_M \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} \varphi V) - h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} \varphi V) + 2h(\varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} V)\} * 1$$

care se anulează deoarece $\tilde{\nabla}_X \varphi V = \varphi \tilde{\nabla}_X V$ din faptul că $(N, \varphi, \xi, \eta, h)$ este cosimplectică și $h(\varphi X, Y) = -h(X, \varphi Y)$.

Ecuția (2.4.4) se obține în felul următor, deoarece $[e_i, J e_i] = \nabla_{e_i}^M J e_i - \nabla_{J e_i}^M e_i$, rezultă

$$(2.4.5) \quad -h(\varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i)V, V) = h(\varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i)V, \varphi V) = \\ = h(\tilde{\nabla}_{e_i} \tilde{\nabla}_{J e_i} V - \tilde{\nabla}_{J e_i} \tilde{\nabla}_{e_i} V - \tilde{\nabla}_{[e_i, J e_i]} V, \varphi V) = \\ = e_i(h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \varphi V)) - h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} \varphi V) - \\ - J e_i(h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \varphi V)) + h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} \varphi V) - h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} J e_i} V, \varphi V) + h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{J e_i} e_i} V, \varphi V),$$

deoarece $\tilde{\nabla}$ și h sunt compatibile.

Definim o funcție netedă, s , pe M prin

$$(2.4.6) \quad s = \sum_{i=1}^m \{e_i(h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \varphi V)) - J e_i(h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \varphi V)) - \\ - h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} J e_i} V, \varphi V) + h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{J e_i} e_i} V, \varphi V)\}.$$

Fie X un câmp vectorial pe M definit de $g(X, Y) = h(\tilde{\nabla}_{J Y} V, \varphi V)$, pentru orice $Y \in \chi(M)$.

Atunci, obținem

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^m \{g(e_i, \nabla_{e_i}^M X) + g(J e_i, \nabla_{J e_i}^M X)\} = \sum_{i=1}^m \{e_i(g(e_i, X)) - g(\nabla_{e_i}^M e_i, X) + \\ + J e_i(g(J e_i, X)) - g(\nabla_{J e_i}^M J e_i, X)\} = \sum_{i=1}^m \{e_i(h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \varphi V)) - \\ - J e_i(h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \varphi V)) - h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{e_i} J e_i} V, \varphi V) + h(\tilde{\nabla}_{\nabla_{J e_i} e_i} V, \varphi V)\} = s.$$

Astfel

$$(2.4.7) \quad \int_M s * 1 = 0.$$

Din (2.4.5), (2.4.6) și (2.4.7) avem

$$\int_M \sum_{i=1}^m -h(\varphi R^N(f_* e_i, f_* J e_i)V, V) * 1 = \int_M \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} \varphi V) - \\ h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} \varphi V)\} * 1.$$

Atunci, se obține

$$\int_M [h(J_f V, V) - \frac{1}{2} h(DV, DV) - \operatorname{tr}(\eta \otimes \eta)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V)] * 1 = \\ = \int_M \sum_{i=1}^m \{h(\tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} \varphi V) - h(\tilde{\nabla}_{J e_i} V, \tilde{\nabla}_{e_i} \varphi V) + 2h(\varphi \tilde{\nabla}_{e_i} V, \tilde{\nabla}_{J e_i} V)\} * 1 = 0.$$

Exact ca mai sus, folosind Lema 2.1.3, se demonstrează

Teorema 2.4.2 Fie (M, g, J) o varietate Kähler compactă cu $\dim M = 2m$, și fie $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, unde $i = 1, \dots, n$, o \mathcal{C} -varietate. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație (J, φ) -olomorfă. Atunci

$$\int_M h(J_f V, V) * 1 = \frac{1}{2} \int_M h(DV, DV) * 1 + \int_M \sum_{i=1}^n \text{tr}(\eta_i \otimes \eta_i)(\tilde{\nabla} V, \tilde{\nabla} V) * 1,$$

unde $V \in \Gamma(f)^{-1}TN$, J_f este operatorul Jacobi al lui f , și DV este definit ca în Teorema 2.4.1. Atunci

- 1) f este slab stabilă.
- 2) $\ker J_f = \{V \in \Gamma(f)^{-1}TN, DV = 0\}$.

În continuare, fie (M, g, J) o varietate Kähler $2n$ -dimensională, cu coordonatele locale $\{x^1, \dots, x^{2n}\}$ și fie t coordonata pe \mathbb{R} . Atunci pe $M \times \mathbb{R}$ considerăm $\eta = dt$ și $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Definim metrica G pe $M \times \mathbb{R}$ prin

$$G((X, a \frac{\partial}{\partial t}), (Y, b \frac{\partial}{\partial t})) = g(X, Y) + (\eta \otimes \eta)((X, a \frac{\partial}{\partial t}), (Y, b \frac{\partial}{\partial t})),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$ și $a, b : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. În coordonate locale, G are expresia

$$G = g_{ij} dx^i dx^j + dt dt,$$

unde g_{ij} sunt componentele lui g .

Pe $M \times \mathbb{R}$ definim câmpul tensorial φ , de tip $(1,1)$, prin $\varphi \xi = 0$ și $\varphi(X, 0) = JX$ pentru $X \in \chi(M)$. Atunci (φ, ξ, η, G) este o structură metrică aproape de contact pe $M \times \mathbb{R}$. Fie Ω 2-forma fundamentală pe $(M \times \mathbb{R}, \varphi, \xi, \eta, G)$ definită prin $\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \varphi \tilde{Y})$ pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(M \times \mathbb{R})$.

Printr-un calcul direct se obține $d\Omega = 0$ și $d\eta = 0$.

Deoarece (M, g, J) este o varietate Kähler avem $N_J = 0$, unde N_J este tensorul Nijenhuis al lui J .

Fie N_φ tensorul Nijenhuis al φ . Atunci obținem $N_\varphi((X, 0), (Y, 0)) = N_J(X, Y)$ și $N_\varphi((X, 0), (0, \frac{\partial}{\partial t})) = 0$ pentru orice $X, Y \in \chi(M)$. Astfel, avem $N_\varphi = 0$ și, cum $d\Omega = 0$ și $d\eta = 0$, rezultă că $(M \times \mathbb{R}, \varphi, \xi, \eta, G)$ este o varietate cosimplectică.

Fie $i : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$ aplicația incluziune. Din definiția lui φ avem $i_* J = \varphi i_*$ și atunci i este o aplicație (J, φ) -olomorfă și, din Teorema 2.3.2, o aplicație armonică.

Notând cu ∇ și ∇' conexiunile Levi-Civita pe M și $M \times \mathbb{R}$ respectiv, avem

$$\nabla'_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \Gamma'_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} + \Gamma'_{ij}{}^0 \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\begin{aligned}\nabla'_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \Gamma'^k_{i0} \frac{\partial}{\partial x_k} + \Gamma'^0_{i0} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \nabla'_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t} &= \Gamma'^k_{00} \frac{\partial}{\partial x_k} + \Gamma'^0_{00} \frac{\partial}{\partial t},\end{aligned}$$

unde Γ'^k_{ij} , Γ'^0_{ij} , Γ'^k_{i0} , Γ'^k_{00} , Γ'^0_{00} sunt simbolii Christoffel ai conexiunii ∇' .

Se obține

$$\Gamma'^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \quad \Gamma'^0_{ij} = \Gamma'^k_{00} = \Gamma'^k_{i0} = \Gamma'^0_{00} = 0,$$

unde Γ^k_{ij} sunt simbolii Christoffel ai conexiunii ∇ . Deci, pentru un câmp vectorial $V' = (V, f \frac{\partial}{\partial t}) \in \Gamma(i^{-1}T(M \times \mathbb{R}))$, unde $V \in \chi(M)$ și $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție netedă, avem

$$\begin{aligned}DV(X) &= \tilde{\nabla}_{JX} V' - \varphi \tilde{\nabla}_X V' = \\ &= \nabla'_{i_* JX} (V, f \frac{\partial}{\partial t}) - \varphi \nabla'_{i_* X} (V, f \frac{\partial}{\partial t}) = \\ &= \nabla_{JX} V - J \nabla_X V + JX(f) \frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}$$

pentru orice $X \in \chi(M)$, deoarece (M, g, J) este o varietate Kähler și $(M \times \mathbb{R}, \varphi, \xi, \eta, G)$ este o varietate cosimplectică.

Atunci $DV = 0$ dacă și numai dacă V este un câmp vectorial olomorf, (vezi [45]), și f este o constantă. Astfel, din Teorema 2.3.2, avem

Propoziția 2.4.3 *Dacă (M, g, J) este o varietate Kähler și $(M \times \mathbb{R}, \varphi, \xi, \eta, G)$ este varietatea cosimplectică obținută ca mai sus, atunci aplicația incluziune, $i : M \hookrightarrow M \times \mathbb{R}$ este slab stabilă. Mai mult $\text{Ker}(J_i) = \{V' = (V, a \frac{\partial}{\partial t}) \in \Gamma(i^{-1}T(M \times \mathbb{R}))\}$, unde V este un câmp vectorial olomorf pe M și $a \in \mathbb{R}$ este o constantă}.*

Capitolul 3

Aplicații armonice între φ -varietăți reperate

Introducere

În acest capitol, găsim două clase de φ -varietăți reperate de dimensiune pară și respectiv impară, astfel încât orice aplicație $\pm(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}')$ -olomorfă între aceste varietăți să fie armonică, unde $\tilde{\varphi}$ și $\tilde{\varphi}'$ sunt câmpurile tensoriale de tip (1,1) care definesc o structură aproape complexă sau aproape de contact, induse pe varietățile considerate. Găsim apoi condiții de $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}')$ -olomorficitate, determinăm o φ -structură reperată pe fibratul tangent TM al unei varietăți cosimplete M și dăm câteva rezultate de armonicitate pentru aplicațiile definite pe acest fibrat, iar în final demonstrăm că proiecția canonică, $\pi : TM \rightarrow M$, este o aplicație armonică. Rezultatele prezentate aici se găsesc în articolul ”**Harmonic maps on framed φ -manifolds**” apărută în *Analele Științifice ale Universității ”Al.I.Cuza” Iași*, tomul L, f.1, 2004.

3.1 Aplicații armonice între φ -varietăți reperate de dimensiune pară

Fie o φ -varietate reperată m -dimensională $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$. Pe această varietate definim câmpul tensorial de tip (1,1), $\tilde{\varphi}$, prin

$$(3.1.1) \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m-r}{2} \rfloor} (\eta_{2i} \otimes \xi_{2i-1} - \eta_{2i-1} \otimes \xi_{2i}).$$

Se demonstrează ușor că $\tilde{\varphi}$ este o structură aproape complexă pe M dacă $m = 2n$, sau o structură aproape de contact, $(\tilde{\varphi}, \xi_{2n-2r+1}, \eta_{2n-2r+1})$, dacă $m = 2n + 1$, (vezi [22]).

Relativ la această structură indusă avem, în cazul dimensiunii pare, (vezi [22]),

Teorema 3.1.1 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ o φ -varietate reperată normală, de dimensiune $2n$, cu rang $\varphi = r$, și $i = 1, 2, \dots, 2n - r$. Atunci structura aproape complexă indusă pe M ,

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2n-r}{2} \rfloor} (\eta_{2i} \otimes \xi_{2i-1} - \eta_{2i-1} \otimes \xi_{2i}),$$

este integrabilă.

Folosind acest rezultat, obținem

Teorema 3.1.2 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ o φ -varietate metrică reperată normală de dimensiune $2m$, unde metrica riemanniană g are 2-forma fundamentală Ω , și fie $(M', \varphi', \xi'_j, \eta'_j, g')$ o φ' -varietate metrică reperată normală de dimensiune $2n$, cu 2-forma fundamentală Ω' , astfel încât

$$(3.1.2) \quad d\Omega + \sum_{i=1}^{m-k} d(\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i}) = 0,$$

și

$$(3.1.3) \quad d\Omega' + \sum_{j=1}^{n-l} d(\eta'_{2j-1} \wedge \eta'_{2j}) = 0,$$

unde rang $\varphi = 2k$, și rang $\varphi' = 2l$.

Fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație netedă. Atunci f este armonică dacă și numai dacă

$$\tilde{\varphi}' f_* = \pm f_* \tilde{\varphi},$$

unde $\tilde{\varphi} = \varphi + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i} \otimes \xi_{2i-1} - \eta_{2i-1} \otimes \xi_{2i})$, este structura aproape complexă indusă pe M , și $\tilde{\varphi}' = \varphi' + \sum_{j=1}^{n-l} (\eta'_{2j} \otimes \xi_{2j-1} - \eta'_{2j-1} \otimes \xi_{2j})$, este structura aproape complexă indusă pe M' .

Demonstrație. Fie $X, Y \in \chi(M)$. Avem

$$g(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) = g(\varphi X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^{2m-2k} \eta_i(X)\eta_i(Y) = g(X, Y),$$

deoarece g este o metrică asociată pe M . Deci g este o metrică aproape hermitiană pe varietatea aproape complexă $(M, \tilde{\varphi})$.

Fie $\tilde{\Omega}$, 2-forma fundamentală a varietății aproape hermitiene $(M, g, \tilde{\varphi})$, definită prin $\tilde{\Omega}(X, Y) = g(X, \tilde{\varphi}Y)$. Avem

$$\tilde{\Omega}(X, Y) = g(X, \tilde{\varphi}Y) = g(X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^{m-k} [\eta_{2i}(Y)\xi_{2i-1} - \eta_{2i-1}(Y)\xi_{2i}] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \Omega(X, Y) + \sum_{i=1}^{m-k} [\eta_{2i-1}(X)\eta_{2i}(Y) - \eta_{2i}(X)\eta_{2i-1}(Y)] = \\
 &= \Omega(X, Y) + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i})(X, Y).
 \end{aligned}$$

Astfel $\tilde{\Omega} = \Omega + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i})$, și, din (3.1.2), obținem

$$d\tilde{\Omega} = d\Omega + \sum_{i=1}^{m-k} d(\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i}) = 0,$$

ceea ce înseamnă că $(M, g, \tilde{\varphi})$ este o varietate aproape Kähler. Dar cum $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este normală, urmează, din Teorema 3.1.1, că $N_{\tilde{\varphi}} = 0$, unde $N_{\tilde{\varphi}}$ este tensorul Nijenhuis al lui $\tilde{\varphi}$. Deci $(M, g, \tilde{\varphi})$ este o varietate Kähler. În același mod obținem că și $(M', g', \tilde{\varphi}')$ este o varietate Kähler, și atunci $f : M \rightarrow M'$ este o aplicație între două varietăți Kähler. Rezultă că f este o aplicație armonică dacă și numai dacă f este o aplicație \pm olomorfă, adică $\tilde{\varphi}' f_* = \pm f_* \tilde{\varphi}$.

Observația 3.1.3 În [8] este demonstrat că, dacă (M, g, J) și (M', g', J') sunt două varietăți Kähler atunci o aplicație netedă $f : M \rightarrow M'$ este armonică dacă și numai dacă f este o aplicație \pm olomorfă. În același mod se demonstrează că, dacă g și g' sunt doar metrice semi-riemanniene pe varietățile complexe (M, J) și respectiv (M', J') , care satisfac $g(JX, JY) = g(X, Y)$, $X, Y \in \chi(M)$, $g'(J'X', J'Y') = g'(X', Y')$, $X', Y' \in \chi(M')$, și 2-formele fundamentale Ω și Ω' ale (M, g, J) și, respectiv, (M', g', J') sunt închise, atunci orice aplicație \pm olomorfă, f , între (M, g, J) și (M', g', J') , este armonică. Astfel, dacă în Teorema 3.1.2 metricile g și g' sunt doar metrice semi-riemanniene atunci o aplicație netedă $f : M \rightarrow M'$ care satisface $\tilde{\varphi}' f_* = \pm f_* \tilde{\varphi}$ este armonică.

În continuare, dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ este o φ -varietate reperată vom nota cu D distribuția pe M , ortogonală pe $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{m-r}\}$, unde $\dim M = m$, și $\text{rang } \varphi = r$, și cu $\Gamma(D)$ spațiul secțiunilor diferențiabile ale D .

Propoziția 3.1.4 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_j, \eta'_j, g')$ ca în Teorema 3.1.2, și fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație netedă. Atunci $\tilde{\varphi}' f_* = \pm f_* \tilde{\varphi}$ dacă și numai dacă

$$(3.1.4) \quad \pm f_* \varphi X = \varphi' f_* X + \sum_{j=1}^{n-l} [\eta'_{2j}(f_* X) \xi'_{2j-1} - \eta'_{2j-1}(f_* X) \xi'_{2j}],$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$, și

$$(3.1.5) \quad f_* \xi_{2i-1} = W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (a_i^{2j-1} \xi'_{2j-1} + a_i^{2j} \xi'_{2j}),$$

$$(3.1.6) \quad f_*\xi_{2i} = \mp\varphi'W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (\mp a_i^{2j}\xi'_{2j-1} \pm a_i^{2j-1}\xi'_{2j}),$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, m - k$, unde $W_i \in \Gamma(D)$, și $a_i^p : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m - k$; $p = 1, \dots, 2n - 2l$.

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul $\tilde{\varphi}'f_* = f_*\tilde{\varphi}$.

Mai întâi, ecuația (3.1.4) este echivalentă cu $\varphi'f_* = f_*\tilde{\varphi}$, pentru orice $X \in \Gamma(D)$. Din (3.1.5) și (3.1.6) avem

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'f_*\xi_{2i-1} &= \tilde{\varphi}'W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (a_i^{2j-1}\tilde{\varphi}'\xi'_{2j-1} + a_i^{2j}\tilde{\varphi}'\xi'_{2j}) = \\ &= \varphi'W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (-a_i^{2j-1}\xi'_{2j} + a_i^{2j}\xi'_{2j-1}) = -f_*\xi_{2i} = f_*\tilde{\varphi}\xi_{2i-1}, \end{aligned}$$

deoarece $\tilde{\varphi}\xi_{2i-1} = -\xi_{2i}$ și $\tilde{\varphi}\xi_{2i} = \xi_{2i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m - k$. Analog, obținem $\tilde{\varphi}'f_*\xi_{2i} = f_*\tilde{\varphi}\xi_{2i}$. Astfel avem $\tilde{\varphi}'f_* = f_*\tilde{\varphi}$.

Pentru a demonstra reciproca, presupunem $\tilde{\varphi}'f_* = f_*\tilde{\varphi}$, și

$$f_*\xi_{2i-1} = W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (a_i^{2j-1}\xi'_{2j-1} + a_i^{2j}\xi'_{2j}),$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, m - k$, unde $W_i \in \Gamma(D)$, și $a_i^p : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m - k$; $p = 1, \dots, 2n - 2l$.

Se obține

$$f_*\xi_{2i} = \mp\varphi'W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (\mp a_i^{2j}\xi'_{2j-1} \pm a_i^{2j-1}\xi'_{2j}),$$

deoarece $\tilde{\varphi}\xi_{2i-1} = -\xi_{2i}$, $\tilde{\varphi}\xi_{2i} = \xi_{2i-1}$, $i = 1, 2, \dots, m - k$, și $\tilde{\varphi}'\xi'_{2i-1} = -\xi'_{2i}$, $\tilde{\varphi}'\xi'_{2j} = \xi'_{2j-1}$, $j = 1, 2, \dots, n - l$.

Observația 3.1.5 Dacă $\dim M = \dim M' = 2m$ și $\text{rang } \varphi = \text{rang } \varphi' = 2k$, atunci condițiile (3.1.4), (3.1.5) și (3.1.6) sunt verificate dacă $f : M \rightarrow M'$ este un izomorfism, adică $f_*\varphi = \varphi'f_*$ și $f_*\xi_i = \xi'_i$, $i = 1, 2, \dots, 2m - 2k$. Astfel, dacă $f : M \rightarrow M'$ este un izomorfism, atunci aplicația f este armonică.

Propoziția 3.1.6 Fie (M, g, J) o varietate Kähler și fie $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o φ -varietate reperată normală $2n$ -dimensională, unde g este o metrică riemanniană, cu 2-forma fundamentală Ω satisfăcând

$$(3.1.7) \quad d\Omega + \sum_{j=1}^{n-l} d(\eta_{2j-1} \wedge \eta_{2j}) = 0,$$

unde $\text{rang } \varphi = 2l$.

Fie aplicația netedă $f : M \rightarrow N$. Dacă

$$(3.1.8) \quad f_*J = \pm\varphi f_*,$$

atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Fie $X \in \chi(M)$. Atunci, din (3.1.8), avem

$$-f_*X = \pm\varphi f_*JX,$$

adică $f_*X \in \Gamma(D)$, pentru orice $X \in \chi(M)$, unde D este distribuția pe N ortogonală pe $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{2n-2l}\}$. Atunci $\varphi f_*X = \tilde{\varphi} f_*X$, pentru orice $X \in \chi(M)$, unde $\tilde{\varphi}$ este structura aproape complexă indusă pe N .

Astfel, din (3.1.8), avem $f_*J = \pm\tilde{\varphi}f_*$, și cum, din definiție și 3.1.7, $(N, g, \tilde{\varphi})$ este o varietate Kähler, urmează că f este o aplicație armonică.

Propoziția 3.1.7 Fie (M, g, J) și $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ ca în Propoziția 3.1.6 și fie $f : N \rightarrow M$ o aplicație netedă. Atunci f este armonică dacă și numai dacă

$$(3.1.9) \quad Jf_*X = \pm f_*\varphi X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$, și

$$(3.1.10) \quad f_*\xi_{2i} = \mp Jf_*\xi_{2i-1},$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, 2n - 2l$.

Demonstrație. Deoarece din (3.1.9) și (3.1.10) avem $Jf_* = \pm f_*\tilde{\varphi}$, unde $\tilde{\varphi}$ este structura aproape complexă indusă pe N , și $(N, g, \tilde{\varphi})$ este o varietate Kähler, f este o aplicație armonică.

Reciproc, dacă f este o aplicație armonică, și deoarece $(N, g, \tilde{\varphi})$ este o varietate Kähler, avem

$$(3.1.11) \quad Jf_* = \pm f_*\tilde{\varphi}.$$

Dacă $X \in \Gamma(D)$, atunci $\tilde{\varphi}X = \varphi X$, și din (3.1.11) urmează (3.1.8). În final, avem $\tilde{\varphi}\xi_{2i-1} = -\xi_{2i}$, și din (3.1.11) se obține

$$f_*\tilde{\varphi}\xi_{2i-1} = -f_*\xi_{2i} = \pm Jf_*\xi_{2i-1}.$$

3.2 Aplicații armonice între φ -varietăți reperate de dimensiune impară

În [24] sunt demonstrate următoarele două rezultate

Teorema 3.2.1 Fie M și M' două varietăți cu structurile metrice de contact (φ, ξ, η, g) și, respectiv, $(\varphi', \xi', \eta', g')$, și fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație neconstantă. Atunci avem

1. Dacă $f_*\varphi = \varphi'f_*$ atunci există $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ astfel încât $f_{*x}\xi_x = a\xi'_{f(x)}$ în orice punct $x \in M$.

2. Dacă $f_*\varphi = -\varphi'f_*$ atunci există $a \in \mathbb{R}, a \leq 0$ astfel încât $f_{*x}\xi_x = a\xi'_{f(x)}$ în orice punct $x \in M$.

Teorema 3.2.2 Fie M și M' două varietăți metrice de contact și fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație netedă, astfel încât $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$. Atunci f este o aplicație armonică.

În cazul φ -varietăților reperate de dimensiune impară obținem

Teorema 3.2.3 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ două φ și, respectiv, φ' -varietăți metrice reperate, cu $\dim M = 2m+1$ și $\dim M' = 2n+1$, unde g și g' sunt metrice riemanniene. Fie Ω și Ω' , 2-formele fundamentale ale M și, respectiv, M' , astfel încât

$$(3.2.1) \quad \Omega + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i}) = d\eta_{2m-2k+1},$$

și

$$(3.2.2) \quad \Omega' + \sum_{j=1}^{n-l} (\eta'_{2j-1} \wedge \eta'_{2j}) = d\eta'_{2n-2l+1},$$

unde $\text{rang } \varphi = 2k$ și $\text{rang } \varphi' = 2l$.

Fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație netedă astfel încât

$$(3.2.3) \quad f_*\tilde{\varphi} = \pm\tilde{\varphi}'f_*,$$

unde $(\tilde{\varphi}, \xi_{2m-2k+1}, \eta_{2m-2k+1})$ și $(\tilde{\varphi}', \xi_{2n-2l+1}, \eta_{2n-2l+1})$ sunt structurile aproape de contact induse pe M și, respectiv, M' . Atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Deoarece g este o metrică asociată pe M avem

$$\begin{aligned} g(\tilde{\varphi}X, \tilde{\varphi}Y) &= g(\varphi X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^{2m-2k} \eta_i(X)\eta_i(Y) = \\ &= g(X, Y) - \eta_{2m-2k+1}(X)\eta_{2m-2k+1}(Y). \end{aligned}$$

Astfel g este o metrică asociată pe varietatea aproape de contact $(M, \tilde{\varphi}, \xi_{2m-2k+1}, \eta_{2m-2k+1})$.

Dacă $\tilde{\Omega}$ este 2-forma fundamentală a varietății metrice aproape de contact $(M, \tilde{\varphi}, \xi_{2m-2k+1}, \eta_{2m-2k+1}, g)$, adică $\tilde{\Omega}(X, Y) = g(X, \tilde{\varphi}Y)$, atunci avem $\tilde{\Omega}(X, Y) = g(X, \tilde{\varphi}Y) = g(X, \varphi Y) + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i})(X, Y)$.

Urmează că

$$\tilde{\Omega} = \Omega + \sum_{i=1}^{m-k} (\eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i}),$$

și din (3.2.1) obținem $\tilde{\Omega} = d\eta_{2m-2k+1}$.

Aceasta înseamnă că $(M, \tilde{\varphi}, \xi_{2m-2k+1}, \eta_{2m-2k+1}, g)$ este o varietate metrică de contact.

În mod analog se arată că $(M', \tilde{\varphi}', \xi'_{2n-2l+1}, \eta'_{2n-2l+1}, g')$ este o varietate metrică de contact.

Din (3.2.3), folosind Teorema 3.2.2, rezultă că f este o aplicație armonică.

La fel ca în Propoziția 3.1.4, folosind Teorema 3.2.1, se obține

Propoziția 3.2.4 *Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_j, \eta'_j, g')$ ca în Teorema 3.2.3 și fie $f : M \rightarrow M'$ o aplicație netedă. Atunci $f_*\tilde{\varphi} = \pm\tilde{\varphi}'f_*$ dacă și numai dacă*

$$(3.2.4) \quad \pm f_*\varphi X = \varphi' f_*X + \sum_{j=1}^{n-l} [\eta'_{2j}(f_*X)\xi'_{2j-1} - \eta'_{2j-1}(f_*X)\xi'_{2j}],$$

unde $X \in \Gamma(D)$,

$$(3.2.5) \quad f_*\xi_{2i-1} = W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (a_i^{2j-1}\xi'_{2j-1} + a_i^{2j}\xi'_{2j}),$$

$$(3.2.6) \quad f_*\xi_{2i} = \pm\varphi' W_i + \sum_{j=1}^{n-l} (\mp a_i^{2j}\xi'_{2j-1} + a_i^{2j-1}\xi'_{2j}),$$

$$(3.2.7) \quad f_*\xi_{2m-2k+1} = a\xi'_{2n-2l+1},$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, m - k$, unde $W_i \in \Gamma(D')$, D' este distribuția pe M' ortogonală pe $\text{span}\{\xi'_1, \dots, \xi'_{2n-2l+1}\}$, $a_i^p : M \rightarrow \mathbb{R}$, $p = 1, 2, \dots, 2n - 2l$ și $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ dacă $f_*\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'f_*$, $a \leq 0$ dacă $f_*\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}'f_*$.

Propoziția 3.2.5 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică de contact și fie $(N, \varphi', \xi_i, \eta_i, h)$ o φ' -varietate metrică reperată $2n + 1$ -dimensională, unde $\text{rang } \varphi' = 2l$, și metrica riemanniană h are 2-forma fundamentală Ω , astfel încât*

$$(3.2.8) \quad \Omega + \sum_{j=1}^{n-l} (\eta_{2j-1} \wedge \eta_{2j}) = d\eta_{2n-2l+1}.$$

Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Dacă

$$(3.2.9) \quad f_*\varphi X = \pm\varphi'f_*X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$, și

$$(3.2.10) \quad f_*\xi = a\xi_{2n-2l+1},$$

unde $a : M \rightarrow \mathbb{R}$, și D este distribuția pe M ortogonală pe ξ , atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Fie $(\tilde{\varphi}', \xi_{2n-2l+1}, \eta_{2n-2l+1})$ structura aproape de contact indusă pe N . Atunci, la fel ca în Teorema 3.2.3, se obține că $(N, \tilde{\varphi}', \xi_{2n-2l+1}, \eta_{2n-2l+1}, h)$ este o varietate metrică de contact.

Dacă $X \in \Gamma(D)$, din (3.2.9) avem

$$f_*\varphi^2 X = -f_*X = \pm\varphi'f_*\varphi X.$$

Atunci $f_*X \in \Gamma(D')$. Aceasta înseamnă $\varphi' f_*X = \tilde{\varphi}' f_*X$, și atunci, folosind din nou (3.2.9) rezultă

$$(3.2.11) \quad f_*\varphi X = \pm \tilde{\varphi}' f_*X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$.

În continuare, din (3.2.10), avem $\tilde{\varphi}' f_*\xi = a \tilde{\varphi}' \xi_{2n-2l+1} = 0$, și se obține

$$(3.2.12) \quad \tilde{\varphi}' f_*\xi = f_*\varphi\xi = 0.$$

Astfel, din (3.2.11) și (3.2.12) rezultă $f_*\varphi = \pm \tilde{\varphi}' f_*$. Deci f este o aplicație armonică.

Propoziția 3.2.6 *Fie M și N ca în Propoziția 3.2.5 și fie $f : N \rightarrow M$ o aplicație netedă. Dacă*

$$(3.2.13) \quad \pm f_*\varphi' X = \varphi f_*X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D')$,

$$(3.2.14) \quad f_*\xi_{2i} = \mp \varphi f_*\xi_{2i-1},$$

$$(3.2.15) \quad f_*\xi_{2i-1} = \mp \varphi f_*\xi_{2i},$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, 2n - 2l$, și

$$(3.2.16) \quad f_*\xi_{2n-2l+1} = a\xi,$$

unde $a : N \rightarrow \mathbb{R}$, atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Din condițiile (3.2.13), (3.2.14), (3.2.15) și (3.2.16) se obține printr-un calcul direct $\varphi f_* = \pm f_*\tilde{\varphi}'$, și deoarece M și N sunt varietăți metrice de contact urmează că f este o aplicație armonică.

3.3 Aplicații armonice pe fibratul tangent al unei varietăți cosimplectice

În acest paragraf vom da un exemplu legat de Teorema 3.1.2.

Fie M o varietate diferențiabilă de dimensiune $2n+1$, și fie $\pi : TM \rightarrow M$ fibratul său tangent. Atunci TM poate fi organizat ca o varietate $(4n+2)$ -dimensională după cum urmează. O hartă locală $(U; x^i)$, $i = 1, \dots, 2n+1$, în M induce o hartă locală $(\pi^{-1}(U); x^i, y^j)$, $i, j = 1, \dots, 2n+1$, pe TM , unde am notat $x^i \circ \pi$ cu x^i și y^j sunt coordonatele vectorilor pe $\pi^{-1}(U)$ în baza naturală $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i=1}^{2n+1}$.

Dacă ω este o 1-formă diferențială pe M atunci aceasta poate fi privită ca o funcție pe TM , pe care o vom nota cu $\iota\omega$.

Dacă f este o funcție pe M , definim liftul vertical f^V al lui f prin $f^V = f \circ \pi$, și liftul complet f^C al lui f prin $f^C = \iota(df)$. Avem $f^C = y^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = y^i \partial_i f = \partial f$ în raport cu coordonatele induse pe TM , unde ∂_i notează $\frac{\partial}{\partial x^i}$ și ∂ notează $y^i \partial_i$. Liftul vertical $(df)^V$ al 1-formei df este definit prin $(df)^V = d(f)^V$. Pentru două funcții f și g pe M avem $(gdf)^V = g^V (df)^V = g^V (df^V)$.

Fie $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ un câmp vectorial pe M . Definim liftul vertical X^V al lui X prin $X^V(\iota\omega) = (\omega(X))^V$, ω fiind o 1-formă arbitrară pe M , și liftul complet X^C al lui X prin $X^C f^C = (Xf)^C$, f fiind o funcție oarecare pe M . În raport cu coordonatele induse pe TM se obține

$$X^V = X^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \partial X^i \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Fie $\eta = \eta_i dx^i$ o 1-formă diferențială pe M . Definim liftul vertical η^V al η prin $\eta^V = (\eta_i)^V (dx_i)^V$, și liftul complet η^C al η prin $\eta^C(X^C) = (\omega(X))^C$, X fiind un câmp vectorial oarecare pe M . Atunci, în raport cu coordonatele induse pe TM , avem

$$\eta^V = \eta_i dx^i, \quad \eta^C = \partial \eta_i dx^i + \eta_i dy^i.$$

Lifturile vertical și complet ale unui câmp tensorial pe M pot fi definite, folosind condițiile

$$(P + Q)^V = P^V + Q^V, \quad (P \otimes Q)^V = P^V \otimes Q^V, \\ (P + Q)^C = P^C + Q^C, \quad (P \otimes Q)^C = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C,$$

unde P, Q sunt câmpuri tensoriale pe M .

Fie $\varphi = \varphi_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i$ un câmp tensorial de tip (1,1) pe M . Atunci se obține, pentru liftul complet φ^C al lui φ , următoarea expresie

$$\varphi^C = \varphi_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + \varphi_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^i + \partial \varphi_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i,$$

în raport cu coordonatele induse pe TM .

Fie $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ un câmp tensorial de tip (0,2) pe M . Pentru liftul său complet, g^C , se obține următoarea expresie

$$g^C = \partial g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g_{ij} dx^i \otimes dy^j + g_{ij} dy^i \otimes dx^j$$

în raport cu coordonatele induse pe TM .

Fie (M, φ, ξ, η) o varietate aproape de contact $(2n + 1)$ -dimensională și fie TM fibratul său tangent.

Se verifică ușor că

$$(\varphi^C)^2 = -I + \eta^C \otimes \xi^V + \eta^V \otimes \xi^C, \quad \eta^C \circ \varphi^C = 0, \quad \eta^V \circ \varphi^C = 0, \\ \varphi^C \xi^V = 0, \quad \varphi^C \xi^C = 0, \quad \eta^V(\xi^V) = 0, \quad \eta^C(\xi^C) = 0, \quad \eta^V(\xi^C) = 1, \quad \eta^C(\xi^V) = 1.$$

Astfel $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V)$ este o φ^C -varietate reperată de dimensiune $4n + 2$.

Dacă N_φ este tensorul Nijenhuis al lui φ și N_{φ^C} tensorul Nijenhuis al lui φ^C avem, $N_{\varphi^C} = (N_\varphi)^C$, (vezi [46]). Se obține

Propoziția 3.3.1 *Dacă varietatea aproape de contact (M, φ, ξ, η) este normală, atunci $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V)$ este o φ^C -varietate reperată normală.*

Demonstrație. Deoarece (M, φ, ξ, η) este normală avem $N_\varphi + d\eta \otimes \xi = 0$. Atunci, considerând liftul complet, se obține $(N_\varphi + d\eta \otimes \xi)^C = 0$. Astfel

$$N_{\varphi^C} + d\eta^C \otimes \xi^V + d\eta^V \otimes \xi^C = 0.$$

Fie $\tilde{\varphi} = \varphi^C + \eta^V \otimes \xi^V - \eta^C \otimes \xi^C$ structura aproape complexă indusă pe $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V)$. Atunci, din Propoziția 3.3.1 și Teorema 3.1.1 avem

Propoziția 3.3.2 *Dacă varietatea aproape de contact (M, φ, ξ, η) este normală, atunci $\tilde{\varphi}$ este o structură complexă pe TM .*

În continuare considerăm

$$G = g^C + (\eta^V - \eta^C) \otimes (\eta^V - \eta^C).$$

Se demonstrează cu ușurință că G este o metrică semi-riemanniană pe TM .

Printr-un calcul direct, se obține

$$G(\varphi^C X^C, \varphi^C Y^C) = G(X^C, Y^C) - \eta^V(X^C)\eta^V(Y^C) - \eta^C(X^C)\eta^C(Y^C),$$

$$G(\varphi^C X^V, \varphi^C Y^V) = G(X^V, Y^V) - \eta^V(X^V)\eta^V(Y^V) - \eta^C(X^V)\eta^C(Y^V),$$

$$G(\varphi^C X^C, \varphi^C Y^V) = G(X^C, Y^V) - \eta^V(X^C)\eta^V(Y^V) - \eta^C(X^C)\eta^C(Y^V),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$.

Urmează că $G(\varphi^C \tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \tilde{Y}) - \eta^V(\tilde{X})\eta^V(\tilde{Y}) - \eta^C(\tilde{X})\eta^C(\tilde{Y})$, pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(TM)$. Astfel G este o metrică asociată pe TM .

Notăm cu Ω 2-forma fundamentală a $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$, definită prin $\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y})$, pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(TM)$, și notăm cu $\tilde{\Omega}$, 2-forma fundamentală a varietății $(TM, G, \tilde{\varphi})$, definită prin $\tilde{\Omega}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \tilde{\varphi} \tilde{Y})$, pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(TM)$. Avem $\tilde{\Omega} = \Omega + \eta^C \wedge \eta^V$.

Pentru Ω , obținem

$$(3.3.1) \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \varphi_j^h \partial g_{ih} + g_{ih} \partial \varphi_j^h = \partial(\varphi_j^h g_{ih}),$$

$$(3.3.2) \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = \varphi_j^h g_{ih},$$

$$(3.3.3) \quad \Omega\left(\frac{\partial}{\partial y^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right) = 0,$$

în raport cu coordonatele induse pe TM , unde φ_j^h sunt componentele lui φ , și g_{ih} sunt componentele lui g .

Din (3.3.1), (3.3.2) și (3.3.3) obținem $\Omega = \omega^C$, unde ω^C este liftul complet al lui ω .

Astfel, dacă ω_{ij} sunt componentele lui ω , avem

$$(3.3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\Omega} = \Omega + \eta^C \wedge \eta^V = & \sum_{1 \leq i < j \leq 2n+1} (\partial\omega_{ij} + \eta_j \partial\eta_i - \eta_i \partial\eta_j) dx_i \wedge dx_j + \\ & + \sum_{1 \leq i, j \leq 2n+1} (\omega_{ij} - \eta_i \eta_j) dx_i \wedge dy_j. \end{aligned}$$

După un calcul direct

$$(3.3.5) \quad \begin{aligned} d\tilde{\Omega} = & \sum_{1 \leq i < j < k \leq 2n+1} [\partial(\partial_i \omega_{jk} - \partial_j \omega_{ik} + \partial_k \omega_{ij}) + \partial_i(\eta_k \partial\eta_j - \eta_j \partial\eta_k) - \\ & - \partial_j(\eta_k \partial\eta_i - \eta_i \partial\eta_k) + \partial_k(\eta_j \partial\eta_i - \eta_i \partial\eta_j)] dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} [\partial_k \omega_{ij} + \\ & + \partial_i(\omega_{jk} - \eta_k \eta_j) - \partial_j(\omega_{ik} - \eta_k \eta_i) + \eta_j \partial_k \eta_i - \eta_i \partial_k \eta_j] dx_i \wedge dx_j \wedge dy_k. \end{aligned}$$

Se obține

Propoziția 3.3.3 *Dacă $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este o varietate cosimplectică, atunci $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ este o φ^C -varietate normală $(4n+2)$ -dimensională cu 2-forma fundamentală Ω satisfăcând*

$$d\Omega + d(\eta^C \wedge \eta^V) = 0.$$

Observația 3.3.4 Din (3.3.5) se obține că $d\tilde{\Omega} = 0$ dacă și numai dacă $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este o varietate cosimplectică.

Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă între două varietăți cosimplectice $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ și $(N, \varphi', \xi', \eta', g')$. Notăm cu $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}'$ structurile aproape complexe induse pe TM și TN respectiv. Fie D și D' distribuțiile pe M și N , ortogonale pe ξ și pe ξ' , respectiv.

Notăm cu $F = f_* : TM \rightarrow TN$ aplicația tangentă indusă de f .

Atunci, din Observația 3.1.5 și din Propoziția 3.3.3, urmează că $F_* \tilde{\varphi} = \pm \tilde{\varphi}' F_*$. Astfel F este o aplicație armonică.

În continuare să presupunem că $F_* \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}' F_*$ sau $F_* \tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}' F_*$. Este suficient să considerăm cazul $F_* \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}' F_*$. Pentru un câmp vectorial $X \in \Gamma(D)$, avem $F_* \tilde{\varphi} X^V = \tilde{\varphi}' F_* X^V$.

Dar $F_* \tilde{\varphi} X^V = F_*(\varphi X)^V = (f_* \varphi X)^V$, (vezi [46]), și $\tilde{\varphi}' F_* X^V = \tilde{\varphi}' (f_* X)^V = \varphi'^C (f_* X)^V - \eta'^C ((f_* X)^V) \xi'^C$.

Atunci $(f_* \varphi X)^V = (\varphi' f_* X)^V - \eta'^C ((f_* X)^V) \xi'^C$. Aplicând η^V se obține $\eta^C ((f_* X)^V) = 0$. Rezultă $(f_* \varphi X)^V = (\varphi' f_* X)^V$, și atunci

$$(3.3.6) \quad f_* \varphi X = \varphi' f_* X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$.

În continuare, deoarece $F_* \tilde{\varphi} \xi^C = \tilde{\varphi}' F_* \xi^C$, $F_* \tilde{\varphi} \xi^C = F_* \xi^V = (f_* \xi)^V$ și

$$\tilde{\varphi}' F_* \xi^C = (\varphi' f_* \xi)^C + (\eta' (f_* \xi))^V \xi'^V - (\eta' (f_* \xi))^C \xi'^C$$

avem

$$(3.3.7) \quad (f_*\xi)^V = (\varphi' f_*\xi)^C + (\eta'(f_*\xi))^V \xi'^V - (\eta'(f_*\xi))^C \xi'^C.$$

Aplicând η'^V obținem $(\eta'(f_*\xi))^C = 0$, adică $\eta'(f_*\xi) = a$, unde $a \in \mathbb{R}$, este o constantă.

Să presupunem că $\varphi' f_*\xi$ nu se anulează. Atunci există $W \in \Gamma(D')$ astfel încât $f_*\xi = W + a\xi'$. Din (3.3.7) avem $W^V = \varphi'^C W^C$, și folosind exprimarea în coordonate locale obținem că W se anulează. Astfel

$$(3.3.8) \quad f_*\xi = a\xi',$$

unde $a \in \mathbb{R}$.

Invers, dacă presupunem că f verifică (3.3.6) și (3.3.8) se obține ușor $F_*\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'F_*$.

Observația 3.3.5 În cazul $F_*\tilde{\varphi} = -\tilde{\varphi}'F_*$ se obține

$$(3.3.9) \quad f_*\varphi X = -\varphi' f_*X,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$ și $f_*\xi = a\xi'$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Avem

Propoziția 3.3.6 Fie $f : M \rightarrow N$ și $F : TM \rightarrow TN$ ca mai sus. Dacă $f_*\varphi = \pm\varphi' f_*$ și $f_*\xi = a\xi'$, $a \in \mathbb{R}$, atunci F este o aplicație armonică. Mai mult, $F_*\tilde{\varphi} = \pm\tilde{\varphi}'F_*$ dacă și numai dacă $f_*\varphi = \pm\varphi' f_*$ și $f_*\xi = a\xi'$, $a \in \mathbb{R}$.

Propoziția 3.3.7 Fie $f : M \rightarrow N$ și $F : TM \rightarrow TN$ ca mai sus. Dacă $F_*\tilde{\varphi} = \pm\tilde{\varphi}'F_*$ atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Notăm cu ∇, ∇' conexiunile Levi-Civita pe M și N respectiv, și cu $\tilde{\nabla}$ conexiunea indusă de f pe fibratul $f^{-1}(TN)$. Atunci, deoarece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este o varietate cosimplectică, avem $\nabla\varphi = 0$. De aici, pentru orice $X \in \Gamma(D)$ obținem $(\nabla_X\varphi)\varphi X = (\nabla_{\varphi X}\varphi)X = 0$. Astfel

$$\nabla_X X + \nabla_{\varphi X}\varphi X = \varphi[\varphi X, X],$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$.

În mod analog, pe N avem $\nabla'_{X'}X' + \nabla'_{\varphi'X'}\varphi'X' = \varphi'[\varphi'X', X']$, pentru orice $X' \in \Gamma(D')$.

Fie α forma a doua fundamentală a lui f , definită prin

$$\alpha(X, Y) = \tilde{\nabla}_X f_*Y - f_*(\nabla_X Y),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$.

Atunci, dacă $\{e_1, \dots, e_n, \varphi e_1, \dots, \varphi e_n, \xi\}$ este o φ -bază ortonormată locală pe TM , unde $\dim M = 2n + 1$, avem $\alpha(e_j, e_j) + \alpha(\varphi e_j, \varphi e_j) = 0$, deoarece $f_*\varphi = \pm\varphi' f_*$.

Pe de altă parte, din $f_*\xi = a\xi'$, $a \in \mathbb{R}$, și $\nabla_\xi \xi = 0$, $\nabla_{\xi'} \xi' = 0$, avem $\alpha(\xi, \xi) = 0$.

Atunci

$$\tau(f) = \alpha(e_j, e_j) + \alpha(\varphi e_j, \varphi e_j) + \alpha(\xi, \xi) = 0,$$

unde $\tau(f)$ este câmpul de tensiune al lui f . Deci, f este o aplicație armonică.

Fie ∇^G conexiunea Levi-Civita pe $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ și fie ∇^C conexiunea Levi-Civita a lui g^C . Atunci, avem $\nabla^C \eta^V = (\nabla \eta)^V = 0$, $\nabla^C \eta^C = (\nabla \eta)^C = 0$, (vezi [46]), deoarece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este cosimplectică. Astfel, din definiția ∇^C se obține $\nabla^C G = 0$. De aici rezultă $\nabla^G = \nabla^C$.

Din $\nabla^C \varphi^C = (\nabla \varphi)^C$, (vezi [46]), și deoarece $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este cosimplectică avem $\nabla^C \varphi^C = 0$.

Folosind toate aceste rezultate, pentru o φ^C -bază, $\{e_1, \dots, e_{2n}, \varphi^C e_1, \dots, \varphi^C e_{2n}, \xi^V, \xi^C\}$, în TM , obținem

$$(3.3.10) \quad \nabla_{e_i}^G e_i + \nabla_{\varphi^C e_i}^G \varphi^C e_i = \varphi^C[\varphi^C e_i, e_i],$$

și

$$(3.3.11) \quad \nabla_{\xi^V}^G \xi^V = 0, \nabla_{\xi^C}^G \xi^C = 0,$$

deoarece $\nabla_{\xi^V}^C \xi^V = 0$ and $\nabla_{\xi^C}^C \xi^C = 0$, (vezi [46]).

Avem

Propoziția 3.3.8 Fie $\pi : TM \rightarrow M$ proiecția canonică. Atunci π este o aplicație armonică.

Demonstrație. Fie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție pe M . Atunci, pentru $X \in \chi(M)$ avem $(\pi_* X^C)f = X^C(f \circ \pi) = X^C f^V = (Xf)^V = Xf$, și $(\pi_* X^V)f = X^V f^V = 0$, (vezi [46]).

Obținem că $\pi_* X^C = X$, și $\pi_* X^V = 0$. Urmează că $\pi_* \varphi^C = \varphi \pi_*$, și $\pi_* \xi^V = 0$, $\pi_* \xi^C = \xi$.

Atunci, pentru o φ^C -bază, $\{e_1, \dots, e_{2n}, \varphi^C e_1, \dots, \varphi^C e_{2n}, \xi^V, \xi^C\}$, în TM , din 3.3.10 și 3.3.11, avem $\alpha(e_j, e_j) + \alpha(\varphi^C e_j, \varphi^C e_j) = 0$, și $\alpha(\xi^V, \xi^V) = 0$, $\alpha(\xi^C, \xi^C) = 0$, unde α este formă a doua fundamentală a lui π . Astfel $\tau(\pi) = 0$.

Observația 3.3.9 Din (3.3.10) și (3.3.11), se obține că orice aplicație netedă $f : TM \rightarrow M$, care satisface $f_* \varphi^C = \varphi f_*$, și $f_* \xi^V = a\xi$, $f_* \xi^C = b\xi$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, este o aplicație armonică.

Capitolul 4

Aplicații armonice și φ -pluriarmonice între \mathcal{C} -varietăți

Introducere

În acest capitol găsim rezultate legate de produsul a două φ -varietăți metrice reperate și de aplicațiile φ -olomorfe definite pe varietățile obținute în acest mod. Folosind aceste rezultate demonstrăm că orice aplicație φ -olomorfă între două \mathcal{C} -varietăți este armonică. Găsim, deasemeni, rezultate legate de φ -pluriarmonicitatea aplicațiilor între două φ -varietăți metrice reperate (mai ales în cazul \mathcal{C} -varietăților). În final dăm două propoziții în legătură cu φ -pluriarmonicitatea proiecției $\pi : TM \rightarrow M$, unde M este o \mathcal{C} -varietate. Cele prezentate aici se găsesc în lucrarea ”**Harmonic and φ -pluriharmonic maps between \mathcal{C} -manifolds**” ce va apare în *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*.

4.1 Produse de φ -varietăți reperate

Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i)$ două φ și, respectiv, φ' -varietăți reperate, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = \dim M' - \text{rang } \varphi' = l$.

Ca în cazul produsului a două varietăți aproape de contact, (vezi[5]), definim câmpul tensorial de tip (1,1), J , pe $M \times M'$ prin

$$J(X, X') = \left(\varphi X - \sum_{i=1}^l \eta'_i(X') \xi_i, \varphi' X' + \sum_{i=1}^l \eta_i(X) \xi'_i \right),$$

pentru $(X, X') \in \chi(M \times M')$.

Se verifică ușor că $J^2 = -I$. Deci $(M \times M', J)$ este o varietate aproape complexă.

Pe M și M' considerăm metricile riemanniene adaptate g și g' respectiv, și pe $M \times M'$ metrica G , definită după cum urmează. Pentru (X, X') , $(Y, Y') \in \chi(M \times M')$ avem

$$G((X, X'), (Y, Y')) = g(X, Y) + g'(X', Y').$$

Se obține

$$G(J(X, X'), J(Y, Y')) = G((X, X'), (Y, Y')),$$

adică G este o metrică aproape hermitiană pe $M \times M'$.

Propoziția 4.1.1 *Dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ sunt două φ și, respectiv, φ' -varietăți metrice reperate, iar J și G sunt definite ca mai sus, atunci $(M \times M', J, G)$ este o varietate complexă dacă și numai dacă M și M' sunt normale.*

Demonstrație. Fie N_J câmpul tensorial Nijenhuis al lui J . Condiția de integrabilitate pentru J este echivalentă cu următoarele trei condiții

$$(4.1.1) \quad \begin{cases} N_J((X, 0), (Y, 0)) = 0 \\ N_J((X, 0), (0, Y')) = 0 \\ N_J((0, X'), (0, Y')) = 0 \end{cases},$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$ și $X', Y' \in \chi(M')$. După un calcul direct se obțin

$$N_J((X, 0), (Y, 0)) = (S(X, Y), 0) + \sum_{i=1}^l [(L_{\varphi X} \eta_i)(Y) - (L_{\varphi Y} \eta_i)(X)](0, \xi'_i),$$

$$N_J((X, 0), (0, Y')) = \sum_{i=1}^l [\eta'_i(Y')((L_{\xi_i} \varphi)X, 0) + \eta_i(X)(0, (L_{\xi'_i} \varphi')Y')] +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^l [\eta'_i(Y')((L_{\xi_i} \eta_j)(X))(0, \xi'_j) - \eta_i(X)((L_{\xi'_i} \eta'_j)(Y'))(\xi_j, 0)],$$

$$N_J((0, X'), (0, Y')) = (0, S'(X', Y')) - \sum_{i=1}^l [(L_{\varphi' X'} \eta'_i)(Y') - (L_{\varphi' Y'} \eta'_i)(X')](\xi_i, 0),$$

unde S și S' sunt câmpurile tensoriale de tip (1,2) definite prin (2.1.5) din Capitolul 2, și L este derivata Lie.

Anularea lui S implică $L_{\xi_i} \varphi = 0$, $L_{\xi_i} \eta_j = 0$ și $(L_{\varphi Y} \eta_i)X = (L_{\varphi X} \eta_i)Y$, pentru orice $i, j = 1, \dots, l$, iar anularea lui S' implică relațiile similare în M' , (vezi [22]).

Atunci condițiile (4.1.1) sunt echivalente cu $S = 0$ și $S' = 0$, ceea ce înseamnă că M și M' sunt normale.

Propoziția 4.1.2 *Varietatea $(M \times M', J, G)$ este o varietate Kähler dacă și numai dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ sunt \mathcal{C} -varietăți.*

Demonstrație. Vom nota cu $\tilde{\Omega}$, 2-forma fundamentală a varietății $(M \times M', J, G)$, și cu Ω și, respectiv, Ω' , 2-formele fundamentale ale $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$. Se obține

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}((X, X'), (Y, Y')) &= G((X, X'), J(Y, Y')) = \Omega(X, Y) + \Omega'(X', Y') - \\ &\quad - \sum_{i=1}^l \eta'_i(X')\eta_i(Y) + \sum_{i=1}^l \eta_i(X)\eta'_i(Y'), \end{aligned}$$

pentru orice $(X, X'), (Y, Y') \in \chi(M \times M')$.

Printr-un calcul direct, obținem

$$\begin{aligned} (4.1.2) \quad 3d\tilde{\Omega}((X, X'), (Y, Y'), (Z, Z')) &= 3d\Omega(X, Y, Z) + 3d\Omega'(X', Y', Z') - \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^l \eta'_i(X')d\eta_i(Y, Z) - 2 \sum_{i=1}^l \eta'_i(Y')d\eta_i(Z, X) - 2 \sum_{i=1}^l \eta'_i(Z')d\eta_i(X, Y) + \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^l \eta_i(X)d\eta'_i(Y', Z') + 2 \sum_{i=1}^l \eta_i(Y)d\eta'_i(Z', X') + 2 \sum_{i=1}^l \eta_i(Z)d\eta'_i(X', Y'), \end{aligned}$$

pentru orice $(X, X'), (Y, Y'), (Z, Z') \in \chi(M \times M')$.

Dacă $d\tilde{\Omega} = 0$, luând $Z = 0, X' = Y' = 0, Z' = \xi'_i$ se obține, $d\eta_i = 0$, luând $X' = Y' = Z' = 0$ avem $d\Omega = 0$, adică $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o \mathcal{C} -varietate. În mod analog se arată că $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ este o \mathcal{C} -varietate.

Invers, dacă $d\eta_i = 0, d\eta'_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, l$, și $d\Omega' = 0, d\Omega = 0$, atunci din 4.1.2 se obține $d\tilde{\Omega} = 0$.

4.2 Aplicații armonice între produse de \mathcal{C} -varietăți

Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ două φ și respectiv φ' -varietăți reperate, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = \dim M' - \text{rang } \varphi' = l$, și fie $(N, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, h)$ și $(N', \tilde{\varphi}', \tilde{\xi}'_i, \tilde{\eta}'_i, h')$ două $\tilde{\varphi}$ și respectiv $\tilde{\varphi}'$ -varietăți reperate, cu $\dim N - \text{rang } \tilde{\varphi} = \dim N' - \text{rang } \tilde{\varphi}' = k$.

Fie $(M \times M', J, G)$ și $(N \times N', \tilde{J}, \tilde{G})$ varietățile aproape hermitiene obținute ca în paragraful precedent.

Fie $f : M \rightarrow N$ și $f' : M' \rightarrow N'$ două aplicații netede. Definim $F : M \times M' \rightarrow N \times N'$ prin $F(x, y) = (f(x), f'(y))$ pentru orice $x \in M, y \in N'$.

Propoziția 4.2.1 *Fie f, f' și F ca mai sus. Atunci*

$$(4.2.1) \quad F_*J = \tilde{J}F_*$$

dacă și numai dacă

$$(4.2.2) \quad f_*\varphi = \tilde{\varphi}f_*, \quad f'_*\varphi = \tilde{\varphi}f'_*$$

$$(4.2.3) \quad \tilde{\eta}_b(f_*\xi_a) = \tilde{\eta}'_b(f'_*\xi'_a),$$

pentru orice $a = 1, \dots, l$ și $b = 1, \dots, k$, unde J și \tilde{J} sunt structurile aproape complexe definite pe $M \times M'$ și respectiv $N \times N'$, iar $f_* : TM \rightarrow TM'$, $f'_* : TN \rightarrow TN'$, $F_* : T(M \times M') \rightarrow T(N \times N')$ sunt aplicațiile tangente.

Demonstrație. Ecuația (4.2.1) este echivalentă cu

$$F_*J(X, 0) = \tilde{J}F_*(X, 0), \quad F_*J(0, Y) = \tilde{J}F_*(0, Y),$$

pentru orice $X \in \chi(M)$ și $Y \in \chi(M')$. Să presupunem că $F_*J(X, 0) = \tilde{J}F_*(X, 0)$. Atunci avem

$$F_*(\varphi X, \sum_{i=1}^l \eta_i(X)\xi'_i) = \tilde{J}(f_*X, 0).$$

Aceasta înseamnă că

$$(f_*\varphi X, \sum_{i=1}^l \eta_i(X)f'_*\xi'_i) = (\tilde{\varphi}f_*X, \sum_{j=1}^k \tilde{\eta}_j(f_*X)\tilde{\xi}'_j).$$

De aici obținem

$$(4.2.4) \quad f_*\varphi X = \tilde{\varphi}f_*X$$

și

$$(4.2.5) \quad \sum_{i=1}^l \eta_i(X)f'_*\xi'_i = \sum_{j=1}^k \tilde{\eta}_j(f_*X)\tilde{\xi}'_j.$$

Luând $X = \xi_a$ în (4.2.5) obținem

$$(4.2.6) \quad f'_*\xi'_a = \sum_{j=1}^k \tilde{\eta}_j(f_*\xi_a)\tilde{\xi}'_j.$$

Din (4.2.4) se obține că, dacă $X \in \Gamma(D)$ atunci $f_*X \in \Gamma(\tilde{D})$, unde am notat cu D și \tilde{D} distribuțiile pe M și, respectiv, N ortogonale pe span $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$ și, respectiv, pe span $\{\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k\}$. Atunci se obține ușor că (4.2.5) este echivalentă cu (4.2.6).

În același fel obținem

$$(4.2.7) \quad f'_*\varphi'Y = \tilde{\varphi}'f'_*Y$$

și

$$(4.2.8) \quad f_*\xi_a = \sum_{j=1}^k \tilde{\eta}'_j(f'_*\xi'_a)\tilde{\xi}_j.$$

Utilizând (4.2.4), (4.2.6), (4.2.7) și (4.2.8) se obține că (4.2.6) și (4.2.8) sunt echivalente cu (4.2.3).

Invers, dacă au loc (4.2.2) și (4.2.3), atunci, printr-un calcul direct, obținem (4.2.1).

Din Propoziția 4.1.2 și Propoziția 4.2.1 avem

Teorema 4.2.2 *Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$, $(M', \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$, $(N, \tilde{\varphi}, \tilde{\xi}_i, \tilde{\eta}_i, h)$ și $(N', \tilde{\varphi}', \tilde{\xi}'_i, \tilde{\eta}'_i, h')$, patru \mathcal{C} -varietăți, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = \dim M' - \text{rang } \varphi' = l$ și $\dim N - \text{rang } \tilde{\varphi} = \dim N' - \text{rang } \tilde{\varphi}' = k$, și fie $f : M \rightarrow N$ și $f' : M' \rightarrow N'$ două aplicații netede.*

Dacă au loc (4.2.2) și (4.2.3), atunci aplicația $F : M \times M' \rightarrow N \times N'$ definită prin $F(x, y) = (f(x), f'(y))$ pentru orice $x \in M, y \in N$ este o aplicație armonică.

Într-adevăr, cu aceste ipoteze, obținem, din Propoziția 4.1.2, că $(M \times M', J, G)$ și $(N \times N', \tilde{J}, \tilde{G})$ sunt varietăți Kähler, astfel că dacă F este o aplicație olomorfă, atunci F armonică.

Se observă că în cazul în care cele patru varietăți sunt doar aproape \mathcal{C} -varietăți, adică nu sunt normale, atunci varietățile produs sunt aproape Kähler, și astfel, chiar în aceste condiții, ecuațiile (4.2.2) și (4.2.3) implică armonicitatea lui F .

În continuare, fie (M_1, g_1) , (M_2, g_2) două varietăți riemanniene, și fie $(M_1 \times M_1, G_1)$, $(M_2 \times M_2, G_2)$ varietățile produs, unde $G_i = g_i + g_i$, $i = 1, 2$.

Fie $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ o aplicație netedă. Considerăm aplicația $F_1 : M_1 \times M_1 \rightarrow M_2 \times M_2$, definită de $F_1(x, y) = (f_1(x), f_1(y))$, pentru orice $x, y \in M_1$.

Fie (M, g) și (N, h) două varietăți riemanniene, și fie $(M \times M, G)$ varietatea produs, unde $G = g + g$.

Pentru o aplicație $f_2 : M \rightarrow N$ definim $F_2 : M \times M \rightarrow N$ prin $F_2(x, y) = f_2(x)$, pentru orice $x, y \in M$. Se observă că $F_2 = f_2 \circ \pi_1$, unde π_1 este proiecția naturală a $M \times M$ pe primul factor.

Pentru o aplicație $f_3 : N \rightarrow M$ definim aplicația $F_3 : N \rightarrow M \times M$ prin $F_3(x) = (f_3(x), a)$, pentru un $a \in M$ arbitrar, fixat. Se observă că $F_3 = i_1 \circ f_3$, unde $i_1 : M \rightarrow M \times M$ este scufundarea naturală a lui M în $M \times M$ ca prim factor.

În [21] sunt demonstrate următoarele două rezultate

Propoziția 4.2.3 *Cu aplicațiile f_1, f_2, f_3 și F_1, F_2, F_3 ca mai sus, avem că f_i este o aplicație armonică dacă și numai dacă F_i este o aplicație armonică. Mai mult, dacă varietatea sursă este compactă, se obțin*

$$E(F_1) = 2\text{vol}(M_1)E(f_1), \quad E(F_2) = \text{vol}(M)E(f_2), \quad E(F_3) = E(f_3).$$

Propoziția 4.2.4 *Fie aplicațiile armonice f_1, f_2, f_3 pe o varietate compactă și fie F_1, F_2, F_3 aplicațiile corespunzătoare. Atunci f_i este o aplicație armonică stabilă dacă și numai dacă F_i este o aplicație armonică stabilă.*

Folosind aceste rezultate pentru φ_1 și respectiv φ_2 -varietățile metrice reperate, $(M_1, \varphi, \xi_i, \eta_i, g_1)$ și $(M_2, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g_2)$, cu $\dim M_1 - \text{rang } \varphi = l$, $\dim M_2 - \text{rang } \varphi' = k$, obținem

Propoziția 4.2.5 *Dacă f_1 și F_1 sunt ca mai sus, atunci F_1 este o aplicație olomorfă între două varietăți Kähler dacă și numai dacă f_1 este o aplicație (φ, φ') -olomorfă între \mathcal{C} -varietăți, adică $f_{1*}\varphi = \varphi'f_{1*}$.*

Demonstrație. Să presupunem că f_1 este o aplicație (φ, φ') -olomorfă. Din $f_{1*}\varphi = \varphi'f_{1*}$, $X \in \Gamma(D)$, se obține ușor $f_{1*}X \in \Gamma(D')$, unde D și D' sunt distribuțiile pe M_1 și, respectiv, M_2 ortogonale pe $\text{span } \{\xi_1, \dots, \xi_l\}$ și, respectiv, pe $\text{span } \{\xi'_1, \dots, \xi'_k\}$, și

$$f_{1*}\xi_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}\xi'_j,$$

pentru orice $i = 1, \dots, l$, unde a_{ij} sunt funcții pe M_1 . De aici obținem

$$\eta'_i(f_{1*}X) = \sum_{j=1}^l a_{ij}\eta_j(X),$$

pentru orice $X \in \chi(M_1)$ și pentru orice $i = 1, \dots, k$.

Dacă J și \tilde{J} sunt structurile Kähler induse pe varietățile produs $M_1 \times M_1$ și $M_2 \times M_2$, respectiv, avem

$$\begin{aligned} F_{1*}J(X, Y) &= F_{1*}\left(\varphi X - \sum_{i=1}^l \eta_i(Y)\xi_i, \varphi Y + \sum_{i=1}^l \eta_i(X)\xi_i\right) = \\ &= \left(f_{1*}\varphi X - \sum_{i=1}^l \eta_i(Y) \sum_{j=1}^k a_{ij}\xi'_j, f_{1*}\varphi Y + \sum_{i=1}^l \eta_i(X) \sum_{j=1}^k a_{ij}\xi'_j\right) = \\ &= \left(\varphi'f_{1*}X - \sum_{j=1}^k \eta'_j(f_{1*}Y)\xi'_j, \varphi'f_{1*}Y + \sum_{j=1}^k \eta'_j(f_{1*}X)\xi'_j\right) = \\ &= \tilde{J}(f_{1*}X, f_{1*}Y) = \tilde{J}F_{1*}(X, Y). \end{aligned}$$

Astfel F_{1*} este o aplicație olomorfă între două varietăți Kähler (deci o aplicație armonică).

Invers, presupunem că F_{1*} este o aplicație olomorfă. Avem

$$(4.2.9) \quad F_{1*}J(X, 0) = F_{1*}\left(\varphi X, \sum_{i=1}^l \eta_i(X)\xi_i\right) = \left(f_{1*}\varphi X, \sum_{i=1}^l \eta_i(X)f_{1*}\xi_i\right)$$

și

$$(4.2.10) \quad \tilde{J}F_{1*}(X, 0) = \tilde{J}(f_{1*}X, 0) = \left(\varphi'f_{1*}X, \sum_{j=1}^k \eta'_j(f_{1*}X)\xi'_j\right).$$

Astfel $f_{1*}\varphi = \varphi'f_{1*}$.

Propoziția 4.2.6 *Dacă $f : M \rightarrow N$ este o aplicație netedă între două \mathcal{C} -varietăți, $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g_1)$ și $(N, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g_2)$ astfel încât $f_*\varphi = \varphi'f_*$, atunci f este o aplicație armonică.*

Demonstrație. Considerăm aplicația $F : M \times M \rightarrow N \times N$, definită prin $F(x, y) = (f(x), f(y))$, pentru orice $x, y \in M$.

Dacă $f_*\varphi = \varphi'f_*$, se obține, folosind Propoziția 4.2.5, $F_*J = \tilde{J}F_*$, unde J și \tilde{J} sunt structurile Kähler induse pe varietățile produs $M \times M$ și $N \times N$. Atunci F este o aplicație armonică, și, din Propoziția 4.2.3, se obține că f este o aplicație armonică.

Folosind Teorema 4.2.2 avem

Propoziția 4.2.7 *Fie f, f' și F ca la începutul acestui paragraf. Dacă F este o aplicație olomorfă, atunci f și f' sunt aplicații armonice.*

Utilizând Propoziția 4.2.4 se obține

Propoziția 4.2.8 *Dacă M este o \mathcal{C} -varietate compactă, atunci aplicația identitate $I : M \rightarrow M$ este o aplicație armonică stabilă.*

În continuare, să presupunem că $f_2 : M \rightarrow N$ este o aplicație între \mathcal{C} -varietatea $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și varietatea Kähler (N, J, h) . Atunci aplicația $F_2 : M \times M \rightarrow N$, definită prin $F_2(x, y) = f_2(x)$, pentru orice $x, y \in M$, este o aplicație între două varietăți Kähler. În același mod ca pentru F_1 obținem că

Propoziția 4.2.9 *F_2 este o aplicație olomorfă (anti-olomorfă) dacă și numai dacă $f_{2*}\varphi = Jf_{2*}$ ($f_{2*}\varphi = -Jf_{2*}$).*

În final, fie $f_3 : N \rightarrow M$ o aplicație de la varietatea Kähler (N, J, h) la \mathcal{C} -varietatea $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$. Atunci aplicația $F_3 : N \rightarrow M \times M$, definită prin $F_3(x) = (f_3(x), a)$, pentru orice $x \in N$, este o aplicație între două varietăți Kähler, și avem

Propoziția 4.2.10 *F_3 este o aplicație olomorfă (anti-olomorfă) dacă și numai dacă $f_{3*}J = \varphi f_{3*}$ ($f_{3*}J = -\varphi f_{3*}$).*

4.3 Aplicații φ -pluriarmonice

Fie M o varietate Kähler cu structura complexă J și fie (N, h) o varietate riemanniană. O aplicație $f : M \rightarrow N$ se numește pluriarmonică dacă forma a doua fundamentală, α , a lui f satisface (vezi [32])

$$\alpha(X, Y) + \alpha(JX, JY) = 0, X, Y \in \chi(M),$$

Pentru φ -varietățile reperate vom considera un concept similar.

Definiția 4.3.1 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ o φ -varietate metrică reperată, de dimensiune m , cu rang $\varphi = r$, și (N, h) o varietate riemanniană. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Spunem că f este φ -pluriarmonică dacă

$$(4.3.1) \quad \alpha(X, Y) + \alpha(\varphi X, \varphi Y) = 0,$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$, unde α este forma a doua fundamentală a lui f . Dacă (4.3.1) are loc pentru $X, Y \in \Gamma(D)$, unde D este distribuția pe M , ortogonală pe $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_{m-r}\}$, atunci spunem că aplicația f este D pluriarmonică.

Propoziția 4.3.1 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ o φ -varietate metrică reperată și fie (N, h) o varietate riemanniană. Dacă $f : M \rightarrow N$ este o aplicație φ -pluriarmonică, atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Fie $\{e_1, \dots, e_k, \varphi e_1, \dots, \varphi e_k, \xi_1, \dots, \xi_{m-2k}\}$ o φ -bază locală ortonormată în M , unde $\dim M = m$ și rang $\varphi = 2k$. Deoarece f este φ -pluriarmonică avem

$$\alpha(\xi_i, \xi_i) = 0,$$

pentru orice $i = 1, 2, \dots, m - 2k$, și

$$\alpha(e_j, e_j) + \alpha(\varphi e_j, \varphi e_j) = 0,$$

pentru orice $j = 1, 2, \dots, k$.

Astfel $\tau(f) = 0$, deci f este o aplicație armonică.

Fie $T^C M$ complexificatul lui TM . Atunci φ poate fi prelungit în mod unic la un endomorfism liniar complex al $T^C M$, notat tot prin φ care satisface (2.1.2). Valorile proprii ale lui φ sunt $i, 0, -i$. Considerăm descompunerea uzuală

$$T^C M = T' M \oplus T^0 M \oplus T'' M$$

a $T^C M$ în fibratele proprii corespunzătoare valorilor proprii $i, 0, -i$ ale lui φ .

Propoziția 4.3.2 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă între o φ -varietate metrică reperată $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și o varietate riemanniană (N, h) . Atunci f este o aplicație φ -pluriarmonică dacă și numai dacă

1. $\alpha(Z, \bar{Z}) = 0$, pentru orice $Z \in \Gamma(T' M)$
2. $\alpha(X, \xi_i) = 0$, pentru orice $X \in \Gamma(D)$
3. $\alpha(\xi_i, \xi_j) = 0, i, j = 1, 2, \dots, m - 2k$

unde $\dim M = m$ și rang $\varphi = 2k$.

Demonstrație. Dacă $Z \in \Gamma(T' M)$ avem $Z = X - i\varphi X, \bar{Z} = X + i\varphi X$, unde $X \in \Gamma(D)$. Atunci $\alpha(Z, \bar{Z}) = \alpha(X, X) + \alpha(\varphi X, \varphi X) = 0$. Din φ -pluriarmonicitatea lui f obținem $\alpha(X, \xi_i) + \alpha(\varphi X, \varphi \xi_i) = 0$, $\alpha(\xi_i, \xi_j) + \alpha(\varphi \xi_i, \varphi \xi_j) = 0$, și astfel rezultă (2) și (3).

Invers, pentru $X = \xi_i, Y = \xi_j$ sau $X \in \Gamma(D), Y = \xi_i$, din condițiile (2) și (3), avem

$$\alpha(X, Y) + \alpha(\varphi X, \varphi Y) = 0.$$

Pentru $X, Y \in \Gamma(D)$ considerăm $Z_1 = X - i\varphi X, Z_2 = Y - i\varphi Y$ și $Z = Z_1 + Z_2$. Folosind (1) pentru Z avem

$$0 = \alpha(Z, \bar{Z}) = 2[\alpha(X, Y) + \alpha(\varphi X, \varphi Y)].$$

Astfel, din (1), (2) și (3) se obține că f este φ -pluriarmonică.

Propoziția 4.3.3 *Dacă $f : M \rightarrow N$ este o aplicație (φ, φ') -olomorfă între \mathcal{C} -varietățile $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = l$ și $(N, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, h)$, atunci f este o aplicație D -pluriarmonică.*

Demonstrație. Fie ∇, ∇' conexiunile Levi-Civita pe M și respectiv N și fie $\tilde{\nabla}$ conexiunea indusă de aplicația f pe fibratul $f^{-1}(TN)$. Atunci, deoarece cele două varietăți sunt \mathcal{C} -varietăți, avem $\nabla\varphi = 0$ și $\nabla'\varphi' = 0$.

Pentru două câmpuri vectoriale $X, Y \in \Gamma(D)$ se obține

$$0 = (\nabla_X \varphi)\varphi Y = -\nabla_X Y - \varphi \nabla_X \varphi Y, \quad 0 = (\nabla_{\varphi X} \varphi)Y = \nabla_{\varphi X} \varphi Y - \varphi \nabla_{\varphi X} Y.$$

Deci

$$\begin{aligned} \nabla_X Y + \nabla_{\varphi X} \varphi Y &= \varphi(\nabla_{\varphi X} Y - \nabla_X \varphi Y) = \\ &= \varphi(\nabla_{\varphi X} Y - \nabla_Y \varphi X + \nabla_Y \varphi X - \nabla_X \varphi Y) = \\ &= \varphi([\varphi X, Y] - \varphi[X, Y]) = \varphi[\varphi X, Y] - \varphi^2[X, Y]. \end{aligned}$$

Deoarece aceste rezultate au loc și pe N , avem

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) + \alpha(\varphi X, \varphi Y) &= \tilde{\nabla}_X f_* Y - f_*(\nabla_X Y) + \tilde{\nabla}_{\varphi X} f_* \varphi Y - f_*(\nabla_{\varphi X} \varphi Y) = \\ &= \varphi'[\varphi' f_* X, f_* Y] - \varphi'^2[f_* X, f_* Y] - f_* \varphi[\varphi X, Y] + f_* \varphi^2[X, Y] = 0, \end{aligned}$$

pentru orice $X, Y \in \Gamma(D)$, deoarece f este o aplicație (φ, φ') -olomorfă.

Teorema 4.3.4 *Fie $f : M \rightarrow N(c)$ o aplicație netedă de la \mathcal{C} -varietatea $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = l$, într-o formă spațială complexă cu curbura secțională olomorfă constantă $c \neq 0$. Presupunem că $\text{rang } f \geq 3$ într-un punct din M . Dacă f este φ -pluriarmonică, atunci $f_* \varphi = \pm J f_*$. Dacă M este compactă, atunci f este stabilă.*

Demonstrație. Mai întâi considerăm aplicația $F : M \times M \rightarrow N$ ca în Propoziția 4.2.9. Reamintim că $F = f \circ \pi_1$, unde $\pi_1 : M \times M \rightarrow M$ este proiecția pe primul factor. Cum π_1 este total geodezică, avem, pentru orice $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2) \in \chi(M \times M)$,

$$\alpha_F(X, Y) = \alpha_f(\pi_{1*} X, \pi_{1*} Y).$$

Deoarece f este φ -pluriarmonică, avem

$$\begin{aligned} \alpha_F(\tilde{J}X, \tilde{J}Y) &= \alpha_f(\pi_{1*}\tilde{J}X, \pi_{1*}\tilde{J}Y) = \\ &= \alpha_f\left(\varphi X_1 - \sum_{i=1}^l \eta_i(X_2)\xi_i, \varphi Y_1 - \sum_{j=1}^l \eta_j(Y_2)\xi_j\right) = \\ &= \alpha_f(\varphi X_1, \varphi Y_1) = \alpha_f(\varphi\pi_{1*}X, \varphi\pi_{1*}Y, \end{aligned}$$

unde \tilde{J} este structura complexă indusă pe $M \times M$.

Astfel

$$\alpha_F(X, Y) + \alpha_F(\tilde{J}X, \tilde{J}Y) = \alpha_f(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) + \alpha_f(\varphi\pi_{1*}X, \varphi\pi_{1*}Y) = 0.$$

Atunci F este o aplicație pluriarmonică de la o varietate Kähler într-o formă spațială complexă de curbura secțională olomorvă constantă, nenegativă, și $\text{rang } F = \text{rang } f$. Deci, dacă $\text{rang } f \geq 3$ într-un punct din M , se obține că F este o aplicație \pm olomorvă, (vezi [44]). Atunci, din Propoziția 4.2.9, avem că $f_*\varphi = \pm Jf_*$.

Teorema 4.3.5 *Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație φ -pluriarmonică stabilă de la o \mathcal{C} -varietate omogenă compactă, $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = l$, la o varietate Kähler cu curbura bisecțională pozitivă. Atunci $f_*\varphi = \pm Jf_*$.*

Demonstrație. Folosind aceeași aplicație $F : M \times M \rightarrow N$ ca în Teorema 4.3.4, se obține că F este o aplicație φ -pluriarmonică stabilă. Deoarece $M \times M$ este o varietate omogenă compactă avem că F este o aplicație \pm olomorvă, (vezi [33]). Atunci, din Propoziția 4.2.9, avem că $f_*\varphi = \pm Jf_*$.

Teorema 4.3.6 *Orice aplicație armonică de la o \mathcal{C} -varietate compactă la o varietate Kähler cu tensorul de curbura tare nepozitiv este φ -pluriarmonică.*

Demonstrație. Ca în teoremele precedente, folosim aplicația $F : M \times M \rightarrow N$. Concluzia reiese din rezultatul lui Siu în contextul varietăților Kähler, (vezi [33]), și din Propozițiile 4.2.4 și 4.2.9.

În continuare fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i)$ o φ -varietate reperată m -dimensională, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = l$, și fie TM fibratul său tangent.

Se verifică ușor

$$(\varphi^C)^2 = -I + \sum_{i=1}^l [\eta_i^C \otimes \xi_i^V + \eta_i^V \otimes \xi_i^C], \eta_i^C \circ \varphi^C = 0, \eta_i^V \circ \varphi^C = 0,$$

$$\varphi^C \xi_i^V = 0, \varphi^C \xi_i^C = 0, \eta_i^V(\xi_j^V) = 0, \eta_i^C(\xi_j^C) = 0, \eta_i^V(\xi_i^C) = 1, \eta_i^C(\xi_i^V) = 1,$$

pentru orice $i, j = 1, \dots, l$, unde am folosit lifturile verticale și complete ale câmpurilor vectoriale ξ_i , ale 1-formelor η_i și liftul complet al câmpului tensorial φ , care sunt definite ca în capitolul precedent.

Astfel $(TM, \varphi^C, \xi_i^V, \xi_i^C, \eta_i^C, \eta_i^V)$ este o φ^C -varietate reперată.

Dacă N_φ este tensorul Nijenhuis al lui φ și N_{φ^C} este tensorul Nijenhuis al lui φ^C avem $N_{\varphi^C} = (N_\varphi)^C$, (vezi [46]), și obținem cu ușurința că, dacă M este o φ -varietate normală, atunci $(TM, \varphi^C, \xi_i^V, \xi_i^C, \eta_i^C, \eta_i^V)$ este o φ^C -varietate normală.

Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ o \mathcal{C} -varietate. Considerăm

$$G = g^C + \sum_{i=1}^l [(\eta_i^V - \eta_i^C) \otimes (\eta_i^V - \eta_i^C)],$$

unde g^C este liftul complet al lui g , definit ca în capitolul precedent.

Se arată ușor că G este o metrică semi-riemanniană asociată pe TM .

Fie Ω și ω , 2-formele fundamentale pe M și respectiv TM . După un calcul direct obținem $\Omega = \omega^C$. Atunci, deoarece $d\omega = 0$ și $d\eta_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, l$, avem $d\Omega = 0$ și $d\eta_i^V = 0, d\eta_i^C = 0$. Aceasta înseamnă că $(TM, \varphi^C, \xi_i^V, \xi_i^C, \eta_i^C, \eta_i^V, G)$ este o \mathcal{C} -varietate. Dacă ∇ este conexiunea Levi-Civita a lui g , deoarece $\nabla\eta_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, l$, atunci se obține imediat că G are conexiunea Levi-Civita ∇^C , liftul complet al conexiunii ∇ .

Propoziția 4.3.7 *Dacă $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ este o \mathcal{C} -varietate, atunci proiecția $\pi : TM \rightarrow M$ este o aplicație φ^C -pluriarmonică.*

Demonstrație. Fie $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție netedă pe M . Atunci, pentru $X \in \chi(M)$ avem $(\pi_* X^C)f = X^C(f \circ \pi) = X^C f^V = (Xf)^V = Xf$, și $(\pi_* X^V)f = X^V f^V = 0$, (vezi [46]).

Înseamnă că $\pi_* X^C = X$, și $\pi_* X^V = 0$. Urmează că $\pi_* \varphi^C = \varphi \pi_*$, și $\pi_* \xi_i^V = 0, \pi_* \xi_i^C = \xi_i$, pentru orice $i = 1, \dots, l$.

Folosind Propoziția 4.3.3 se obține

$$\alpha_\pi(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \alpha_\pi(\varphi^C \tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y}) = 0,$$

pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \Gamma(\tilde{D})$, unde \tilde{D} este distribuția pe M ortogonală pe $span\{\xi_1^V, \dots, \xi_l^V, \xi_1^C, \dots, \xi_l^C\}$, și

$$\alpha_\pi(\xi_i^V, \xi_j^V) = 0, \alpha_\pi(\xi_i^V, \xi_j^C) = 0, \alpha_\pi(\xi_i^C, \xi_j^C) = 0,$$

pentru orice $i, j = 1, \dots, l$.

Pentru un câmp vectorial oarecare X pe M avem $\nabla_X \xi_i = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, l$. Printr-un calcul direct obținem $\nabla_{\tilde{X}}^C \xi_i^V = 0$ și $\nabla_{\tilde{X}}^C \xi_i^C = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, l$, și pentru orice $\tilde{X} \in \chi(TM)$.

Deci $\alpha_\pi(\tilde{X}, \xi_i^C) = 0$ și $\alpha_\pi(\tilde{X}, \xi_i^V) = 0$, pentru orice $\tilde{X} \in \chi(TM)$.

Din toate acestea avem

$$\alpha_\pi(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \alpha_\pi(\varphi^C \tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y}) = 0,$$

pentru orice $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \chi(TM)$.

Propoziția 4.3.8 Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă de la o \mathcal{C} -varietate, $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$, cu $\dim M - \text{rang } \varphi = l$ la o varietate riemanniană. Dacă f este o aplicație φ -pluriarmonică atunci $F = f \circ \pi : TM \rightarrow N$, unde $\pi : TM \rightarrow M$ este proiecția canonică, este o aplicație φ^C -pluriarmonică.

Demonstrație. Avem, (vezi [8]), formula

$$\begin{aligned} & \alpha_{f \circ \pi}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \alpha_{f \circ \pi}(\varphi^C \tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y}) = \\ & = df(\alpha_\pi(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \alpha_\pi(\varphi^C \tilde{X}, \varphi^C \tilde{Y})) + \alpha_f(f_* X, f_* Y) + \\ & \quad + \alpha_f(\varphi f_* X, \varphi f_* Y) = 0, \end{aligned}$$

deoarece f și π sunt aplicații φ și respectiv φ^C -pluriarmonice.

Capitolul 5

Aplicații armonice definite pe varietăți aproape de contact

Introducere

În acest capitol studiem armonicitatea unor aplicații definite între diverse tipuri de φ -varietăți metrice reperate. Astfel, ne ocupăm mai întâi de aplicații definite pe varietăți aproape de contact cu unele proprietăți și de cele între o varietate de contact și o φ -varietate metrică reperată. Dăm apoi câteva exemple folosind varietăți aproape de contact și fibratele lor tangente. În final obținem câteva rezultate legate de armonicitate în cazul varietăților complexe de contact și găsim un exemplu de aplicație armonică pe grupul Heisenberg complex. Toate acestea se găsesc în lucrarea **Harmonic maps between framed φ -manifolds**, apărută în *An. USAMV Iași*, Tom XLVI, Vol.2(2003), Proceedings of the Annual Symposium of Mathematics Applied in Biology and Biophysics, May 30-31, 2003, pp. 129-146.

5.1 Aplicații armonice definite pe varietăți aproape de contact

Propoziția 5.1.1 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact normală, cu $(d\eta)_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, și fie $(N, \varphi', \xi_i, \eta_i, g')$ o φ' -varietate metrică reperată normală astfel încât $\dim N - \text{rang } \varphi' = n$. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă care îndeplinește condiția $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$. Atunci $f_*\xi = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$, unde $a_i \in \mathbb{R}$, cu $i = 1, \dots, n$, sunt constante reale.*

Demonstrație. Este suficient să studiem cazul $f_*\varphi = \varphi'f_*$.

Deoarece $f_*\varphi\xi = \varphi'f_*\xi$, se obține că $f_*\xi = \sum_{i=1}^n a_i\xi_i$, unde $a_i : M \rightarrow \mathbb{R}$, oricare ar fi $i = 1, \dots, n$, sunt funcții definite pe M . Definim 1-formele, $f^*\eta_i$,

pe M , prin

$$f^*\eta_i(X) = \eta_i(f_*X),$$

pentru orice $X \in \chi(M)$.

Se obține cu ușurință

$$(5.1.1) \quad f^*\eta_i = a_i\eta,$$

unde $i = 1, \dots, n$. Diferențiind, avem

$$(5.1.2) \quad f^*d\eta_i = da_i \wedge \eta + a_id\eta,$$

pentru orice $i = 1, \dots, n$. Cum cele două varietăți sunt normale, obținem

$$d\eta(X, Y) = \eta([\varphi X, \varphi Y]),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$, și

$$d\eta_i(X', Y') = \eta_i([\varphi' X', \varphi' Y']), i = 1, \dots, n,$$

pentru orice $X', Y' \in \chi(N)$.

Deci, în (X, ξ) , unde $X \in \chi(M)$, ecuația (5.1.2) devine

$$da_i = L_\xi a_i \eta, i = 1, \dots, n,$$

unde cu L am notat derivata Lie. Se obține $da_i \wedge \eta = 0$, și atunci $da_i \wedge d\eta = 0$. Avem

$$L_\xi a_i \eta \wedge d\eta = 0.$$

În (X, Y, ξ) , cu $X, Y \in \chi(M)$, obținem

$$L_\xi a_i \wedge d\eta(X, Y) = 0.$$

Deoarece $(d\eta)_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, avem $L_\xi a_i = 0$, și mai departe $da_i = 0$. Înseamnă că a_i sunt constante, oricare ar fi $i = 1, \dots, n$.

Propoziția 5.1.2 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică de contact, și fie $(N, \varphi', \xi_i, \eta_i, g')$ o φ' -varietate metrică reperată normală cu $\dim N - \text{rang} \varphi' = n$. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă astfel încât $f_*\varphi = \pm \varphi' f_*$. Atunci $f_*\xi = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$, unde $a_i \in \mathbb{R}$, sunt constante reale, oricare ar fi $i = 1, \dots, n$.*

Demonstrație. Este suficient să studiem cazul $f_*\varphi = \varphi' f_*$.

Considerăm 1-formele pe M , $f^*\eta_i$, ca în demonstrația propoziției precedente și obținem, în același mod

$$(5.1.3) \quad f^*d\eta_i = da_i \wedge \eta + a_id\eta,$$

pentru orice $i = 1, \dots, n$. Deoarece $d\eta = \Omega$, unde Ω este 2-forma fundamentală pe M , avem $d\eta(X, \xi) = 0$, pentru orice $X \in \chi(M)$. Cum $d\eta_i(X', Y') = \eta_i([\varphi' X', \varphi' Y'])$, pentru orice $X', Y' \in \chi(N)$, se obține, calculând (5.1.3) în (X, ξ) , unde $X \in \chi(M)$,

$$da_i = L_\xi a_i \eta, i = 1, \dots, n.$$

Atunci $da_i \wedge \eta = 0$, și $da_i \wedge d\eta = 0$. Deci $L_{\xi}a_i \eta \wedge d\eta = 0$, și, deoarece $\eta \wedge d\eta \neq 0$, $L_{\xi}a_i = 0$. Avem $da_i = 0$, adică a_i sunt constante, pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Teorema 5.1.3 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact normală, $2m+1$ -dimensională, astfel încât $(d\eta)_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, și $d\Omega = 0$, unde Ω este 2-forma fundamentală pe M , și fie $(N, \varphi', \xi_i, \eta_i, g')$ o φ' -varietate metrică reperată, astfel încât $d\Omega' = 0$, unde Ω' este 2-forma fundamentală pe N și $\dim N - \text{rank } \varphi' = n$. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă cu proprietatea $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$. Atunci f este o aplicație armonică.*

Demonstrație. Este suficient să studiem cazul $f_*\varphi = \varphi'f_*$.

Notăm cu ∇ și, respectiv, ∇' conexiunile Levi-Civita pe M și N . Deoarece M este o varietate normală cu 2-forma fundamentală, Ω , satisfăcând $d\Omega = 0$, se obține

$$2g((\nabla_X\varphi)Y, Z) = d\eta(\varphi Y, X)\eta(Z) - d\eta(\varphi Z, X)\eta(Y),$$

pentru orice $X, Y, Z \in \chi(M)$. Dacă $X \in \Gamma(D)$, unde D este distribuția pe M , ortogonală pe $\text{span}\{\xi\}$, avem

$$(\nabla_X\varphi)\varphi X = 0, \quad (\nabla_{\varphi X}\varphi)X = 0.$$

Sumând aceste ecuații,

$$(5.1.4) \quad \nabla_X X + \nabla_{\varphi X}\varphi X = \varphi[\varphi X, X],$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$.

Cum N este normală și $d\Omega' = 0$, se obține,

$$(5.1.5) \quad (\nabla'_{X'}\varphi')\varphi'X' = 0, \quad (\nabla'_{\varphi'X'}\varphi')X' = 0,$$

pentru orice $X' \in \Gamma(D')$, D' fiind distribuția pe N ortogonală pe $\text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Din Propoziția 5.1.1 avem $\nabla'_{f_*\xi}f_*\xi = 0$.

Se arată ușor că $f_*X \in \Gamma(D')$, pentru orice $X \in \Gamma(D)$. Atunci, din ecuațiile de mai sus, pentru o φ -bază, $\{e_1, \dots, e_m, \varphi e_1, \dots, \varphi e_m, \xi\}$, pe M ,

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(\varphi e_i, \varphi e_i)] + \alpha(\xi, \xi) = 0,$$

unde α este forma a doua fundamentală a lui f . Astfel, f este o aplicație armonică.

Teorema 5.1.4 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică de contact, $2m+1$ -dimensională, și fie $(N, \varphi', \xi_i, \eta_i, g')$ o φ' -varietate metrică reperată, astfel încât $d\Omega' = 0$, unde Ω' este 2-forma fundamentală pe N și $\dim N - \text{rank } \varphi' = n$. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă cu proprietatea $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$. Atunci f este o aplicație armonică.*

Demonstrație. Și aici este suficient să studiem cazul $f_*\varphi = \varphi'f_*$.

Vom folosi aceleași notații ca în demonstrația anterioară.

Pentru o varietate metrică de contact avem formula lui Olszak

$$(\nabla_{\varphi X}\varphi)Y + (\nabla_X\varphi)Y = 2g(X, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX + \eta(X)\xi),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$, unde $h = \frac{1}{2}L_\xi\varphi$, și L notează derivata Lie. Atunci, pentru $X \in \Gamma(D)$, obținem

$$\nabla_X X + \nabla_{\varphi X}\varphi X = \varphi[\varphi X, X].$$

La fel ca în Teorema 5.1.3 se obține

$$(\nabla'_{X'}\varphi')\varphi'X' = 0, \quad (\nabla'_{\varphi'X'}\varphi')X' = 0.$$

pentru orice $X' \in \Gamma(D')$. Din Propoziția 4.1.2 avem $\nabla'_{f_*\xi}f_*\xi = 0$.

Prin urmare, pentru o φ -bază, $\{e_1, \dots, e_m, \varphi e_1, \dots, \varphi e_m, \xi\}$, în M , rezultă ușor că

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(\varphi e_i, \varphi e_i)] + \alpha(\xi, \xi) = 0.$$

5.2 Aplicații armonice între o varietate aproape de contact și fibratul său tangent

În această secțiune obținem exemple legate de Teorema 5.1.3 și de Teorema 5.1.4.

Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact de dimensiune $(2n+1)$, și fie TM fibratul său tangent. Pe TM considerăm aceeași structură de φ^C -varietate metrică reperată,

$$(\varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G),$$

ca în Capitolul 3, unde am folosit lifturile verticale și complete ale câmpului vectorial ξ , ale 1-formei η și lifturile complete ale câmpurilor tensoriale φ și g .

Din Teorema 5.1.3 și Teorema 5.1.4, se obține

Teorema 5.2.1 *Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact normală, $2m+1$ -dimensională, cu $(d\eta)_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, și $d\omega = 0$, unde ω este 2-forma fundamentală pe M , sau o varietate metrică de contact, și fie $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ fibratul său tangent dotat cu φ^C -structura considerată mai sus. Fie $f : M \rightarrow TM$ o aplicație netedă astfel încât $f_*\varphi = \pm\varphi^C f_*$. Atunci f este o aplicație armonică.*

La fel ca în demonstrația Teoremei 5.1.3, obținem

Lema 5.2.2 Fie $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(N, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ două φ și, respectiv φ' -varietăți reperate normale, cu $d\Omega = 0$ și $d\Omega' = 0$, unde Ω este 2-forma fundamentală pe M și Ω' este 2-forma fundamentală pe N . Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă astfel încât $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$. Atunci

$$\alpha(X, X) + \alpha(\varphi X, \varphi X) = 0,$$

pentru orice $X \in \Gamma(D)$.

Folosind Lema 5.2.2 obținem ușor,

Propoziția 5.2.3 Fie varietățile $(M, \varphi, \xi_i, \eta_i, g)$ și $(N, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, g')$ ca mai sus, și fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă, astfel încât $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$ și $f_*\xi_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\xi'_j$, unde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ sunt constante reale. Atunci f este o aplicație armonică.

Propoziția 5.2.4 Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact normală, cu 2-forma fundamentală, ω satisfăcând $d\omega = 0$, și fie $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ fibratul său tangent, dotat cu φ^C -structura metrică indusă. Fie $\pi : TM \rightarrow M$ proiecția canonică. Atunci π este o aplicație armonică.

Demonstrație. Deoarece pentru $X \in \chi(M)$ avem $(\pi_*X^C)f = X^C(f \circ \pi) = X^Cf^V = (Xf)^V = Xf$, și $(\pi_*X^V)f = X^Vf^V = 0$, (vezi[46]), se obține $\pi_*X^C = X$, și $\pi_*X^V = 0$. Urmează că $\pi_*\varphi^C = \varphi \pi_*$, și $\pi_*\xi^V = 0$, $\pi_*\xi^C = \xi$. Atunci, din Propoziția 5.2.3, rezultă că π este armonică.

Propoziția 5.2.5 Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ și $(N, \varphi', \xi', \eta', g')$ două varietăți metrică aproape de contact, și fie $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ și $(TN, \varphi'^C, \xi'^V, \xi'^C, \eta'^C, \eta'^V, G')$ fibratele lor tangente cu structurile induse. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă. Vom nota cu $F = f_* : TM \rightarrow TN$ aplicația tangentă indusă de f . Atunci $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$ dacă și numai dacă $F_*\varphi^C = \pm\varphi'^CF_*$. Mai mult, cu aceste ipoteze, $f_*\xi = a\xi'$ dacă și numai dacă $F_*\xi^V = a\xi'^V$ și $F_*\xi^C = a\xi'^C$, unde $a \in \mathbb{R}$ este o constantă.

Demonstrație. Vom studia cazul $f_*\varphi = \varphi'f_*$, $F_*\varphi^C = \varphi'^CF_*$.

Mai întâi presupunem că $F_*\varphi^C = \varphi'^CF_*$. Atunci $F_*\varphi^CX^V = \varphi'^CF_*X^V$, pentru orice $X \in \chi(M)$. De aici rezultă că $(f_*\varphi X)^V = (\varphi'f_*X)^V$, și deci $f_*\varphi X = \varphi'f_*X$, pentru orice $X \in \chi(M)$.

Reciproc, dacă $f_*\varphi X = \varphi'f_*X$, pentru orice $X \in \chi(M)$, atunci

$$F_*\varphi^CX^V = F_*(\varphi X)^V = (f_*\varphi X)^V = (\varphi'f_*X)^V = \varphi'^CF_*X^V,$$

$$F_*\varphi^CX^C = F_*(\varphi X)^C = (f_*\varphi X)^C = (\varphi'f_*X)^C = \varphi'^CF_*X^C.$$

Astfel am obținut $F_*\varphi^C = \varphi'^CF_*$.

Ultima parte a propoziției rezultă imediat prin calcul direct.

Din rezultatele anterioare și din Teoremele 5.1.3 și 5.1.4 se obține

Propoziția 5.2.6 Fie $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ o varietate metrică aproape de contact normală, cu $(d\eta)_x \neq 0$, pentru orice $x \in M$, și $d\omega = 0$, unde ω este 2-forma sa fundamentală, sau o varietate metrică de contact, și fie $(N, \varphi', \xi', \eta', g')$ o varietate metrică aproape de contact normală, cu 2-forma fundamentală, ω' , satisfăcând $d\omega' = 0$. Fie $(TM, \varphi^C, \xi^V, \xi^C, \eta^C, \eta^V, G)$ și $(TN, \varphi'^C, \xi'^V, \xi'^C, \eta'^C, \eta'^V, G')$ fibratoarele tangente cu structurile induse. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă și $F = f_* : TM \rightarrow TN$ aplicația tangentă indusă de f . Dacă $f_*\varphi = \pm\varphi'f_*$, atunci F este o aplicație armonică, și dacă $F_*\varphi^C = \pm\varphi'^CF_*$ atunci f este o aplicație armonică.

5.3 Aplicații armonice pe varietăți de contact complexe

Vom aminti mai întâi unele noțiuni legate de varietățile de contact complexe, așa cum sunt prezentate în [2].

O varietate de contact complexă este o varietate complexă de dimensiune complexă impară, $2n+1$, pentru care există o acoperire deschisă, $\{\mathcal{O}_\alpha\}$, cu domenii de hărți locale astfel încât:

1. Pe fiecare $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ există o 1-formă olomorvă, θ_α , astfel încât

$$\theta_\alpha \wedge (d\theta_\alpha)^n \neq 0;$$

2. Pe $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ există o funcție olomorvă nenulă $f_{\alpha\beta}$ astfel încât $\theta_\alpha = f_{\alpha\beta}\theta_\beta$.

O varietate de contact complexă pe care există o 1-formă complexă global definită se numește varietate de contact strict complexă.

Pe de altă parte, dacă M este o varietate complexă cu structura aproape complexă J , metrica hermitiană g , și acoperirea deschisă $\{\mathcal{O}_\alpha\}$, cu domenii de hărți locale, M se numește varietate metrică aproape de contact complexă dacă

1. Pe fiecare $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ există 1-formele u_α și $v_\alpha = u_\alpha \circ J$ cu câmpurile vectoriale duale U_α și $V_\alpha = -JU_\alpha$, și câmpurile tensoriale de tip $(1,1)$, G_α și $H_\alpha = G_\alpha J$ astfel încât

$$G_\alpha^2 = H_\alpha^2 = -I + u_\alpha \otimes U_\alpha + v_\alpha \otimes V_\alpha,$$

$$G_\alpha J = -JG_\alpha, \quad G_\alpha U_\alpha = 0, \quad g(X, G_\alpha Y) = -g(G_\alpha X, Y),$$

2. Pe $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$,

$$u_\beta = au_\alpha - bv_\alpha, \quad v_\beta = bu_\alpha + av_\alpha,$$

$$G_\beta = aG_\alpha - bH_\alpha, \quad v_\beta = bG_\alpha + aH_\alpha,$$

unde a și b sunt funcții astfel încât $a^2 + b^2 = 1$.

S-a demonstrat că o varietate de contact complexă admite o structură metrică aproape de contact complexă pentru care 1-forma locală de contact, θ , este $u - iv$, și câmpurile tensoriale locale G și H sunt legate de du și dv prin

$$du(X, Y) = g(X, GY) + (\sigma \wedge v)(X, Y), \quad dv(X, Y) = g(X, HY) - (\sigma \wedge u)(X, Y),$$

unde $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$. O varietate de contact complexă cu o structură metrică aproape de contact satisfăcând aceste condiții, varietate metrică de contact complexă. Dacă structura de contact complexă este strictă atunci $\sigma = 0$.

Fie S și T două câmpuri tensoriale definite prin

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= N_G(X, Y) + 2g(X, GY)U - 2g(X, HY)V + 2(v(Y)HX - v(X)HY) \\ &\quad + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \\ T(X, Y) &= N_H(X, Y) - 2g(X, GY)U + 2g(X, HY)V + 2(u(Y)GX - u(X)GY) \\ &\quad + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX, \end{aligned}$$

unde N_G și N_H sunt câmpurile tensoriale Nijenhuis ale G și, respectiv H .

O structură de contact complexă se numește normală dacă

$$S(X, Y) = T(X, Y) = 0, \quad X, Y \in \mathcal{H},$$

$$S(U, X) = T(V, X) = 0, \quad X \in \chi(M),$$

unde \mathcal{H} este subfibratul orizontal definit de subspațiile $\{X \in T_P \mathcal{O}_\alpha, P \in M; \theta_\alpha(X) = 0\}$.

O varietate metrică de contact strict complexă normală se numește varietate Sasaki complexă.

Pentru o astfel de varietate avem

$$(5.3.1) \quad g((\nabla_X G)Y, Z) = -2v(X)g(HGY, Z) - u(Y)g(X, Z) -$$

$$-v(Y)g(JX, Z) + u(Z)g(X, Y) + v(Z)g(JX, Y),$$

$$(5.3.2) \quad g((\nabla_X H)Y, Z) = -2u(X)g(HGY, Z) + u(Y)g(JX, Z) -$$

$$-v(Y)g(X, Z) + u(Z)g(X, JY) + v(Z)g(X, Y),$$

și

$$(5.3.3) \quad g((\nabla_X J)Y, Z) = -2u(X)g(HY, Z) + 2v(X)g(GY, Z)$$

Folosind aceste rezultate obținem următoarea

Teorema 5.3.1 Fie $(M, J, G, H, u, v, U, V, g)$ și $(N, J', G', H', u', v', U', V', h)$ două varietăți Sasakiene complexe și fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă astfel încât $f_*J = \pm J'f_*$ și $f_*G = \pm G'f_*$. Atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Este suficient să considerăm cazul $f_*J = J'f_*$ și $f_*G = G'f_*$.

Fie $\{e_i, Je_i, Ge_i, JGe_i, U, V\}$ o bază ortonormată reală în TM adaptată structurii complexe de pe M , unde $i = 1, \dots, m$, și $\dim_{\mathbb{R}} M = 4m + 2$, și fie \mathcal{H} subfibratul orizontal al TM . Notăm cu ∇ și ∇' conexiunile Levi-Civita pe M și pe N , respectiv. Avem $\nabla_U U = \nabla_V V = 0$.

Pentru $X \in \mathcal{H}$ avem, $g((\nabla_X J)JX, Z) = 0$, pentru orice $Z \in \chi(M)$. Atunci $(\nabla_X J)JX = 0$ și $(\nabla_{JX} J)X = 0$. Se obține

$$\nabla_X X + \nabla_{JX} JX = J[JX, X].$$

Relații similare au loc în N .

Cum $f_*G = G'f_*$ se obține ușor că, dacă $X \in \mathcal{H}$ atunci $f_*X \in \mathcal{H}'$, unde \mathcal{H}' este subfibratul orizontal al TN . Deoarece $f_*J = J'f_*$ avem

$$\sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(Je_i, Je_i) + \alpha(Ge_i, Ge_i) + \alpha(JGe_i, JGe_i)] = 0.$$

Pe N avem $(\nabla'_{f_*U} J')J'f_*U = 0$ și $(\nabla'_{f_*V} J')J'f_*V = 0$. Înseamnă că $\nabla'_{f_*U} f_*U = -J'\nabla'_{f_*U} J'f_*U$ și $\nabla'_{f_*V} f_*V = -J'\nabla'_{f_*V} J'f_*V$. Din a doua ecuație, ținând cont că $V = -JU$, și $f_*J = J'f_*$, se obține $\nabla'_{f_*V} f_*V = J'\nabla'_{J'f_*U} f_*U$ și atunci

$$\nabla'_{f_*U} f_*U + \nabla'_{f_*V} f_*V = J'[J'f_*U, f_*U] = J'f_*[U, V] = 0,$$

deoarece $\nabla_U V = -J\nabla_U U = 0$ și $\nabla_V U = J\nabla_V V = 0$.

Astfel

$$\begin{aligned} \tau(f) &= \sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(Je_i, Je_i) + \alpha(Ge_i, Ge_i) + \alpha(JGe_i, JGe_i)] + \\ &\quad + \alpha(U, U) + \alpha(V, V) = 0. \end{aligned}$$

Deci f este o aplicație armonică.

Observația 5.3.2 Dacă $f_*J = \pm J'f_*$ și $f_*G = \pm G'f_*$ atunci $f_*H = \pm H'f_*$.

În final vom prezenta un exemplu pentru această teoremă.

Fie $H_{\mathbb{C}}$ grupul Heisenberg complex, adică subgrupul închis al $GL(3, \mathbb{C})$, cu elementele de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & z_2 & z_3 \\ 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unde $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Evident $H_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^3$.

Dacă notăm prin L_B translația la stânga prin B , $L_B^* dz_1 = dz_1$, $L_B^* dz_2 = dz_2$, $L_B^*(dz_3 - z_2 dz_1) = dz_3 - z_2 dz_1$. Câmpurile vectoriale $\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_3}$, $\frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial z_3}$ sunt duale 1-formelor dz_1 , dz_2 , $dz_3 - z_2 dz_1$ și sunt stâng invariante. Mai mult, în raport cu coordonatele $(z_1, z_2, z_3, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ metrica hermitiană (vezi[25])

$$g = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 + |z_2|^2 & 0 & -z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{z}_2 & 0 & 1 \\ 1 + |z_2|^2 & 0 & -\bar{z}_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -z_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este stâng invariantă pe $H_{\mathbb{C}}$, dar nu este metrică Kähler. 1-forma $\theta = \frac{1}{2}(dz_3 - z_2 dz_1)$ definește o structură de contact complexă pe $H_{\mathbb{C}}$. Deci tensorii de structură pot fi definiți global. Fie J structura aproape complexă standard pe \mathbb{C}^3 , definită prin $J \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}$ și $J \frac{\partial}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}$. Deoarece θ este olomorfă, fie $\theta = u - iv$, $v = u \circ J$. Deasemeni considerăm $4 \frac{\partial}{\partial z_3} = U + iV$; atunci $u(X) = g(U, X)$ și $v(X) = g(V, X)$. În coordonate locale complexe, G și H sunt date de (vezi[25])

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{z}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -iz^2 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iz^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se obține că $H_{\mathbb{C}}$ dotat cu această structură este o varietate Sasaki complexă.

Fie $f : H_{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\mathbb{C}}$, astfel încât f este definită prin

$$w^k = w^k(z^1, z^2, z^3, \bar{z}^1, \bar{z}^2, \bar{z}^3), \quad \bar{w}^k = w^k(z^1, z^2, z^3, \bar{z}^1, \bar{z}^2, \bar{z}^3), \quad k = 1, 2, 3,$$

în coordonate locale complexe.

Printr-un calcul direct obținem că $f_* J = J' f_*$ și $f_* G = G' f_*$ dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} w^1 &= \alpha(z^2) + cz^1 + a^1, \\ w^2 &= \beta(z^1) + \bar{c}z^2 + a^2, \\ w^3 &= \gamma(z^2) + cz^3 + a^3, \end{aligned}$$

astfel încât

$$\frac{\partial \beta}{\partial z^1} = -\frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{z}^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial z^2} = z^2 \frac{\partial \alpha}{\partial z^2}$$

unde a^1, a^2, a^3, c sunt constante complexe, iar α, β, γ sunt aplicații olomorfe definite pe mulțimea \mathbb{C} cu valori în aceeași mulțime. Din aceste condiții se obțin următoarele componente pentru f

$$w^1 = kz^2 + cz^1 + a^1, \quad w^2 = -\bar{k}z^1 + \bar{c}z^2 + a^2, \quad w^3 = \frac{1}{2}k(z^2)^2 + cz^3 + a^3,$$

unde a^1, a^2, a^3, c, k sunt constante complexe.

Din Teorema 5.3.1 rezultă că o astfel de aplicație este armonică.

Capitolul 6

Varietăți hiper-reperate și armonicitate

Introducere

În acest capitol definim noțiunea de varietate hiper-reperată și prezentăm rezultate legate de existența metricilor asociate pe astfel de varietăți și de normalitatea lor. Studiem în special hiper \mathcal{C} -varietățile. În final găsim o condiție ca o aplicație între două varietăți hiper-reperate să fie armonică și dăm două exemple de structuri hiper-reperate pe fibratul tangent al unei varietăți dotate cu o 3-structură aproape de contact. Rezultatele se găsesc în lucrările ”**Harmonic maps between framed φ -manifolds**” și ”**Some properties of the hyper-framed manifolds**” apărută în *Analele USAMV Iași*, Tom XLVII, Vol.2(2004), Proceedings of the Annual Symposium of Mathematics Applied in Biology and Biophysics, May 28-29, 2004, 151-163.

6.1 Varietăți hiper-reperate. Generalități

Dacă pe o varietate $2n+1$ -dimensională, M , sunt definite trei structuri aproape de contact, $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i)$, $i = 1, 2, 3$, satisfăcând următoarele condiții pentru orice permutare pară (i, j, k) a $(1, 2, 3)$,

$$\varphi_k = \varphi_i \varphi_j - \eta_j \otimes \xi_i = -\varphi_j \varphi_i + \eta_i \otimes \xi_j,$$

$$\xi_k = \varphi_i \xi_j = -\varphi_j \xi_i, \quad \eta_k = \eta_i \circ \varphi_j = -\eta_j \circ \varphi_i,$$

atunci spunem că varietatea are o 3-structură aproape de contact. S-a demonstrat că există o metrică (semi)-riemanniană, g , asociată tuturor celor trei structuri. Spunem că $(\varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$, este o 3-structură metrică aproape de contact, (vezi[28], [43]).

Fie M o varietate diferențiabilă. Dacă M admite trei φ_i -structuri reperate, $(\varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$, astfel încât $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, satisfăcând următoarele condiții, pentru orice permutare pară (i, j, k) a $(1, 2, 3)$,

$$\varphi_k = \varphi_i \varphi_j - \sum_{a=1}^n \eta_a^j \otimes \xi_a^i = -\varphi_j \varphi_i + \sum_{a=1}^n \eta_a^i \otimes \xi_a^j,$$

$$\xi_a^k = \varphi_i \xi_a^j = -\varphi_j \xi_a^i, \quad \eta_a^k = \eta_a^i \circ \varphi_j = -\eta_a^j \circ \varphi_i,$$

atunci numim o astfel de varietate, varietate hiper-reperată.

Observația 6.1.1 Evident, o varietate 3-aproape de contact este o varietate hiper-reperată.

Observația 6.1.2 Distribuțiile D_i pe M , ortogonale pe $\text{span}\{\xi_a^i\}_{a=1}^n$, respectiv, pentru $i = 1, 2, 3$, nu coincid. De exemplu $\xi_b^1 \notin \text{span}\{\xi_a^2\}_{a=1}^n$, pentru orice $b = 1, \dots, n$.

Printr-un calcul direct obținem

Propoziția 6.1.3 Dacă pe varietatea diferențiabilă M sunt definite două φ_1 și φ_2 -structuri reperate, astfel încât $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, pentru $i = 1, 2$, satisfăcând

$$\varphi_1 \varphi_2 - \sum_{a=1}^n \eta_a^2 \otimes \xi_a^1 = -\varphi_2 \varphi_1 + \sum_{a=1}^n \eta_a^1 \otimes \xi_a^2,$$

$$\varphi_1 \xi_a^2 = -\varphi_2 \xi_a^1, \quad \eta_a^1 \circ \varphi_2 = -\eta_a^2 \circ \varphi_1, \quad \eta_a^1(\xi_b^2) = \eta_a^2(\xi_b^1) = 0,$$

pentru orice $a, b = 1, \dots, n$, atunci există o a treia φ_3 -structură reperată pe M , definită prin

$$\varphi_3 = \varphi_1 \varphi_2 - \sum_{a=1}^n \eta_a^2 \otimes \xi_a^1, \quad \xi_a^3 = \varphi_1 \xi_a^2, \quad \eta_a^3 = \eta_a^1 \circ \varphi_2,$$

pentru orice $a = 1, \dots, n$, astfel încât M dotată cu cele trei structuri devine o varietate hiper-reperată.

Observația 6.1.4 Pentru o varietate hiper-reperată, M , se pot defini trei structuri aproape complexe, J_1, J_2, J_3 , pe $M \times \mathbb{R}^n$, ca în Capitolul 2. Se verifică ușor că $J_k = J_i J_j = -J_j J_i$. Astfel $M \times \mathbb{R}^n$ capătă o structură hiper-complexă și dimensiunea sa va fi multiplu de 4. În concluzie, dimensiunea unei varietăți hiper-reperate este de forma $4m + 3n$.

În același mod ca pentru 3-structurile aproape de contact, obținem

Propoziția 6.1.5 Pentru o varietate hiper-reperată nu se poate defini o φ_4 -structură reperată care să satisfacă condițiile de anti-comutativitate cu celelalte trei structuri.

Demonstrație. Să presupunem că există o φ_4 -structură satisfăcând condițiile de anti-commutativitate. Fie J_4 structura aproape complexă indusă pe $M \times \mathbb{R}^n$. Atunci se obține $J_4 J_i = -J_i J_4$, $i = 1, 2, 3$. Pe de altă parte

$$J_3 J_4 = J_1 J_2 J_4 = -J_1 J_4 J_2 = J_4 J_1 J_2 = J_4 J_3.$$

Deci $J_3 J_4 = J_4 J_3$, ceea ce constituie o contradicție.

Propoziția 6.1.6 Pentru o varietate hiper-reperată, $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$, există o metrică (semi-)riemanniană asociată tuturor celor trei φ_i -structuri reperate.

Demonstrație. Dacă $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, pentru $i = 1, 2, 3$, considerăm câmpul tensorial, φ , pe M , de tip (1,1), definit prin

$$\varphi = -\varphi_2 + \sum_{a=1}^n [\eta_a^3 \otimes \xi_a^1 - \eta_a^1 \otimes \xi_a^3].$$

Se obține ușor că $(\varphi, \xi_a^1, \xi_a^2, \xi_a^3, \eta_a^1, \eta_a^2, \eta_a^3)$ este o φ -structură reperată pe M . Astfel, există o metrică (semi-)riemanniană, g , asociată acestei structuri. Se verifică, prin calcul direct, că g este asociată celor trei structuri inițiale pe M .

Definiția 6.1.1 Dacă g este o metrică (semi-)riemanniană asociată celor trei φ_i -structuri, pe varietatea hiper-reperată, $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$, spunem că $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o varietate metrică hiper-reperată.

Definiția 6.1.2 Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$, $i = 1, 2, 3$, o varietate metrică hiper-reperată, astfel încât $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o \mathcal{C} -varietate, pentru toți $i = 1, 2, 3$. Atunci $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o hiper \mathcal{C} -varietate.

Propoziția 6.1.7 Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$, $i = 1, 2, 3$, o varietate metrică hiper-reperată. Dacă două din φ_i -structurile reperate sunt normale atunci și a treia este normală.

Demonstrație. Dacă φ_i -structurile reperate, $i = 1, 2$, sunt normale, atunci, prin definiție, la fel sunt și structurile aproape complexe, J_1, J_2 pe $M \times \mathbb{R}^n$, definite în Capitolul 2, unde $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, $i = 1, 2, 3$. Urmează că a treia structură aproape complexă, J_3 , pe $M \times \mathbb{R}^n$, este normală, și astfel φ_3 -structura reperată pe M este normală.

În [27] este demonstrat următorul rezultat

Lema 6.1.8 Fie M^{4m} o varietate diferențiabilă care admite trei structuri aproape complexe, J_i , $i = 1, 2, 3$, satisfăcând $J_k = J_i J_j = -J_j J_i$, și o metrică g asociată tuturor structurilor, și fie Ω_i , $i = 1, 2, 3$, 2-formele core-spunzătoare. Dacă $d\Omega_i = 2\omega \wedge \Omega_i$, $i = 1, 2, 3$, unde ω este o 1-formă, atunci fiecare structură J_i este integrabilă.

Folosind această lemă obținem

Propoziția 6.1.9 Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$, $i = 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, n$, o varietate metrică hiper-reperată, astfel încât $d\eta_a^i = 0$ și $d\omega_i = 0$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, n$, unde ω_i sunt 2-formele fundamentale corespunzătoare. Atunci $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o hiper \mathcal{C} -varietate.

Demonstrație. Fie J_i , $i = 1, 2, 3$, structurile aproape complexe induse pe $M \times \mathbb{R}^n$, definite prin

$$J_i \left(X, \sum_{a=1}^n f_a \frac{\partial}{\partial t^a} \right) = \left(\varphi X - \sum_{a=1}^n f_a \xi_a^i, \sum_{a=1}^n \eta_a^i(X) \frac{\partial}{\partial t^a} \right),$$

unde X este un câmp vectorial tangent la M , $\{t^1, \dots, t^n\}$ sunt coordonatele pe \mathbb{R}^n și $\{f_1, \dots, f_n\}$ sunt funcții pe $M \times \mathbb{R}^n$, și $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, $i = 1, 2, 3$. Mai considerăm pe $M \times \mathbb{R}^n$, metrica riemanniană, G , definită prin

$$G = g + \sum_{a=1}^n dt^a dt^a.$$

Urmează că $J_k = J_i J_j = -J_j J_i$ și, după un calcul direct,

$$\Omega_i = \omega_i + \sum_{a=1}^n (dt^a \wedge \eta_a^i),$$

unde Ω_i sunt 2-formele fundamentale pe varietatea aproape hipercomplexă $(M \times \mathbb{R}^n, J_i, G)$. Din ipoteză avem $d\Omega_i = 0$, pentru orice $i = 1, 2, 3$. Prin urmare J_i sunt integrabile oricare ar fi $i = 1, 2, 3$, și la fel sunt φ_i -structurile reperate pe M , adică $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$ este o hiper \mathcal{C} -varietate.

Propoziția 6.1.10 Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$, $i = 1, 2, 3$, $a = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, o varietate metrică hiper-reperată. Dacă există $a_0 \in \{1, \dots, n\}$ și $i_0 \in \{1, 2, 3\}$, astfel încât $d\eta_{a_0}^{i_0} \neq 0$ sau $d\omega_{i_0} \neq 0$, atunci nu există o 1-formă ω pe $M \times \mathbb{R}^n$ astfel încât $d\Omega_i = \omega \wedge \Omega_i$, $i = 1, 2, 3$, unde am folosit aceleași notații ca în demonstrația propoziției precedente.

Demonstrație. Presupunem că există $a_0 \in \{1, \dots, n\}$ și $i_0 \in \{1, 2, 3\}$, astfel încât $d\eta_{a_0}^{i_0} \neq 0$ și o 1-formă ω pe $M \times \mathbb{R}^n$ astfel încât $d\Omega_i = \omega \wedge \Omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Atunci, din Lema 6.1.8, urmează că φ_i -structurile reperate, $i = 1, 2, 3$, pe M , sunt normale. După un calcul în coordonate locale obținem că ω este o 1-formă pe M și

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} \omega \wedge \eta_a^i &= d\eta_a^i, \\ \omega \wedge \omega_i &= d\omega_i, \end{cases}$$

pentru orice $a = 1, \dots, n$ și $i = 1, 2, 3$. Deoarece φ_i -structurile reperate sunt normale, avem, în particular, că $d\eta_{a_0}^{i_0}(X, \xi_b^{i_0}) = 0$, pentru orice $b = 1, \dots, n$ și $X \in \chi(M)$. Urmează că $\omega(X) = 0$, pentru orice câmp vectorial tangent, X , pe M , care nu se găsește în $\text{span}\{\xi_{a_0}^{i_0}\}$. Prin urmare $\omega = \lambda \eta_{a_0}^{i_0}$, unde λ este o funcție pe M .

În continuare, dacă există $a_1 \neq a_0$ astfel încât $d\eta_{a_1}^{i_0} \neq 0$, urmează, la fel ca mai sus, că $\omega = \beta\eta_{a_1}^{i_0}$, unde β este o funcție pe M . Deci $\omega = 0$, ceea ce contrazice prima ecuație 6.1.1. Dacă $d\eta_b^{i_0} = 0$, pentru orice $b \neq a_0$, obținem, din 6.1.1, că $\omega \wedge \eta_b^{i_0} = 0$. În $(\xi_b^{i_0}, \xi_{a_0}^{i_0})$ avem $\omega(\xi_{a_0}^{i_0}) = 0$, și atunci $\omega = 0$, ceea ce, din nou, contrazice 6.1.1.

În final, să presupunem că $d\eta_a^i = 0$, pentru orice $a = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3$, și că există o 1-formă ω pe M astfel încât $d\Omega_i = \omega \wedge \Omega_i$, $i = 1, 2, 3$. Din (6.1.1) urmează că $\omega \wedge \eta_a^i = 0$, pentru orice $a = 1, \dots, n$, $i = 1, 2, 3$. Deci $\omega = 0$, și, din a doua ecuație (6.1.1) obținem că $d\omega_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Observația 6.1.11 Pentru a studia normalitatea varietăților hiper-reperate se poate folosi un rezultat de tip Kashiwada doar în cazul considerat în Propoziția 6.1.9.

Lema 6.1.12 Pentru o φ -varietate reperată $(M, \varphi, \xi_a, \eta_a, g)$, unde φ este paralel, avem

$$(6.1.2) \quad g(R(X, Y)Z, \varphi W) + g(R(X, Y)\varphi Z, W) = 0,$$

unde R este tensorul de curbura al conexiunii Levi-Civita, ∇ , pe M .

Demonstrație. Din identitățile Ricci obținem

$$\begin{aligned} (\nabla_X \nabla_Y \Omega - \nabla_Y \nabla_X \Omega - \nabla_{[X, Y]} \Omega)(Z, W) &= -g(R(X, Y)Z, \varphi W) - \\ &= -g(R(X, Y)\varphi Z, W), \end{aligned}$$

unde Ω este 2-forma fundamentală pe M .

Cum $\nabla g = 0$ și $\nabla \varphi = 0$ obținem $\nabla \Omega = 0$. În consecință rezultatul se obține din ecuația de mai sus.

Utilizând acest rezultat obținem

Propoziția 6.1.13 Tensorul Ricci al unei hiper \mathcal{C} -varietăți se anulează.

Demonstrație. Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i, g)$, $i = 1, 2, 3$, o hiper \mathcal{C} -varietate. Pentru o bază ortonormată $\{e_A\}$, în TM , se obține, din lema precedentă, sumând după A ,

$$\sum_A g(R(e_A, Y)Z, \varphi_i e_A) + \rho(Y, \varphi_i Z) = 0,$$

pentru orice φ_i -structura metrică reperată pe M , unde ρ este tensorul Ricci pe M . Folosim în continuare lema precedentă pentru prima \mathcal{C} -structură, și luăm $Z = e_A$ și $W = \varphi_2 e_A$. Avem

$$g(R(X, Y)e_A, \varphi_1 \varphi_2 e_A) + g(R(X, Y)\varphi_1 e_A, \varphi_2 e_A) = 0.$$

În primul termen înlocuim $\varphi_1 \varphi_2 e_A$ cu $\varphi_3 e_A + \sum_{a=1}^n \eta_a^2(e_A) \xi_a^1$. Pentru a suma după A , în al doilea termen presupunem că $\{\xi_a^1\}_{a=1}^n$ face parte din bază și înlocuim baza $\{e_A\}$ cu $\{\varphi_1 e_A, \xi_1^1, \dots, \xi_n^1\}$. Rezultatul sumării este

$$2 \sum_A g(R(e_A, Y)Z, \varphi_3 e_A) = 0.$$

Folosind primul rezultat, pentru a treia \mathcal{C} -structură, se obține că $\rho(X, \varphi_3 Y) = 0$, pentru orice $X, Y \in \chi(M)$.

Deoarece $\nabla \varphi_3 = 0$ și $d\eta_b^3 = 0$, pentru orice $b = 1, \dots, n$, avem $\nabla \xi_a^3 = 0$, pentru orice $a = 1, \dots, n$. Urmează că $\rho(X, \xi_a^3) = 0$, $X \in \chi(M)$, $a = 1, \dots, n$. Astfel $\rho(X, Y) = 0$, pentru orice $X, Y \in \chi(M)$.

6.2 Varietăți hiper-reperate și armonicitate

Propoziția 6.2.1 *Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$ și $(N, \psi_i, \zeta_b^i, \theta_b^i)$, $i = 1, 2, 3$, două varietăți hiper-reperate, astfel încât φ_i, ψ_i -structurile reperate pe M și, respectiv, pe N , sunt normale, pentru $i = 1, 2, 3$. Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă cu proprietatea $f_* \varphi_i = \pm \psi_i f_*$, pentru $i = 1, 2$. Atunci $f_* \xi_a^i = \sum_{r=1}^n c_{ar} \zeta_r^i$, pentru $i = 1, 2$ și $a = 1, \dots, m$, unde $c_{ar} \in \mathbb{R}$ sunt constante, $\dim M - \text{rank } \varphi_i = m$ și $\dim N - \text{rank } \psi^i = n$. Mai mult $f_* \varphi_3 = \pm \psi_3 f_*$.*

Demonstrație. Este suficient să studiem cazul $f_* \varphi_i = \psi_i f_*$, $i = 1, 2$.

Se obține

$$(6.2.1) \quad f_* \xi_a^1 = \sum_{r=1}^n c_{ar}^1 \zeta_r^1,$$

$$(6.2.2) \quad f_* \xi_a^2 = \sum_{r=1}^n c_{ar}^2 \zeta_r^2,$$

pentru orice $a = 1, \dots, m$, unde $c_{ar}^1, c_{ar}^2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții pe M .

Aplicând φ_2 în ecuația (6.2.1) și ψ_1 în ecuația (6.2.2), folosind $f_* \varphi_i = \psi_i f_*$ și proprietățile varietăților hiper-reperate, avem

$$(6.2.3) \quad f_* \xi_a^3 = \sum_{r=1}^n c_{ar}^1 \zeta_r^3,$$

$$(6.2.4) \quad f_* \xi_a^3 = \sum_{r=1}^n c_{ar}^2 \zeta_r^3,$$

pentru orice $a = 1, \dots, m$. De aici rezultă că $c_{ar}^1 = c_{ar}^2 = c_{ar}$, pentru orice $a = 1, \dots, m; r = 1, \dots, n$.

Definim 1-formele $f^* \theta_r^i$, $r = 1, \dots, n$, pe M , prin $f^* \theta_r^i(X) = \theta_r^i(f_* X)$, $i = 1, 2$, $X \in \chi(M)$. Se obține cu ușurință

$$(6.2.5) \quad f_* \theta_r^1 = \sum_{a=1}^m c_{ar} \eta_a^1,$$

$$(6.2.6) \quad f_* \theta_r^2 = \sum_{a=1}^m c_{ar} \eta_a^2,$$

pentru orice $r = 1, \dots, n$. Diferențiind, obținem

$$(6.2.7) \quad f_* d\theta_r^1 = \sum_{a=1}^m [dc_{ar} \wedge \eta_a^1 + c_{ar} d\eta_a^1],$$

$$(6.2.8) \quad f_* d\theta_r^2 = \sum_{a=1}^m [dc_{ar} \wedge \eta_a^2 + c_{ar} d\eta_a^2],$$

pentru orice $r = 1, \dots, n$.

Pentru $r = 1$ ecuația (6.2.7) devine

$$f_* d\theta_1^1 = \sum_{a=1}^m [dc_{a1} \wedge \eta_a^1 + c_{a1} d\eta_a^1].$$

În (X, ξ_1^1) , cu $X \in \chi(M)$, deoarece M și N sunt normale, avem

$$dc_{11} = \sum_{a=1}^m L_{\xi_1^1} c_{a1} \eta_a^1,$$

unde L notează derivata Lie. În ξ_b^2 se obține, din proprietățile varietăților hiper-reperate

$$L_{\xi_b^2} c_{11} = 0,$$

pentru orice $b = 1, \dots, m$.

În același fel se arată că $L_{\xi_b^2} c_{ar} = 0$, cu $a, b = 1, \dots, m$ și $r = 1, \dots, n$.

Pentru $r = 1$ ecuația (6.2.8) devine

$$f_* d\theta_1^2 = \sum_{a=1}^m [dc_{a1} \wedge \eta_a^2 + c_{a1} d\eta_a^2].$$

În (X, ξ_1^1) , $X \in \chi(M)$, deoarece M și N sunt normale, se obține

$$dc_{11} = \sum_{a=1}^m L_{\xi_1^2} c_{a1} \eta_a^2.$$

Folosind rezultatele de mai sus rezultă că $dc_{11} = 0$. Astfel c_{11} este o constantă. În același fel se arată că c_{ar} sunt constante pentru orice $a = 1, \dots, m$ și $r = 1, \dots, n$.

Ultima parte se obține ușor, prin calcul direct, folosind rezultatele anterioare.

Așa cum am văzut în paragraful anterior, pe o varietate hiper-reperată, $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$, astfel încât $\dim M - \text{rank } \varphi_i = n$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, putem considera câmpul tensorial, φ , de tip (1,1), definit prin

$$\varphi = -\varphi_2 + \sum_{a=1}^n [\eta_a^3 \otimes \xi_a^1 - \eta_a^1 \otimes \xi_a^3].$$

Atunci $(\varphi, \xi_a^1, \xi_a^2, \xi_a^3, \eta_a^1, \eta_a^2, \eta_a^3)$ este o φ -structură reperată pe M . Dacă această structură este normală avem $d\eta_a^i(X, Y) = \eta_a^i([\varphi X, \varphi Y])$, $i = 1, 2, 3$; $a = 1, \dots, n$. La fel ca în propoziția anterioară, obținem

Propoziția 6.2.2 *Fie $(M, \varphi_i, \xi_a^i, \eta_a^i)$ și $(N, \psi_i, \zeta_b^i, \theta_b^i)$, $i = 1, 2, 3$, două varietăți hiper-reperate, și fie $(\varphi, \xi_a^1, \xi_a^2, \xi_a^3, \eta_a^1, \eta_a^2, \eta_a^3)$, $(\psi, \zeta_a^1, \zeta_a^2, \zeta_a^3, \theta_a^1, \theta_a^2, \theta_a^3)$, φ și respectiv ψ -structurile reperate induse. Dacă aceste structuri sunt normale și $f : M \rightarrow N$ este o aplicație netedă astfel încât $f_*\varphi_i = \pm\psi_i f_*$, pentru $i = 1, 2$, atunci $f_*\xi_a^i = \sum_{r=1}^n c_{ar}\zeta_r^i$, $i = 1, 2$, $a = 1, \dots, m$, unde $c_{ar} \in \mathbb{R}$ sunt constante, $\dim M - \text{rank } \varphi_i = m$ și $\dim N - \text{rank } \psi_i = n$. Mai mult $f_*\varphi_3 = \pm\psi_3 f_*$, și $f_*\varphi = \pm\psi f_*$.*

Din Propoziția 6.2.1 și Propoziția 5.2.3 avem

Teorema 6.2.3 *Fie M și N două varietăți ca în Propoziția 6.2.1, și fie g^i și h^i , $i = 1, 2, 3$, două metrici (semi)-riemanniene pe M și, respectiv, pe N , asociate φ_i , respectiv, ψ_i -structurilor reperate pe cele două varietăți. Dacă 2-formele fundamentale corespunzătoare au proprietățile $d\omega^i = 0$ și $d\Omega^i = 0$, pentru un $i = 1, 2, 3$, și $f : M \rightarrow N$ este o aplicație netedă astfel încât $f_*\varphi_i = \pm\psi_i f_*$, pentru $i = 1, 2$ atunci f este armonică.*

Folosind Propoziția 6.2.2 se obține

Teorema 6.2.4 *Fie M și N două varietăți ca în Propoziția 6.2.2, și fie g și h două metrici (semi)-riemanniene asociate pe $(M, \varphi, \xi_a^1, \xi_a^2, \xi_a^3, \eta_a^1, \eta_a^2, \eta_a^3)$ și, respectiv, $(N, \psi, \zeta_a^1, \zeta_a^2, \zeta_a^3, \theta_a^1, \theta_a^2, \theta_a^3)$. Dacă $d\omega = 0$ și $d\Omega = 0$, unde ω și Ω sunt 2-formele corespunzătoare lui g și, respectiv, h . Fie $f : M \rightarrow N$ o aplicație netedă cu proprietatea $f_*\varphi_i = \pm\psi_i f_*$, $i = 1, 2$. Atunci f este o aplicație armonică.*

6.3 Fibratul tangent al unei varietăți 3-aproape de contact

Fie $(M, \varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$, o varietate 3-aproape de contact și fie TM fibratul său tangent. Pentru fiecare structură aproape de contact, φ_i , pe M considerăm φ_i^C -structura reperată indusă pe TM . Atunci se verifică ușor că $(TM, \varphi_i^C, \xi_i^C, \xi_i^V, \eta_i^V, \eta_i^C, G)$, este o varietate metrică hiper-reperată, (vezi Capitolul 3). Dacă $(M, \varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$ este o varietate cosimplectică, $i = 1, 2, 3$, rezultă că $d\eta_i^V = 0$, $d\eta_i^C = 0$ și $d\Omega_i = 0$, pentru orice $i = 1, 2, 3$. Aceasta înseamnă că, în acest caz, $(TM, \varphi_i^C, \xi_i^C, \xi_i^V, \eta_i^V, \eta_i^C, G)$, este o hiper \mathcal{C} -varietate.

În continuare considerăm φ -structura reperată pe M , $(\varphi, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3)$, obținută ca în precedentul paragraf. Atunci φ^C coincide cu câmpul tensorial din structura hiper-reperată pe TM , obținută cu ajutorul celor trei φ_i^C -structuri reperate pe fibratul tangent.

Deoarece g este o metrică asociată fiecărei structuri aproape de contact pe M , se verifică imediat că g este asociată și φ -structurii reperate pe M . Se verifică, deasemeni, ușor că G , definită prin

$$G = g^C + \sum_{i=1}^3 [(\eta_i^V - \eta_i^C) \otimes (\eta_i^V - \eta_i^C)],$$

este o metrică semi-riemanniană asociată φ^C -structurii pe TM . Dacă ω și Ω sunt 2-formele fundamentale corespunzătoare lui g și, respectiv, G , se obține $d\Omega = (d\omega)^C$. Atunci, dacă $d\omega = 0$ urmează că $d\Omega = 0$.

Observația 6.3.1 Printr-un calcul direct se obține $\omega = -\omega_2 + \eta_1 \wedge \eta_3$, și atunci $d\omega = 0$ dacă și numai dacă $d\omega_2 = d(\eta_1 \wedge \eta_3)$.

Deoarece $\pi_*\varphi_i^C = \varphi_i\pi_*$, pentru orice $i = 1, 2, 3$, unde $\pi : TM \rightarrow M$ este proiecția canonică, avem

Propoziția 6.3.2 Fie M și TM ca mai sus, și în plus presupunem că φ -structura reperată pe M este normală și $d\omega_2 = d(\eta_1 \wedge \eta_3)$. Atunci proiecția canonică $\pi : TM \rightarrow M$ este o aplicație armonică.

Un alt exemplu de varietate metrică hiper-reperată se obține folosind lifturile verticale și orizontale ale câmpurilor tensoriale de la varietatea diferențiabilă M la fibratul său tangent.

Pentru a introduce noțiunea de lift orizontal se definește, mai întâi, pentru un câmp tensorial oarecare, S , pe M , diferit de o funcție, dat, în coordonate locale, prin

$$S = S_{lk\dots j}^{i\dots h} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^l \otimes dx^k \otimes \dots \otimes dx^j,$$

câmpul tensorial, γS , în $\pi^{-1}(U)$, prin

$$\gamma S = (y^l S_{lk\dots j}^{i\dots h}) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^k \otimes \dots \otimes dx^j,$$

în raport cu coordonatele induse, (x^h, y^h) , U fiind un domeniu de hartă locală pe M . Dacă S este o funcție, se definește γS ca fiind zero.

În continuare, presupunem că avem conexiunea afină, ∇ , pe M . Liftul orizontal al unei funcții, f , de la M la TM , se definește prin $f^H = f^C - \gamma(\nabla f)$. Din definiția liftului complet al unei funcții rezultă că $f^H = 0$. Fie $X \in \chi(M)$ un câmp vectorial pe M . Liftul orizontal, X^H , al lui X se definește prin $X^H = X^C - \gamma(\nabla X)$. Dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, în coordonate locale, și ∇ are componentele Γ_{ji}^h , atunci

$$X^H = X^h \frac{\partial}{\partial x^h} - \Gamma_i^h X^i \frac{\partial}{\partial y^h},$$

în raport cu coordonatele induse pe TM , unde $\Gamma_i^h = y^j \Gamma_{ji}^h$.

Fie ω o 1-forma pe M . Liftul său orizontal, ω^H , este definit de $\omega^H = \omega^C - \gamma(\nabla\omega)$. Dacă ω are componentele locale ω_i , atunci

$$\omega^H = \Gamma_i^h \omega_h dx^i + \omega_i dy^i,$$

în raport cu coordonatele induse pe TM . Liftul orizontal al unui câmp tensorial pe M se definește folosind condițiile

$$(P + Q)^H = P^H + Q^H, \quad (P \otimes Q)^H = P^H \otimes Q^V + P^V \otimes Q^H,$$

unde P, Q sunt câmpuri tensoriale pe M , (vezi[46]).

Fie (M, φ, ξ, η) o varietate aproape de contact $(2n + 1)$ -dimensională și fie TM fibratul său tangent.

Se verifică ușor că

$$(\varphi^H)^2 = -I + \eta^H \otimes \xi^V + \eta^V \otimes \xi^H, \quad \eta^H \circ \varphi^H = 0, \quad \eta^V \circ \varphi^H = 0,$$

$$\varphi^H \xi^V = 0, \quad \varphi^H \xi^H = 0, \quad \eta^V(\xi^V) = 0, \quad \eta^H(\xi^H) = 0, \quad \eta^V(\xi^H) = 1, \quad \eta^H(\xi^V) = 1.$$

Astfel $(TM, \varphi^H, \xi^V, \xi^H, \eta^H, \eta^V)$ este o φ^H -varietate reperată, $(4n + 2)$ -dimensională.

Dacă g este o metrică riemanniană pe M , definim, ca în [35], o metrică riemanniană, G , pe TM , astfel încât,

$$G(X^H, Y^H) = G(X^V, Y^V) = g(X, Y), \quad G(X^H, Y^V) = 0,$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$. Se arată ușor că G este o metrică asociată pe $(TM, \varphi^H, \xi^V, \xi^H, \eta^H, \eta^V)$. Atunci se obține că, dacă $(M, \varphi_i, \xi_i, \eta_i, g)$, $i = 1, 2, 3$, este o varietate metrică 3-aproape de contact, atunci $(TM, \varphi_i^H, \xi_i^H, \xi_i^V, \eta_i^V, \eta_i^H, G)$, este o varietate hiper-reperată.

Observația 6.3.3 În acest caz, dacă toate cele trei structuri definite pe M sunt cosimplectice atunci TM dotat cu structura definită mai sus nu este în mod necesar o hiper \mathcal{C} -varietate, cum se întâmplă în exemplul precedent.

Capitolul 7

Morfisme φ -pseudo armonice

Introducere

În debutul acestui capitol găsim caracterizări pentru aplicațiile φ -pseudo orizontal slab conforme (φ -[PHWC]). Pentru o astfel de aplicație, $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$, între o varietate riemanniană și una aproape de contact, definim o ψ -structură metrică reperată pe M . Folosind această structură demonstrăm proprietăți ale aplicațiilor φ -[PHWC] și ale morfismelor φ -pseudo armonice. Aceste rezultate le extindem în cazul, mai general, când codomeniul este o φ -varietate reperată. În final obținem o ψ -structură reperată pe fibratul tangent al unei varietăți metrice aproape de contact și arătăm că proiecția canonică este un morfism armonic. Rezultatele din acest capitol se găsesc în lucrarea ” **φ -pseudo harmonic morphisms**”, apărută în *Analele Științifice ale Universității ”Al.I.Cuza” Iași*, L, s.I.a, Matematică, f.2, 2004, 327-346.

7.1 Aplicații φ -pseudo orizontal slab conforme

Mai întâi vom prezenta definițiile câtorva tipuri de φ -varietăți reperate.

Fie M o φ -varietate metrică reperată, cu tensorii de structură (φ, ξ_i, η_i) și metrica riemanniană asociată, g . Dacă Ω este 2-forma fundamentală corespunzătoare, atunci M se numește varietate (1,2)-simplectică ((1,2)- D -simplectică) dacă

$$d\Omega(X, \varphi X, Y) = 0, \quad X \in \Gamma(D), Y \in \chi(M)(Y \in \Gamma(D)),$$

și (1,2)-simplectică like ((1,2)- D -simplectică like) dacă

$$\sum_{k=1}^n d\Omega(e_k, \varphi e_k, Y) = 0, \quad Y \in \chi(M)(Y \in \Gamma(D)),$$

unde $\{e_1, \dots, e_n, \varphi e_1, \dots, \varphi e_n\}$ este o φ -bază ortonormată în $\Gamma(D)$, D fiind distribuția pe M , ortogonală pe $\text{span}\{\xi_i\}$.

În continuare, fie $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ o aplicație netedă între două varietăți riemanniene și fie $df : TM \rightarrow TN$ aplicația tangentă indusă¹. Adjuncta aplicației df_x , $x \in M$, este aplicația liniară $df_x^* : T_{f(x)}N \rightarrow T_xM$ definită de

$$g(X, df_x^*(Y)) = h(df_x(X), Y), \quad X \in T_xM, Y \in T_{f(x)}N.$$

Pentru orice punct $x \in M$, considerăm spațiul vertical al lui f , $\mathcal{V}_{fx} = \ker df_x$ și spațiul horizontal al lui f , $\mathcal{H}_{fx} = \{\ker df_x\}^\perp$. Deasemeni, considerăm $\mathcal{V}_{f^*x} = \ker df_x^*$ și $\mathcal{H}_{f^*x} = \{\ker df_x^*\}^\perp$. Atunci aplicațiile $df_x : \mathcal{H}_{fx} \rightarrow \mathcal{H}_{f^*x}$ și $df_x^* : \mathcal{H}_{f^*x} \rightarrow \mathcal{H}_{fx}$ sunt bijective.

Fie $(N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o φ -varietate metrică reperată și fie $T^C N$ complexificatul fibratului său tangent, TN . Atunci φ poate fi extins în mod unic la un endomorfism liniar pe $T^C N$, notat tot cu φ , care satisface aceleași proprietăți ca și câmpul tensorial inițial. Valorile proprii ale lui φ sunt $i, 0, -i$. Considerăm descompunerea uzuală

$$T^C N = T'N \oplus T^0N \oplus T''N$$

a $T^C N$ în subfibratele proprii corespunzătoare valorilor proprii $i, 0, -i$ ale lui φ .

Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o aplicație netedă între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reperată N . Putem defini aplicația $(df \circ df^*)_x : T_{f(x)}^C N \rightarrow T_{f(x)}^C N$, pentru orice $x \in M$.

Definiția 7.1.1 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o aplicație netedă între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reperată N . Atunci f se numește aplicație φ -pseudo orizontal slab conformă (φ -[PHWC]) dacă

$$(7.1.1) \quad [df \circ df^*, \varphi] = 0.$$

Observația 7.1.1 Orice aplicație orizontal slab conformă, $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reperată N , este o aplicație φ -[PHWC]. În particular, dacă f este un morfism armonic atunci f este o aplicație φ -[PHWC].

Avem

Lema 7.1.2 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o aplicație netedă între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reperată N . Atunci f este o aplicație φ -[PHWC] dacă și numai dacă $df \circ df^*$ duce fibratul tangent olo-morf, $T'N$, în el însuși, și T^0N în el însuși.

¹Deși în capitolele precedente am folosit notația f_* , pentru aplicația tangentă indusă, în acest capitol vom nota aplicația respectivă cu df , pentru că altfel unele formule și expresii s-ar complica nejustificat.

Demonstrație. Considerăm $X \in T'N \oplus T''N$. Atunci

$$\varphi(df \circ df^*)X = (df \circ df^*)\varphi X$$

dacă și numai dacă

$$\varphi(df \circ df^*)X = i(df \circ df^*)X,$$

pentru orice $X \in T'N$, deoarece $df \circ df^*$ este o aplicație liniară complexă.

Apoi, pentru orice ξ_i , avem $\varphi(df \circ df^*)\xi_i = 0$ dacă și numai dacă $(df \circ df^*)\xi_i \in T^0N$.

Lema 7.1.3 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o aplicație netedă între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reparată N . Pentru orice $x \in M$, considerăm $V'_x = df_x^*(T'_{f(x)}N)$ și $V_x^0 = df_x^*(T^0_{f(x)}N)$. Atunci f este o aplicație φ -[PHWC] dacă și numai dacă V'_x este izotrop și V'_x și V_x^0 sunt ortogonale în raport cu g .

Demonstrație. Pentru $X, Y \in T'_{f(x)}N$ se obține

$$g_x(df_x^*(X), df_x^*(Y)) = h_{f(x)}(X, (df \circ df^*)_x(Y)) = 0$$

dacă și numai dacă $df \circ df^*$ duce fibratul tangent olomorf $T'N$ în el însuși, sau $(df \circ df^*)_x(Y) \in T^0_{f(x)}N$. Dar pentru $Y \in T'_{f(x)}N$ avem

$$\begin{aligned} g_x(df_x^*(Y), df_x^*(\xi_{if(x)})) &= h_{f(x)}(Y, (df \circ df^*)_x(\xi_{if(x)})) = \\ &= h_{f(x)}((df \circ df^*)_x(Y), \xi_{if(x)}) = 0 \end{aligned}$$

dacă și numai dacă $(df \circ df^*)_x(\xi_{if(x)}) \in T^0_{f(x)}N \cup T'_{f(x)}N$ și $(df \circ df^*)_x(Y) \notin T^0_{f(x)}N$. Dacă $(df \circ df^*)_x(\xi_{if(x)}) \in T'_{f(x)}N$ se obține

$$g_x((df^*)_x(\xi_{if(x)}), (df^*)_x(\xi_{if(x)})) = h_{f(x)}(\xi_{if(x)}, (df \circ df^*)_x(\xi_{if(x)})) = 0.$$

În concluzie, $(df^*)_x(\xi_{if(x)}) = 0$, și rezultatul se obține din lema precedentă.

Observația 7.1.4 Se observă că, dacă $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, h')$ este o aplicație (φ, φ') -olomorfă între două φ (și, respectiv, φ')-varietăți metrice reparate, adică $d\pi \circ \varphi = \varphi' \circ d\pi$, atunci $d\pi^* \circ \varphi' = \varphi \circ d\pi^*$.

Se obține ușor

Propoziția 7.1.5 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$ o aplicație netedă între varietatea riemanniană M , și φ -varietatea metrică reparată N . Atunci f este o aplicație φ -[PHWC] dacă și numai dacă pentru orice aplicație (φ, φ') -olomorfă între două φ (și, respectiv, φ')-varietăți metrice reparate, $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, h')$, $\pi \circ f : (M, g) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_i, \eta'_i, h')$ este o aplicație φ' -[PHWC].

Definiția 7.1.2 O aplicație φ -[PHWC] armonică se numește morfism φ -pseudo armonic.

În [9] autorul studiază aplicațiile φ -[PHWC] între o varietate riemanniană și o φ -varietate metrică reperată, $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, h)$, care satisface condiția $df(TM) \subset \Gamma(D^N)$, unde $\Gamma(D^N) = (\ker \varphi)^\perp$. În continuare vom studia aplicațiile φ -[PHWC], $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, pentru care $df(TM) \not\subset \Gamma(D^N)$.

Mai întâi, considerăm aplicația φ -[PHWC], $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$, între o varietate riemanniană și o varietate metrică aproape de contact. Este ușor de văzut că $df(TM) \subset \Gamma(D^N)$ dacă și numai dacă $\xi_{f(x)} \in \mathcal{V}_{f^*x}$, pentru orice $x \in M$. În continuare vom presupune că $\xi_{f(x)} \notin \mathcal{V}_{f^*x}$, pentru $x \in M$.

Se obține

Lema 7.1.6 Pentru f ca mai sus, avem

$$(df \circ df^*)_x \xi_{f(x)} = \Lambda(x) \xi_{f(x)},$$

pentru orice $x \in M$, unde $\Lambda(x) = \lambda^2(x) \geq 0$.

Demonstrație. Deoarece f este o aplicație φ -[PHWC], din Lema 7.1.2, în orice $x \in M$, avem $(df \circ df^*)_x \xi_{f(x)} = \Lambda(x) \xi_{f(x)}$. Se obține

$$0 \leq g_x(df^* \xi_{f(x)}, df^* \xi_{f(x)}) = h_x(\xi_{f(x)}, (df \circ df^*)_x \xi_{f(x)}) = \Lambda(x).$$

Astfel, putem defini câmpul vectorial ζ_1 pe M prin

$$(7.1.2) \quad \zeta_{1x} = \frac{1}{\lambda(x)} df_x^* \xi_{f(x)}, \quad x \in M,$$

unde $\lambda(x)$ este definită în lema precedentă.

Definim un câmp tensorial, ψ , de tip (1,1), pe M , prin

$$(7.1.3) \quad \psi(X) = \begin{cases} df^* \circ \varphi \circ (df^*)^{-1} X & , X \in \mathcal{H}_f \\ 0 & , X \in \mathcal{V}_f, \end{cases}$$

unde $\mathcal{H}_f = \cup_{x \in M} \mathcal{H}_{fx}$ și $\mathcal{V}_f = \cup_{x \in M} \mathcal{V}_{fx}$.

Se observă că, dacă $X \in \mathcal{H}_f \setminus \text{span}\{\zeta_1\}$ atunci $\psi X \in \mathcal{H}_f \setminus \text{span}\{\zeta_1\}$.

Definim 1-forma, θ_1 , pe M , prin

$$(7.1.4) \quad \theta_{1x}(X_x) = \frac{1}{\lambda(x)} \eta_{f(x)}(df_x(X_x)),$$

pentru orice $x \in M$, și $X \in \chi(M)$.

În final, fie $\{\zeta_2, \dots, \zeta_r\}$ un câmp ortnormal de repere pe \mathcal{V}_f și fie $\{\theta_2, \dots, \theta_r\}$ 1-formele definite prin

$$\theta_k(X) = g(X, \zeta_k), \quad X \in \chi(M),$$

pentru orice $k = 2, \dots, r$.

Evident, obținem

$$\psi^2 X = -X + \sum_{k=1}^r \theta_k(X) \zeta_k, \quad \theta_k \circ \psi = 0, \quad \theta_k(\zeta_l) = \delta_{kl},$$

pentru orice $k, l = 1, \dots, r$ și $X \in \chi(M)$. Prin urmare

Propoziția 7.1.7 $(M, \psi, \zeta_k, \theta_k, g)$ este o ψ -varietate metrică reparată.

În continuare vom numi ψ -structura metrică reparată obținută mai sus, ψ -structura metrică reparată pe M asociată (lui f).

Propoziția 7.1.8 Fie $f : (M, \psi, \zeta_k, \theta_k, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ o aplicație ca mai sus. Atunci f este o aplicație (ψ, φ) -olomorfă.

Definiția 7.1.3 Fie (M, g) o varietate riemanniană. Fie \mathcal{V} este o distribuție pe M . Atunci \mathcal{V} spunem că este minimală dacă

$$\sum_{i=1}^s \nabla_{v_i} v_i \in \mathcal{V},$$

unde $\{v_i\}_{i=1}^s$ este o bază locală ortonormată în \mathcal{V} , $\dim \mathcal{V} = s$, și ∇ este conexiunea Levi-Civita pe M .

Folosind ψ -structura metrică reparată asociată obținem

Teorema 7.1.9 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ o aplicație φ -[PHWC] între o varietate riemanniană și o varietate (1,2)-simplectică, pentru care $\mathcal{V}_f = \ker df$ este minimală, $\xi_{f(x)} \notin \mathcal{V}_{f^*x}$, pentru orice $x \in M$, și $d\eta(\tilde{X}, \xi) = 0$, pentru orice $\tilde{X} \in \chi(M)$. Dacă ψ este paralel și $\theta_1 \wedge d\theta_1 \neq 0$ atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Notăm cu ∇^M și ∇^N conexiunile Levi-Civita pe M și, respectiv, pe N . Deoarece ψ este paralel, se obține ușor

$$\nabla_X^M X + \nabla_{\psi X}^M \psi X = \psi[\psi X, X],$$

pentru orice $X \in \mathcal{H}_f \setminus \text{span}\{\zeta_1\}$.

Deoarece N este (1,2)-simplectică avem, din Lema 2.1.3

$$\nabla_{\tilde{X}}^N \tilde{X} + \nabla_{\varphi \tilde{X}}^N \varphi \tilde{X} = \varphi[\varphi X, X],$$

pentru orice $\tilde{X} \in \Gamma(D^N)$, unde D^N este distribuția pe N ortogonală pe $\text{span}\{\xi\}$.

Dacă α este forma a doua fundamentală a lui f , deoarece f este o aplicație (ψ, φ) -olomorfă, se obține

$$\sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(\psi e_i, \psi e_i)] = 0,$$

unde $\{e_1, \dots, e_m, \psi e_1, \dots, \psi e_m, \zeta_1, \dots, \zeta_r\}$ este o ψ -bază ortonormată locală în TM .

În continuare, pentru $X = Y = \zeta_1$ în Lema 2.1.3, avem $d\theta_1(\psi Z, \zeta_1) = 0$ pentru orice $Z \in \chi(M)$. Din definiția lui θ_1 urmează că $d\theta_1(\zeta_k, \zeta_1) = 0$ pentru orice $k = 2, \dots, r$. Folosind acest rezultat obținem, în particular, că $\nabla_{\zeta_1}^M \zeta_1 = 0$.

Deoarece $d\eta(\tilde{X}, \xi) = 0$, pentru orice $\tilde{X} \in \chi(N)$, și $\lambda\theta_1(X) = \eta(df(X))$, diferențiind, obținem

$$(d\lambda \wedge \theta_1)(X, Y) + \lambda d\theta_1(X, Y) = d\eta(df(X), df(Y)),$$

pentru orice $X, Y \in \chi(M)$. Dacă luăm $Y = \zeta_1$ avem

$$d\lambda = L_{\zeta_1} \lambda \theta_1,$$

unde L notează derivata Lie. Urmează că $d\lambda \wedge \theta_1 = 0$, și astfel $d\lambda \wedge d\theta_1 = 0$. Am obținut $L_{\zeta_1} \lambda \theta_1 \wedge d\theta_1 = 0$. Deci, din ipoteză, avem că $L_{\zeta_1} \lambda = 0$. Adică $d\lambda = 0$, și atunci λ este o constantă.

Avem

$$\nabla_{df(\zeta_1)}^N df(\zeta_1) = \Lambda \nabla_{\xi}^N \xi = 0,$$

și $df(\sum_{k=2}^r \nabla_{\zeta_k}^M \zeta_k) = 0$, deoarece $\mathcal{V}_f = \ker df$ este minimală.

Astfel

$$\sum_{k=1}^r \alpha(\zeta_k, \zeta_k) = 0,$$

și atunci $\tau(f) = 0$, unde $\tau(f)$ este câmpul tensiune al lui f . Prin urmare f este o aplicație armonică.

Observația 7.1.10 Dacă $\text{rang } f = \dim M$ atunci $\mathcal{V}_f = \ker df = \{0\}$. Astfel condiția ca \mathcal{V}_f să fie minimală nu mai este necesară în acest caz.

Propoziția 7.1.11 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ o aplicație φ -[PHWC] între o varietate riemanniană și o varietate metrică de contact, pentru care $\mathcal{V}_f = \ker df$ este minimală, și $\xi_{f(x)} \notin \mathcal{V}_{f^*x}$, pentru orice $x \in M$. Dacă ψ este paralel atunci f este o aplicație armonică.

Într-adevăr, condiția ca varietatea $(2n+1)$ -dimensională, N , să fie varietate de contact este $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$, care, în particular, devine $\theta_1 \wedge d\theta_1 \neq 0$. Astfel rezultatul se obține în același mod ca în precedenta teoremă.

Propoziția 7.1.12 Condiția din Teorema 7.1.9 și din Propoziția 7.1.11, ca ψ să fie paralel poate fi înlocuită cu următoarele două condiții, pentru M , dotată cu ψ -structura asociată, să fie varietate $(1,2)$ - D^M -simplectică like, unde D^M este distribuția pe M ortogonală pe $\text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_r\}$, și $d\theta_1(X, \zeta_1) = 0$, pentru orice $X \in \Gamma(D^M)$.

Demonstrație. Deoarece $d\theta_1(X, \zeta_1) = 0$, pentru orice $X \in \Gamma(D^M)$, și, din definiția lui θ_1 , urmează că $d\theta_1(X, \zeta_1) = 0$, pentru orice $X \in \chi(M)$, și, mai mult $\nabla_{\zeta_1}^M \zeta_1 = 0$. În același mod ca în demonstrația Teoremei 7.1.9 se obține că $\sum_{k=1}^r \alpha(\zeta_k, \zeta_k) = 0$.

Deoarece M este (1,2)- D^M -simplectică like, din Lema 2.1.3, se obține

$$\sum_{i=1}^m [(\nabla_{e_i} \psi) \psi e_i + (\nabla_{\psi e_i} \psi) e_i] = 0,$$

unde $\{e_1, \dots, e_m, \psi e_1, \dots, \psi e_m\}$ este o φ -bază ortonormată locală în $\Gamma(D^M)$.

De aici rezultă

$$\sum_{i=1}^m [\alpha(e_i, e_i) + \alpha(\psi e_i, \psi e_i)] = 0,$$

la fel ca în Teorema 7.1.9. Prin urmare $\tau(f) = 0$, și atunci f este o aplicație armonică.

În continuare vom extinde rezultatele de mai sus în cazul în care codome- niul funcției f este o φ -varietate metrică reperată.

Considerăm aplicația φ -[PHWC] $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, între o varietate riemanniană și o φ -varietate metrică reperată. Vom presupune că $\xi_{i_k f(x)} \notin \mathcal{V}_{f^*x}$, $k = 1, \dots, s$, pentru orice $x \in M$. Notăm cu $E_x = \mathcal{H}_{f^*x} \cap \text{span}\{\xi_{i_1 f(x)}, \dots, \xi_{i_s f(x)}\}$, $x \in \chi(M)$. Atunci $(df \circ df^*)_x : E_x \rightarrow E_x$ este un endomorfism autoadjunct. Există, deci, o bază ortonormată $\{\xi'_{1f(x)}, \dots, \xi'_{sf(x)}\}$, în E_x astfel încât matricea lui $(df \circ df^*)_x$, în această bază, este o matrice diagonală. Adică

$$(df \circ df^*)_x \xi'_{kf(x)} = \Lambda_k(x) \xi'_{kf(x)}, \quad k = 1, \dots, s.$$

În același fel ca în cazul varietăților aproape de contact avem $\Lambda_k(x) = \lambda_k^2(x) \geq 0$. Se obține ușor

$$\xi'_{kf(x)} = \sum_{j=1}^s c_{kj}(x) \xi_{jf(x)}, \quad k = 1, \dots, s,$$

unde $c_{kj} : M \rightarrow \mathbb{R}$ sunt funcții pe M . Definim 1-formele, η'_k , pe N , prin

$$\eta'_k = \sum_{j=1}^s c_{jk} \eta_j, \quad k = 1, \dots, s.$$

Se obține

$$\eta'_k \circ \varphi = 0, \quad \eta'_k(\xi'_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, \dots, s.$$

Fie matricea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix}.$$

Deoarece $\{\xi_{1f(x)}, \dots, \xi_{sf(x)}\}, \{\xi'_{1f(x)}, \dots, \xi'_{sf(x)}\}$ sunt baze ortonormate urmează că C este o matrice ortogonală.

Definim câmpurile vectoriale ζ_k pe M prin

$$(7.1.5) \quad \zeta_{kx} = \frac{1}{\lambda_k(x)} df_x^* \xi'_{kf(x)}, \quad k = 1, \dots, s, \quad x \in M.$$

Atunci putem defini câmpul tensorial, ψ , de tip (1,1), pe M , prin

$$(7.1.6) \quad \psi(X) = \begin{cases} df^* \circ \varphi \circ (df^*)^{-1} X & , X \in \mathcal{H}_f \\ 0 & , X \in \mathcal{V}_f, \end{cases}$$

unde $\mathcal{H}_f = \cup_{x \in M} \mathcal{H}_{fx}$ și $\mathcal{V}_f = \cup_{x \in M} \mathcal{V}_{fx}$. Se observă că, dacă $X \in \mathcal{H}_f \setminus \text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}$ atunci $\psi X \in \mathcal{H}_f \setminus \text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}$.

Fie 1-formele, θ_k , $k = 1, \dots, s$, pe M , definite prin

$$(7.1.7) \quad \theta_{kx}(X_x) = \frac{1}{\lambda_k(x)} \eta'_{kf(x)}(df_x(X_x)),$$

pentru orice $x \in M$, și $X \in \chi(M)$.

În final, fie $\{\zeta_{s+1}, \dots, \zeta_r\}$ un câmp ortonormat de repere pe \mathcal{V}_f și fie $\{\theta_{s+1}, \dots, \theta_r\}$, 1-formele definite prin

$$\theta_k(X) = g(X, \zeta_k), \quad X \in \chi(M),$$

pentru orice $k = s + 1, \dots, r$.

Se obțin

$$\psi^2 X = -X + \sum_{k=1}^r \theta_k(X) \zeta_k, \quad \theta_k \circ \psi = 0, \quad \theta_k(\zeta_l) = \delta_{kl},$$

pentru orice $k, l = 1, \dots, r$ și $X \in \chi(M)$. Ca în cazul precedent, al varietăților aproape de contact, se obține

Propoziția 7.1.13 $(M, \psi, \zeta_k, \theta_k, g)$ este o ψ -varietate metrică reperată.

Propoziția 7.1.14 Fie $f : (M, \psi, \zeta_k, \theta_k, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ ca mai sus. Atunci f este o aplicație (ψ, φ) -olomorvă.

Teorema 7.1.15 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, $i = 1, \dots, n$, o aplicație φ -[PHWC] între o varietate riemanniană și o varietate (1,2)-simplectică normală, pentru care $\mathcal{V}_f = \ker df$ este minimală, și $\xi_{i_k f(x)} \notin \mathcal{V}_{f^*x}$, $k = 1, \dots, s$, pentru orice $x \in M$. Dacă ψ este paralel și $\theta_k \wedge d\theta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, s$, atunci f este o aplicație armonică.

Demonstrație. Deoarece N este o varietate normală rezultă că $d\eta_i(X, \xi_j) = 0$, pentru orice $i, j = 1, \dots, n$. După un calcul direct, ținând cont că matricea C , definită mai sus, este ortogonală, se obține că $d\eta'_k(X, \xi'_k) = 0$, pentru orice $k = 1, \dots, s$. De aici demonstrația continuă în același mod ca demonstrația Teoremei 7.1.9.

Observația 7.1.16 La fel ca pentru Teorema 7.1.9 condiția ca \mathcal{V}_f să fie minimală nu este necesară dacă $\text{rank } f = \dim M$.

Observația 7.1.17 Condițiile $\theta_k \wedge d\theta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, s$, sunt echivalente cu $(\eta_k \circ df) \wedge (d\eta_k \circ (df, df)) \neq 0$.

Putem impune, și în acest caz, condiții care să o înlocuiască pe cea ca ψ să fie paralel

Propoziția 7.1.18 Condiția din Teorema 7.1.15, ca ψ să fie paralel poate fi substituită cu următoarele două condiții, pentru M , dotată cu ψ -structura metrică reperată asociată, să fie o varietate $(1,2)$ - D^M -simplectică like, unde D^M este distribuția pe M ortogonală pe $\text{span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_r\}$, și $d\theta_k(X, \zeta_k) = 0$, $k = 1, \dots, s$, pentru orice $X \in \Gamma(D^M)$.

7.2 Morfisme φ -pseudo armonice

Definiția 7.2.1 Printr-o aplicație locală $\pi : N \rightarrow P$ înțelegem o aplicație definită pe o submulțime deschisă a lui N .

Un caz particular al unui rezultat din [9] este

Propoziția 7.2.1 Fie $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_j, \eta'_j, k)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, o aplicație (φ, φ') -olomorvă între două varietăți $(1,2)$ -simplectice. Atunci π este o aplicație D^N -pluriarmonică, unde D^N este distribuția pe N ortogonală pe $\text{span}\{\xi_i\}_{i=1}^n$.

Se obține

Propoziția 7.2.2 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o varietate $(1,2)$ -simplectică, astfel încât $\xi \notin \mathcal{V}_{f*}$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi, \eta, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi', \eta', k)$ o aplicație locală armonică între două varietăți $(1,2)$ -simplectice, care este (φ, φ') -olomorvă. Atunci $\pi \circ f$ este un morfism φ' -pseudo armonic local pe M .

Demonstrație. Deoarece f este un morfism φ -pseudo armonic obținem că $\pi \circ f$ este o aplicație φ' -[PHWC].

Considerăm pe M , ψ -structura metrică reperată asociată obținută în paragraful precedent. Din legile de compunere avem

$$\tau(\pi \circ f) = d\pi(\tau(f)) + \text{trace} \nabla d\pi(df, df),$$

deoarece f este armonică și (ψ, φ) -olomorfă, se obține că

$$\begin{aligned} \tau(\pi \circ f) = \text{trace} \nabla d\pi(df, df) &= \sum_{i=1}^m [\alpha_\pi(df(e_i), df(e_i)) + \alpha_\pi(\varphi df(e_i), \varphi df(e_i))] + \\ &+ \lambda^2 \alpha_\pi(\xi, \xi), \end{aligned}$$

unde funcția λ este aceeași definită în paragraful anterior, și $\{e_1, \dots, e_m, \psi e_1, \dots, \psi e_m\}$ este o bază ortonormată în $\Gamma(D^M) = (\ker \psi)^\perp$. Deoarece π este (φ, φ') -olomorfă atunci este D^N -pluriarmonică. Astfel $\tau(\pi \circ f) = \lambda^2 \alpha_\pi(\xi, \xi)$ care se anulează deoarece π este armonică. Astfel $\pi \circ f$ este o aplicație armonică și atunci este un morfism φ' -pseudo armonic pe M .

În [21] este demonstrat că orice aplicație (φ, φ') -olomorfă, $\pi : (N, \varphi, \xi, \eta, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi', \eta', k)$, între varietăți cosimplete este armonică, și în [24] este demonstrat același rezultat în cazul varietăților de contact. Atunci obținem

Propoziția 7.2.3 *Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o varietate cosimplectică (sau o varietate metrică de contact), astfel încât $\xi \notin \mathcal{V}_{f*}$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi, \eta, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi', \eta', k)$ o aplicație locală (φ, φ') -olomorfă între varietăți cosimplete (sau varietăți metrice de contact). Atunci $\pi \circ f$ este un morfism φ' -pseudo armonic local pe M .*

Propoziția 7.2.4 *Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi, \eta, h)$ un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o varietate metrică aproape de contact, astfel încât $\xi \notin \mathcal{V}_{f*}$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi, \eta, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi', \eta', k)$ o aplicație locală φ -pluriarmonică între două varietăți metrice aproape de contact. Atunci $\pi \circ f$ este o aplicație locală armonică.*

Într-adevăr, deoarece o aplicație φ -pluriarmonică este armonică și D -pluriarmonică demonstrația este similară cu cea a Propoziției 7.2.2.

La fel ca în paragraful precedent putem extinde unele din aceste rezultate la cazul φ -varietăților reperate.

La fel ca în Propoziția 7.2.2, folosind ψ -structura metrică reperată asociată pe M , se obține

Propoziția 7.2.5 *Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, $i = 1, \dots, n$, un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o varietate $(1,2)$ -simplectică, astfel încât $\xi_i \notin \mathcal{V}_{f*}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_j, \eta'_j, k)$, $j = 1, \dots, p$, o aplicație locală armonică între două varietăți $(1,2)$ -simplectice, (φ, φ') -olomorfă. Atunci $\pi \circ f$ este un morfism φ' -pseudo armonic local pe M .*

Am demonstrat, în Capitolul 4, că orice aplicație (φ, φ') -olomorfă între două \mathcal{C} -varietăți este o aplicație armonică. Obținem

Propoziția 7.2.6 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, $i = 1, \dots, n$, un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o \mathcal{C} -varietate, astfel încât $\xi_i \notin \mathcal{V}_{f^*}$, pentru orice $i = 1, \dots, n$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_j, \eta'_j, k)$, $j = 1, \dots, p$, o aplicație locală (φ, φ') -olomorfă între două \mathcal{C} -varietăți. Atunci $\pi \circ f$ este un morfism φ' -pseudo armonic local pe M .

În final, avem

Propoziția 7.2.7 Fie $f : (M, g) \rightarrow (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h)$, $i = 1, \dots, n$, un morfism φ -pseudo armonic între o varietate riemanniană și o φ -varietate metrică reperată, astfel încât $\xi_{i_k} \notin \mathcal{V}_{f^*}$, pentru unii coeficienți $k = 1, \dots, r$, $r \leq n$, și fie $\pi : (N, \varphi, \xi_i, \eta_i, h) \rightarrow (P, \varphi', \xi'_j, \eta'_j, k)$ o aplicație locală φ -pluriarmonică între două $\varphi(\varphi')$ -varietăți metrică reperate. Atunci $\pi \circ f$ este o aplicație locală armonică.

7.3 O ψ -structură metrică reperată asociată pe fibratul tangent al unei varietăți metrică aproape de contact

Fie $(M, g, \varphi, \xi, \eta)$ o varietate metrică aproape de contact de dimensiune $(2m+1)$, și fie TM fibratul său tangent. Considerăm pe TM metrica riemanniană G , introdusă în [35] și folosită în capitolul precedent.

Fie $\pi : (TM, G) \rightarrow (M, g, \varphi, \xi, \eta)$ proiecția canonică. Notăm cu $d\pi$ aplicația tangentă și cu $d\pi^*$ aplicația sa adjunctă. Este ușor de văzut că $d\pi^*(X) = X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, pentru un câmp vectorial oarecare pe M , $X = X_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Urmează că $d\pi \circ d\pi^*(X) = X$, pentru orice $X \in \chi(M)$, adică π este o aplicație orizontal slab conformă și, astfel, o aplicație φ -[PHWC]. Evident, distribuția orizontală, \mathcal{H}_π , și distribuția verticală, \mathcal{V}_π , sunt ortogonale în raport cu metrica G . Deoarece $\mathcal{H}_{\pi^*} = TM \setminus \{0\}$ și $d\pi : \mathcal{H}_\pi \rightarrow \mathcal{H}_{\pi^*}$ este bijectivă și liniară urmează că $\dim \mathcal{H}_\pi = \dim \mathcal{V}_\pi = 2m + 1$. Atunci se obține că $\{d\pi^*(e_1), \dots, d\pi^*(e_m), d\pi^*(\varphi e_1), \dots, d\pi^*(\varphi e_m), d\pi^*(\xi)\}$ și $\{e_1^V, \dots, e_m^V, (\varphi e_1)^V, \dots, (\varphi e_m)^V, \xi^V\}$ sunt baze locale ortonormate în \mathcal{H}_π și, respectiv, în \mathcal{V}_π , unde $\{e_1, \dots, e_m, \varphi e_1, \dots, \varphi e_m, \xi\}$ este o φ -bază locală ortonormată în TM .

Dacă M este o varietate (1,2)-simplectică, $d\eta(X, \xi) = 0$, pentru orice $X \in \chi(M)$, și $\eta_x([\xi, \frac{\partial}{\partial x^i}]x) = 0$, pentru orice $i = 1, \dots, 2m + 1$ și $x \in M$, unde $(U; x^i)$, $i = 1, \dots, 2m + 1$, este o hartă locală oarecare. Atunci, după un calcul direct, în coordonate locale, rezultă că \mathcal{V}_π este minimală.

În continuare, considerăm ψ -structura metrică reperată asociată pe TM , obținută la fel ca în cazul general.

Notăm cu ω și Ω , 2-formele fundamentale pe M și, respectiv, pe TM . Se obține $\Omega(d\pi^*(X), d\pi^*(Y)) = \omega(X, Y)$, pentru orice $X, Y \in \chi(M)$. Avem $d\Omega(d\pi^*(X), \psi(d\pi^*(X)), d\pi^*(Z)) = 0$, pentru orice $X, Z \in \chi(M)$, deoarece

M este (1,2)-simplectică. Urmează, din Lema 2.1.3, că

$$G((\nabla_{d\pi^*(e_i)}^G \psi)\psi(d\pi^*(e_i)) - (\nabla_{d\pi^*(\varphi e_i)}^G \psi)d\pi^*(e_i), d\pi^*(Z)) = 0,$$

pentru orice $Z \in \chi(M)$, unde ∇^G este conexiunea Levi-Civita pe (TM, G) .
Obținem

$$d\pi((\nabla_{d\pi^*(e_i)}^G \psi)\psi(d\pi^*(e_i)) - (\nabla_{d\pi^*(\varphi e_i)}^G \psi)d\pi^*(e_i)) = 0,$$

și, de aici,

$$d\pi(\nabla_{d\pi^*(e_i)}^G d\pi^*(e_i) + \nabla_{d\pi^*(\varphi e_i)}^G d\pi^*(\varphi e_i)) = d\pi(\psi[\psi d\pi^*(e_i), d\pi^*(e_i)]),$$

deoarece π este o aplicație (ψ, φ) -olomorvă. Dar M este o varietate (1,2)-simplectică și atunci, din Lema 2.1.3, rezultă că

$$\nabla_{e_i} e_i + \nabla_{\varphi e_i} \varphi e_i = \varphi[\varphi e_i, e_i].$$

Se obține ușor că $d\pi(\nabla_{d\pi^*(\xi)}^G d\pi^*(\xi)) = 0$.

Din toate acestea se obține $\tau(\pi) = 0$. Astfel π este o aplicație armonică.
Putem enunța

Propoziția 7.3.1 *Pentru M și TM ca mai sus, proiecția canonică π este un morfism armonic.*

Observația 7.3.2 O varietate diferențiabilă M , îndeplinind condițiile necesare de mai sus se poate obține după cum urmează, (vezi[2]). Fie (M', J, h) o varietate aproape Kähler pe care avem coordonatele locale $\{x^i\}_{i=1}^{2n}$ și fie t coordonata pe \mathbb{R} . Pe $M = M' \times \mathbb{R}$ luăm $\eta = dt$ și $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$. Definim câmpul tensorial de tip (1,1), φ , prin $\varphi\xi = 0$, $\varphi X = JX$, pentru X ortogonal pe ξ . În final, considerăm metrica riemanniană g pe M , $g = h_{ij}dx^i dx^j + dt dt$, unde h_{ij} sunt componentele metricii riemanniene h . Se arată ușor că $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ este o varietate metrică aproape de contact având toate proprietățile cerute în acest paragraf.

Capitolul 8

Curbe biarmonice în grupul Heisenberg generalizat

Introducere

În acest capitol găsim condiția pentru ca o curbă în grupul Heisenberg generalizat să fie biarmonică și non-armonică. Prezentăm, deasemenea, exemple de astfel de curbe. Aceste rezultate se găsesc în lucrarea ”**Biharmonic curves in the generalized Heisenberg group**”, care va apare în *Beiträge zur Algebra und Geometrie*.

8.1 Aplicații biarmonice

Fie varietățile riemanniene (M, g) și (N, h) . Notăm cu ∇^M, ∇^N , conexiunile Levi-Civita pe M și, respectiv, N . Pentru o aplicație netedă f între (M, g) și (N, h) , se definește conexiunea indusă, ∇ , pe fibratul vectorial indus $f^{-1}(TN)$, după cum urmează. Pentru $X \in \chi(M), V \in \Gamma(f^{-1}(TN))$, se definește $\nabla_X V \in \Gamma(f^{-1}(TN))$ prin $\nabla_X V = \nabla_{f_*X}^N V$.

Laplacianul acționând pe $\Gamma(f^{-1}(TN))$, indus de conexiunea ∇ , este dat de formula lui Weitzenböck

$$\Delta V = -\text{trace} \nabla^2 V,$$

unde $V \in \Gamma(f^{-1}(TN))$.

Dacă M este o varietate compactă, bienergia lui f se definește prin $E_2(f) = \frac{1}{2} \int_M |\tau(f)|^2 * 1$. Spunem că f este o aplicație biarmonică dacă este un punct critic al funcționalei bienergiei, $E_2(f)$. În [26] s-a demonstrat că $f : M \rightarrow N$ este o aplicație biarmonică dacă și numai dacă satisface ecuația $\tau_2(f) = 0$, unde

$$(8.1.1) \quad \tau_2(f) = -\Delta \tau(f) - \text{trace} R^N(df(\cdot), \tau(f))df(\cdot),$$

și R^N este câmpul tensorial de curbura al conexiunii Levi-Civita pe (N, h) .

Este evident că o aplicație armonică este biarmonică și, mai mult, un minim absolut al funcționalei bienergiei.

8.2 Grupul Heisenberg generalizat

Considerăm \mathbb{R}^{2n+1} cu elementele de forma $X = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, z)$. Definim produsul pe \mathbb{R}^{2n+1} , prin

$$X\tilde{X} = (x_1 + \tilde{x}_1, y_1 + \tilde{y}_1, \dots, x_n + \tilde{x}_n, y_n + \tilde{y}_n, z + \tilde{z} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\tilde{x}_i y_i - \tilde{y}_i x_i)),$$

unde $X = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z)$, $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{z})$.

Fie $\mathbb{H}_{2n+1} = (\mathbb{R}^{2n+1}, g)$ grupul Heisenberg generalizat dotat cu metrica riemanniană g , definită prin

$$(8.2.1) \quad g = \sum_{i=1}^n (dx_i^2 + dy_i^2) + \left[dz + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (y_i dx_i - x_i dy_i) \right]^2.$$

Metrica g este stâng invariantă.

Putem defini un câmp global de repere pe \mathbb{H}_{2n+1} , prin

$$E_{2i-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_{2i} = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad E_{2n+1} = \frac{\partial}{\partial z},$$

cu $i = 1, \dots, n$. Conexiunea Levi-Civita a metricii g este dată de, (vezi [35] pentru cazul 3-dimensional),

$$(8.2.2) \quad \begin{cases} \nabla_{E_{2i-1}} E_{2j-1} = 0, & \nabla_{E_{2i-1}} E_{2j} = \frac{1}{2} \delta_{ij} E_{2n+1}, \\ \nabla_{E_{2i}} E_{2j} = 0, & \nabla_{E_{2i}} E_{2j-1} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} E_{2n+1}, \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2i-1} = -\frac{1}{2} E_{2i}, & \nabla_{E_{2i-1}} E_{2n+1} = -\frac{1}{2} E_{2i}, \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2i} = \frac{1}{2} E_{2i-1}, & \nabla_{E_{2i}} E_{2n+1} = \frac{1}{2} E_{2i-1}, \\ \nabla_{E_{2n+1}} E_{2n+1} = 0, & \end{cases}$$

for $i, j = 1, \dots, n$. Mai avem

$$\begin{cases} [E_{2i-1}, E_{2j-1}] = 0, & [E_{2i}, E_{2j}] = 0, \\ [E_{2i-1}, E_{2n+1}] = 0, & [E_{2i}, E_{2n+1}] = 0, \\ [E_{2i-1}, E_{2j}] = \delta_{ij} E_{2n+1}, & \end{cases}$$

Tensorul de curbura al conexiunii ∇ este

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

iar câmpul tensorial Riemann-Christoffel este

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)W, Z),$$

unde $X, Y, Z, W \in \chi(\mathbb{R}^{2n+1})$. Vom folosi notațiile

$$R_{abc} = R(E_a, E_b)E_c, \quad R_{abcd} = R(E_a, E_b, E_c, E_d),$$

unde $a, b, c, d = 1, \dots, 2n+1$. Atunci componentele nenule ale acestor câmpuri tensoriale sunt

$$(8.2.3) \quad \begin{cases} R_{(2i-1)(2j-1)(2k)} = -\frac{1}{4}\delta_{jk}E_{2i} + \frac{1}{4}\delta_{ik}E_{2j}, \\ R_{(2i-1)(2j)(2k-1)} = \frac{1}{4}\delta_{jk}E_{2i} + \frac{1}{2}\delta_{ij}E_{2k}, \\ R_{(2i-1)(2j)(2k)} = -\frac{1}{4}\delta_{ik}E_{2j-1} - \frac{1}{2}\delta_{ij}E_{2k-1}, \\ R_{(2i-1)(2n+1)(2j-1)} = -\frac{1}{4}\delta_{ij}E_{2n+1}, \\ R_{(2i-1)(2n+1)(2n+1)} = \frac{1}{4}\delta_{ij}E_{2i-1}, \\ R_{(2i)(2j)(2k-1)} = -\frac{1}{4}\delta_{jk}E_{2i-1} + \frac{1}{4}\delta_{ik}E_{2j-1}, \\ R_{(2i)(2n+1)(2j)} = -\frac{1}{4}\delta_{ij}E_{2n+1}, \\ R_{(2i)(2n+1)(2n+1)} = \frac{1}{4}\delta_{ij}E_{2i}, \end{cases}$$

$$(8.2.4) \quad \begin{cases} R_{(2i-1)(2j-1)(2i)(2k)} = -\frac{1}{2}\delta_{jk} + \frac{1}{4}\delta_{ik}\delta_{ij}, \\ R_{(2i-1)(2j)(2i)(2k-1)} = \frac{1}{4}\delta_{jk} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\delta_{ij}, \\ R_{(2i-1)(2j)(2k)(2k-1)} = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{1}{4}\delta_{ik}\delta_{jk}, \\ R_{(2i)(2j-1)(2j-1)(2k)} = \frac{1}{4}\delta_{ik} - \frac{1}{4}\delta_{jk}\delta_{ij}, \\ R_{(2i-1)(2n+1)(2n+1)(2j-1)} = -\frac{1}{4}\delta_{ij}, \\ R_{(2i)(2n+1)(2n+1)(2j)} = -\frac{1}{4}\delta_{ij}, \end{cases}$$

pentru $i, j, k = 1, \dots, n$.

8.3 Curbe biarmonice în \mathbb{H}_{2n+1}

Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ o curbă fără puncte de inflexiune, parametrizată natural, prin lungimea sa de arc. Fie $\{T, N_1, \dots, N_{2n}\}$ reperul Frenet în \mathbb{H}_{2n+1} , definit în lungul curbei γ , unde $T = \gamma'$ este câmpul vectorial unitar tangent la γ , N_1 este câmpul vectorial unitar normal la γ , cu aceeași direcție ca $\nabla_T T$ și vectorii N_1, \dots, N_{2n} sunt vectorii unitari obținuți din ecuațiile lui Frenet pentru γ

$$(8.3.1) \quad \begin{cases} \nabla_T T & = & \chi_1 N_1 \\ \nabla_T N_1 & = & -\chi_1 T + \chi_2 N_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \nabla_T N_{2n-1} & = & -\chi_{2n-2} N_{2n-2} + \chi_{2n-1} N_{2n} \\ \nabla_T N_{2n} & = & -\chi_{2n-1} N_{2n-1} \end{cases}$$

unde $\chi_1 = \|\nabla_T T\| = \|\tau(\gamma)\|$, și $\chi_2 = \chi_2(s), \dots, \chi_{2n} = \chi_{2n}(s)$ sunt funcții cu valori reale, iar s este lungimea de arc a curbei γ . Dacă $\chi_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 2n+1$, spunem că γ este o elice.

Ecuția biarmonică a curbei γ este

$$(8.3.2) \quad \tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = 0.$$

Folosind ecuațiile lui Frenet, se obține

$$(8.3.3) \quad \nabla_T^3 T = (-3\chi_1\chi_1')T + (\chi_1'' - \chi_1^3 - \chi_1\chi_2^2)N_1 + (2\chi_1'\chi_2 + \\ + \chi_1\chi_2')N_2 + \chi_1\chi_2\chi_3N_3.$$

Din (8.2.3) avem

$$R(T, \nabla_T T)T = \sum_{i=1}^n (\xi_{2i-1}E_{2i-1} + \xi_{2i}E_{2i}) + \xi_{2n+1}E_{2n+1},$$

cu

$$\xi_{2i-1} = \frac{3}{4}T_{2i} \sum_{j=1}^n (-T_{2j-1}N_1^{2j} + T_{2j}N_1^{2j-1}) + \frac{1}{4}T_{2i-1}T_{2n+1}N_1^{2n+1} - \\ - \frac{1}{4}T_{2n+1}^2N_1^{2i-1},$$

$$\xi_{2i} = \frac{3}{4}T_{2i-1} \sum_{j=1}^n (T_{2j-1}N_1^{2j} - T_{2j}N_1^{2j-1}) + \frac{1}{4}T_{2i}T_{2n+1}N_1^{2n+1} - \\ - \frac{1}{4}T_{2n+1}^2N_1^{2i},$$

$$\xi_{2n+1} = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (-T_{2j-1}^2N_1^{2n+1} - T_{2j}^2N_1^{2n+1} + T_{2j-1}T_{2n+1}N_1^{2j-1} + \\ + T_{2j}T_{2n+1}N_1^{2j}),$$

unde $T = \sum_{a=1}^{2n+1} T_a E_a$ și $N_1 = \sum_{a=1}^{2n+1} N_1^a E_a$. Printr-un calcul direct, se obține

$$(8.3.4) \quad R(T, \nabla_T T)T = \sum_{k=1}^{2n} \eta_k N_k,$$

cu

$$(8.3.5) \quad \eta_1 = \frac{3}{4} \left[\sum_{i=1}^n (T_{2i}N_1^{2i-1} - T_{2i-1}N_1^{2i}) \right]^2 - \frac{1}{4}T_{2n+1}^2 - \frac{1}{4}(N_1^{2n+1})^2,$$

$$(8.3.6) \quad \eta_k = \frac{3}{4} \left[\sum_{i=1}^n (T_{2i}N_1^{2i-1} - T_{2i-1}N_1^{2i}) \right] \left[\sum_{i=1}^n (T_{2i}N_k^{2i-1} - \\ - T_{2i-1}N_k^{2i}) \right] - \frac{1}{4}N_1^{2n+1}N_k^{2n+1},$$

unde $N_k = \sum_{a=1}^{2n+1} N_k^a E_a$.

Din (8.3.2), (8.3.3) și (8.3.4) urmează că ecuația biarmonică a lui γ este

$$\begin{aligned} \tau_2(\gamma) = \nabla_T^3 T - R(T, \nabla_T T)T = & (-3\chi_1\chi_1')T + (\chi_1'' - \chi_1^3 - \\ & -\chi_1\chi_2^2 - \chi_1\eta_1)N_1 + (2\chi_1'\chi_2 + \chi_1\chi_2' - \chi_1\eta_2)N_2 + \\ & + (\chi_1\chi_2\chi_3 - \chi_1\eta_3)N_3 - \chi_1 \sum_{i=4}^{2n} \eta_k N_k, \end{aligned}$$

unde η_a , $a = 1, \dots, 2n$, sunt date de (8.3.5) și (8.3.6).

Am obținut

Teorema 8.3.1 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ o curbă, parametrizată prin lungimea de arc. Atunci γ este o curbă biarmonică și non-armonică dacă și numai dacă

$$(8.3.7) \quad \begin{cases} \chi_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 = -\eta_1, \\ \chi_2' = \eta_2, \\ \chi_2\chi_3 = \eta_3, \\ \eta_k = 0, \quad k = 4, \dots, 2n, \end{cases}$$

unde η_k , $k = 1, \dots, 2n$, sunt date de (8.3.5) și (8.3.6).

Corolar 8.3.2 Dacă $\chi_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ și $\chi_2 = 0$ pentru o curbă $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$, parametrizată prin lungimea de arc, atunci γ este o curba biarmonică și non-armonică dacă și numai dacă $\chi_1^2 = -\eta_1$ și $\eta_k = 0$, $k = 2, \dots, 2n$.

Corolar 8.3.3 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ o curbă, parametrizată prin lungimea de arc. Dacă $\eta_1 \geq 0$ atunci γ nu poate fi biarmonică și non-armonică.

În [35] sunt demonstrate următoarele două rezultate, în cazul grupului Heisenberg, \mathbb{H}_3

Teorema 8.3.4 Fie γ elicea dată prin

$$\gamma(s) = (r \cos(as), r \sin(as), c a s),$$

unde $r > 0$, $\frac{1}{a^2} = r^2(1 + \frac{1}{4}r^2)$. Atunci γ este o curbă biarmonică și non-geodezică.

Observația 8.3.5 În cazul de mai sus, dacă $r = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, atunci γ este o curbă biarmonică și non-armonică, cu $\chi_2 = 0$.

În cazul dimensiunilor superioare, obținem un rezultat similar, legat de Teorema 8.3.1. Considerăm o curbă în \mathbb{R}^{2n+1} , dată prin

$$\gamma(s) = (c_1 \cos(a_1 s), c_1 \sin(a_1 s), \dots, c_n \cos(a_n s), c_n \sin(a_n s), cs),$$

unde $c_i > 0$, $a_i \neq 0$, $c \neq 0$, $i = 1, \dots, n$. Atunci se obține

$$T(s) = \gamma'(s) = \sum_{i=1}^n [-c_i a_i \sin(a_i s) E_{2i-1} + c_i a_i \cos(a_i s) E_{2i}] + A E_{2n+1},$$

unde $A = c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 a_i$. Din $\|T(s)\| = 1$ avem $A^2 + \sum_{i=1}^n c_i^2 a_i^2 = 1$. După un calcul direct, folosind (8.2.2), obținem

$$\nabla_T T = \sum_{i=1}^n [c_i a_i (A - a_i) \cos(a_i s) E_{2i-1} + c_i a_i (A - a_i) \sin(a_i s) E_{2i}].$$

Din prima ecuație (8.3.1) și din $\|N_1\| = 1$, avem

$$\chi_1 = \left[\sum_{i=1}^n c_i^2 a_i^2 (A - a_i)^2 \right]^{1/2} \in \mathbb{R},$$

și

$$N_1 = \sum_{i=1}^n \frac{c_i a_i |A - a_i|}{\left[\sum_{j=1}^n c_j^2 a_j^2 (A - a_j)^2 \right]^{1/2}} [\cos(a_i s) E_{2i-1} + \sin(a_i s) E_{2i}].$$

Se observă că $N_1^{2n+1} = 0$. În continuare, se obține

$$\begin{aligned} \nabla_T N_1 + \chi_1 T &= \frac{1}{2\chi_1} \sum_{i=1}^n \left\{ c_i a_i [|A - a_i|(A - 2a_i) - 2\chi_1^2] \right\} [\sin(a_i s) E_{2i-1} - \\ &\quad - \cos(a_i s) E_{2i}] + \frac{1}{2\chi_1} \left[2\chi_1^2 A - \sum_{j=1}^n c_j^2 a_j^2 |A - a_j| \right] E_{2n+1}. \end{aligned}$$

Din (8.3.1) și din $\|N_2\| = 1$ rezultă că $|\chi_2|^2 = \|\chi_2 N_2\|^2$.

Pentru a găsi o curbă care satisface condițiile Corolarului 8.3.2, presupunem că $\chi_2 = 0$ și $\chi_1^2 = -\eta_1$. Astfel, printr-un calcul direct, obținem

Propoziția 8.3.6 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ o curbă definită prin

$$\gamma(s) = (c_1 \cos(a_1 s), c_1 \sin(a_1 s), \dots, c_n \cos(a_n s), c_n \sin(a_n s), cs),$$

unde $c_i > 0$, $a_i \neq 0$, $c \neq 0$. Dacă $a_i = a = A - \frac{1}{2A}$, $\sum_{i=1}^n c_i^2 = \frac{4A^2(1-A^2)}{(2A^2-1)^2}$ și $c = \frac{A^3}{2A^2-1}$, unde

$$A = \pm \left[\frac{3n^2 - 1 + (9n^4 + 6n^2 + 5)^{1/2}}{6n^2 + 2} \right]^{1/2},$$

atunci γ este o curbă biarmonică și non-armonică în \mathbb{H}_{2n+1} .

Pentru o astfel de curbă, avem, pentru $k \neq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (T_{2i} N_k^{2i-1} - T_{2i-1} N_k^{2i}) &= \frac{\chi_1}{|A-a|} \sum_{i=1}^n (N_1^{2i-1} N_k^{2i-1} + N_1^{2i} N_k^{2i}) = \\ &= -\frac{\chi_1}{|A-a|} N_1^{2n+1} N_k^{2n+1} = 0. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că $\eta_k = 0$, pentru orice $k = 2, \dots, 2n$.

Se observă că Propoziția 8.3.6 este o generalizare a rezultatului din Observația 8.3.5.

În continuare, se obține

Propoziția 8.3.7 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ o curbă definită de

$$\gamma(s) = (r \cos(as), r \sin(as), \dots, r \cos(as), r \sin(as), cs),$$

unde $r > 0$, $a_i \neq 0$, $c \neq 0$. Dacă $\chi_2 = 0$, $\chi_1 \neq 0$ și γ este biarmonică, atunci $n = 1$.

În cele ce urmează obținem o clasă de curbe biarmonice și non-armonice pentru care curbura de ordinul doi nu se anulează în mod necesar, (vezi [4] pentru rezultatul similar în cazul 3-dimensional).

Propoziția 8.3.8 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$, $\gamma(s) = (x_1(s), y_1(s), \dots, x_n(s), y_n(s), z(s))$, curba cu ecuațiile parametrice

$$(8.3.8) \quad \begin{cases} x_i(s) &= \frac{1}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n}} \sin(\beta s + a_i) + b_i, \\ y_i(s) &= -\frac{1}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n}} \cos(\beta s + a_i) + c_i, \\ z(s) &= \left(\cos \alpha + \frac{(\sin \alpha)^2}{2\beta} \right) s - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2\beta\sqrt{n}} \sin \alpha \cos(\beta s + a_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{2\beta\sqrt{n}} \sin \alpha \cos(\beta s + a_i) + d, \end{cases}$$

cu $i = 1, \dots, n$, unde $\beta = \frac{\cos \alpha \pm \sqrt{5(\cos \alpha)^2 - 4}}{2}$, $\alpha \in (0, \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}) \cup$

$[\arccos(-\frac{2\sqrt{5}}{5}), \pi)$ and $a_i, b_i, c_i, d \in \mathbb{R}$. Atunci γ este o curbă biarmonică și non-armonică.

Demonstrație. Derivata covariantă a câmpului vectorial unitar tangent, T , la γ , este

$$\nabla_T T = \sum_{i=1}^n [(T'_{2i-1} + T_{2i} T_{2n+1}) E_{2i-1} + (T'_{2i} - T_{2i-1} T_{2n+1}) E_{2i}] + T'_{2n+1} E_{2n+1},$$

și T este dat de

$$T(s) = \gamma'(s) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\cos(\beta s + a_i) E_{2i-1} + \sin(\beta s + a_i) E_{2i}] + \cos \alpha E_{2n+1}.$$

Ținând cont de prima ecuație Frenet, se obține

$$\chi_1 = |\sin \alpha (\cos \alpha - \beta)|$$

și, deoarece putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $\sin \alpha(\cos \alpha - \beta) > 0$, avem

$$N_1 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sin(\beta s + a_i)}{\sqrt{n}} E_{2i-1} - \frac{\cos(\beta s + a_i)}{\sqrt{n}} E_{2i} \right).$$

Printr-un calcul direct rezultă că $\eta_1 = (\sin \alpha)^2 - \frac{1}{4}$ și $\eta_k = 0$, pentru orice $k = 2, \dots, 2n$.

Pentru a găsi χ_2 obținem, folosind ecuațiile (8.2.2),

$$\begin{aligned} \nabla_T N_1 + \chi_1 T &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\cos(\beta s + a_i)}{\sqrt{n}} \left[\beta - \frac{1}{2} \cos \alpha + (\cos \alpha - \beta)(\sin \alpha)^2 \right] E_{2i-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin(\beta s + a_i)}{\sqrt{n}} \left[\beta - \frac{1}{2} \cos \alpha + (\cos \alpha - \beta)(\sin \alpha)^2 \right] E_{2i} \right\} - \\ &\quad - \sin \alpha \left[\frac{1}{2} - (\cos \alpha - \beta) \cos \alpha \right] E_{2n+1}. \end{aligned}$$

Atunci, din ecuațiile Frenet, avem

$$\chi_2^2 = \|\nabla_T N_1 + \chi_1 T\|^2 = \beta^2 - \beta \cos \alpha + \frac{1}{4} - (\sin \alpha)^2 (\cos \alpha - \beta)^2.$$

Astfel χ_2 este constantă, și, din ipoteză, se obține

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{1}{4} - (\sin \alpha)^2 = -\eta_1.$$

Deoarece $\chi_2 N_2 = \nabla_T N_1 + \chi_1 T$ și $\chi_3^2 = \|\nabla_T N_2 + \chi_2 N_1\|^2$, rezultă, după un calcul direct, că $\chi_3 = 0$.

Prin urmare, toate condițiile Teoremei 8.3.1 sunt verificate de γ și atunci γ este o curbă biarmonică și non-armonică.

Observația 8.3.9 În același fel ca mai sus se obține ușor că toate curbele biarmonice și non-armonice în \mathbb{H}_{2n+1} , cu a doua curbura constantă și cu câmpul vectorial unitar tangent, T , de forma

$$T(s) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [\cos(f_i(s)) E_{2i-1} + \sin(f_i(s)) E_{2i}] + \cos \alpha E_{2n+1},$$

unde f_i sunt funcții netede de lungimea de arc, astfel încât $f'_i = f'_j$, pentru orice $i, j = 1, \dots, n$, și $\alpha \in \mathbb{R}$, sunt date de Propoziția 8.3.8.

În final, avem

Propoziția 8.3.10 Fie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}$ curba definită de

$$\gamma(s) = (c_1 s, c_2 s, \dots, c_{2n+1} s)$$

cu $\sum_{j=1}^{2n+1} c_j^2 = 1$. Atunci γ este biarmonică dacă și numai dacă este armonică.

Demonstrație. Avem

$$T(s) = \gamma'(s) = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j E_j, \quad \|T\| = 1, \quad \nabla_T T = c_{2n+1} \sum_{i=1}^n (c_{2i} E_{2i-1} - c_{2i-1} E_{2i}).$$

Urmează că $\chi_1 = c_{2n+1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_{2i-1}^2 + c_{2i}^2)}$, și

$$N_1 = \sum_{i=1}^n \left[\frac{c_{2i}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{2j-1}^2 + c_{2j}^2)}} E_{2i-1} - \frac{c_{2i-1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{2j-1}^2 + c_{2j}^2)}} E_{2i} \right].$$

Se obține

$$\begin{aligned} \nabla_T N_1 + \chi_1 T &= \frac{\sum_{k=1}^n (c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2) - c_{2n+1}^2}{2} \\ &\cdot \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{c_{2i-1} c_{2n+1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{2j-1}^2 + c_{2j}^2)}} E_{2i-1} + \frac{c_{2i} c_{2n+1}}{\sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{2j-1}^2 + c_{2j}^2)}} E_{2i} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{2j-1}^2 + c_{2j}^2)} E_{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Aceasta înseamnă că

$$\chi_2 = \frac{\sum_{k=1}^n (c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2) - c_{2n+1}^2}{2}.$$

Astfel $\chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{1}{4}$. Dar, se obține că $\eta_1 = \frac{3}{4} - c_{2n+1}^2$, și din (8.3.7) avem că, dacă γ este biarmonică $\chi_1^2 + \chi_2^2 = -\eta_1 = -\frac{3}{4} + c_{2n+1}^2$. Astfel, dacă γ este biarmonică atunci $\chi_1 = 0$, și atunci γ este o curbă armonică.

Bibliografie

- [1] P.Baird, J.C.Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press Oxford, London Mathematical Society Monographs, New Series, Volume 29(2003), pp. xi, 520.
- [2] D.E.Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhäuser Boston, Progress in Mathematics, Volume 203(2002),pp. x, 260.
- [3] D.E.Blair, *Geometry of manifolds with structural group $\mathcal{U}(n) \times \mathcal{O}(s)$* , J. Diff. Geom., 4(1970), 155-167.
- [4] R.Caddeo, C.Oniciuc, P.Piu, *Explicit formulas for non-geodesic bi-harmonic curves of the Heisenberg group*, E-version, arXiv:math.DG 0311221 v1, (2003), pp. 16.
- [5] M.Capursi, *Some remarks on the product of two almost contact manifolds*, An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza", XXX (1984), 75-79.
- [6] K.Duggal, S.Ianuș, A.M.Pastore, *Maps interchanging f -structures and their harmonicity*, Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 67(1), (2001), 91-115.
- [7] J.Eells, J.H.Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math., 86(1964), 109-160.
- [8] J.Eells, L.Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Am.Math.Soc, Conf.Board Math.Sci. 50 (1983), pp 83.
- [9] S.Erdem, *Harmonicity of maps between (indefinite) metric f -manifolds and φ -pseudo harmonic morphisms*, preprint, 1999, pp. 25.
- [10] D.Fetcu, *Harmonic maps between framed φ -manifolds*, An. USAMV Iași, Tom XLVI, Vol.2(2003), Proceedings of the Annual Symposium of Mathematics Applied in Biology and Biophysics, May 30-31, 2003, 129-146.

- [11] D.Fetcu, *Maps between almost Kähler manifolds and framed φ -manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 9(2), 2004, 13-24.
- [12] D.Fetcu, *Harmonic maps on framed φ -manifolds*, Ann. Sti. Univ. "Al.I.Cuza", L(1)(2004), 199-217.
- [13] D.Fetcu, *Some properties of the hyper-framed manifolds*, An. USAMV Iași, Tom XLVII, Vol.2(2004), Proceedings of the Annual Symposium of Mathematics Applied in Biology and Biophysics, May 28-29, 2004, 151-163.
- [14] D.Fetcu, *φ -pseudo harmonic morphisms*, Ann. Sti. Univ. "Al.I.Cuza", L, s.I.a, Matematică, f.2, 2004, 327-346.
- [15] D.Fetcu, *Harmonic and φ -pluriharmonic maps between \mathcal{C} -manifolds*, va apare în "Italian Journal of Pure and Applied Mathematics".
- [16] D.Fetcu, *Biharmonic curves in the generalized Heisenberg group*, va apare în "Beiträge zur Algebra und Geometrie".
- [17] C.B.Figueroa, F.Mercuri, R.H.L.Pedrosa, *Invariant surfaces of the Heisenberg Groups*, Annali di Matematica pura ed applicata(iv), vol. CLXXVII(1999), 173-194.
- [18] Gh.Gheorghiev, V.Oproiu, *Varietăți diferentiabile finit și infinit dimensionale*(in Roumanian), vol.2, Ed. Academiei Române,(1979), pp. 294.
- [19] Gh.Gheorghiev, V.Oproiu, *Geometrie diferențială*(in Roumanian, Ed. Didactică și Pedagogică,(1977), pp. 304.
- [20] C.Gherghe, K.Kenmotsu, *Energy minimizer maps on \mathcal{C} -manifolds*, va apare în "Differential Geometry and Its Applications".
- [21] C.Gherghe, E.Boeckx, *Harmonic maps and cosymplectic manifolds*, va apare în "Journal of the Australian Mathematical Society".
- [22] S.I.Goldberg, K.Yano, *On normal globally framed f -manifold*, Tôhoku Math.Journ. 22(1970), 362-370.
- [23] N.J.Hitchin, *The self-duality on a Riemann surface*, Proc.London Math.Soc., 55(1987), 59-126.
- [24] S.Ianuș, A.M.Pastore, *Harmonic maps on contact metric manifold*, Ann.Math.Blaise Pascal, Vol2, No2(1995), 43-53.
- [25] N.Jayne, *Legendre Foliations on Contact Metric Manifolds*, Thesis, Massey University, 1992.

- [26] G.Y.Jiang, *2-harmonic maps and their first and second variational formulas*, Chinese Ann. Math. Ser. A7, 4(1986), 389-402.
- [27] T.Kashiwada, *A note on Hitchin's lemma*, Tensor(N.S.), 60(1998), 323-326.
- [28] Y.-Y.Kuo, *On almost contact 3-structure*, Tôhoku Math.J., 22(1970), 325-332.
- [29] E.Loubeau, *Pseudo harmonic morphisms*, Internat. J. Math., 8(1997), 943-957.
- [30] E.Loubeau, *Pluriharmonic morphisms*, Math. Scand., 84(1999), 165-178.
- [31] M.Martin, *Introducere în teoria curbilor și suprafețelor în spațiul euclidian n -dimensional*(in Roumanian), Universitatea București, 1979.
- [32] Y.Ohnita, *On pluriharmonicity of stable harmonic maps*, J. London Math. Soc., (2) 35, 1987, 563-568.
- [33] Y.Ohnita, S.Udagawa, *Complex analyticity of pluriharmonic maps and their constructions*, Lect. Notes Math., 1468(1991), 371-407.
- [34] Z.Olszak, *On contact metric manifolds*, Tôhoku Math. J., 31(1979), 247-253.
- [35] C.Oniciuc, *Tangency and Harmonicity Properties*(in Roumanian), Geometry Balkan Press, E-version, (2003), 87pp.
- [36] V.Oproiu, *Some remarks on the almost cocomplex connections*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 16(1971), 383-393.
- [37] V.Oproiu, *Harmonic maps between tangent bundles*, Rend. Sem. Mat., Univers. Politecn. Torino, Vol47, 1(1989), 47-55.
- [38] V.Oproiu, *On the harmonic sections of cotangent bundles*, Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 59(2), 1989, 177-184.
- [39] V.Oproiu, *A global invariant of the symplectic manifolds*, Ann. Sti. Univ "Al.I.Cuza", XXXVI, 1990, 393-396.
- [40] V.Oproiu, N.Papaghiuc, *Some results on harmonic sections of cotangent bundles*, Ann. Sti. Univ. "Al.I.Cuza" Iasi, 45(1999), 275-290.
- [41] V.Oproiu, *Some new geometric structures on the tangent bundle*, Publ. Math. Debrecen, 55/3-4(1999), 261-281.

- [42] T.Sakai, *Riemannian Geometry*, Am. Math. Soc., Translations of Mathematical Monographs, Vol. 149(1996), pp. xiii, 358.
- [43] C.Udriste, *Structures presque coquaternioniennes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumanie, 13(1969), 487-507.
- [44] S.Udagawa, *Pluriharmonic maps and minimal immersions of Kähler manifolds*, J. London Math. Soc. 37(1988), 375-384.
- [45] H.Urakawa, *Calculus of Variation and Harmonic Maps*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Translations of Mathematical Monographs, 1993, pp viii, 251.
- [46] K.Yano, S.Ishihara, *Tangent and Cotangent Bundles*, M.Dekker, New York, Pure and Applied Mathematics (1973), pp iv, 421.
- [47] T.J.Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford University Press, Oxford Science Publications, 1998, pp. 318.
- [48] Y.L.Xin, *Geometry of Harmonic Maps*, Birkhäuser Boston, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 1996, pp x, 241.