Differential Geometry - Dynamical Systems

*** **Monographs** # 6 ***

Michael Fahl

A Geometric Characterization of Semi-Symmetric Siegel Domains

Eine geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete

Ph.D. Thesis, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,

Rheinian Friedrich-Wilhelms University of Bonn, Bonn 2000

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

A Geometric Characterization of Semi-Symmetric Siegel Domains [Eine geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete] (German) * Monographs # 6

Differential Geometry - Dynamical Systems * ISSN 1454-511x * Monographs # 6
Editor-in-Chief Prof.Dr. Constantin Udrişte
Managing Editor Prof.Dr. Vladimir Balan
University Politehnica of Bucharest

A Geometric Characterization of Semi-Symmetric Siegel Domains [Eine geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete] (German), Michael Fahl.
Bucharest. Differential Geometry - Dynamical Systems *Monographs, 2006

Includes bibliographical references.

Eine geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

vorgelegt von

Michael Fahl

aus

Hübingen

Bonn 2000

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. U. Hamenstädt
(Mathematisches Institut der Universität Bonn)
2. Referent: Prof. Dr. J. Dorfmeister
(Mathematisches Institut der TU-München)

Tag der Promotion:

for

Sandra,

Elias and Luca

It is now more than five years ago that I read my work at last
...and it still makes fun

Many thanks to

Sepp

for all the beautiful maths I could learn from him

Inhaltsverzeichnis

EINLEITUNG mit historischen Bemerkungen

In dieser Arbeit geben wir eine positive Antwort auf eine Vermutung von D'Atri und Dorfmeister, die wie folgt lautet:

> *Die einzigen homogenen Siegelgebiete mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung (kurz n.p.h.B.) bzgl. der Bergmannmetrik sind die quasisymmetrischen Siegelgebiete.*

Diese Vermutung nennen wir im folgenden die Krümmungsvermutung.

> *Jede homogene Kählermannigfaltigkeit ist ein holomorphes Faserbündel über einem homogenen beschränkten Gebiet, wobei die Faser mit der induzierten Kählermetrik ein Produkt einer flachen homogenen Kählermannigfaltigkeit und einer kompakten, einfach zusammenhängenden, homogenen Kählermannigfaltigkeit ist.*

Diese als Fundamental-Vermutung, auf Gindikin und Vinberg zurückgehende, im Jahre 1967 bekannt gewordene Aussage wurde endgültig von Dorfmeister und Nakajima in [$\mathcal{DONA}$] bewiesen. Ein langer, über mehrere Etappen verlaufender Weg, führte zu diesem endgültigen Resultat, wie man aus [$\mathcal{DONA}$] entnehmen kann.

Die Richtigkeit der Fundamental-Vermutung hat zur Folge, daß jede homogene Kählermannigfaltigkeit (s. Definition 1.1.2) als komplexe Mannigfaltigkeit biholomorph zu einem Produkt ist, das von einem homogenen beschränkten Gebiet (kurz h.b.G., s. Definition 1.2.7), einem Raum $\mathbb{C}^n/\Gamma$ und einer kompakten, einfach zusammenhängenden, homogenen komplexen Mannigfaltigkeit gebildet wird (s. [$\mathcal{GR}$58]). Dabei ist Γ eine diskrete Untergruppe von Translationen des $\mathbb{C}^n$.
Es ist somit naheliegend, die auftretenden Faktoren getrennt voneinander zu betrachten.

Wang hat in [$\mathcal{WA}$54] die kompakten homogenen Mannigfaltigkeiten genau studiert. Auch das 8. Kapitel in [$\mathcal{BE}$] kann als Ausgangsbasis für ein Studium dieser Räume dienen. Es enthält die wichtigen Ergebnisse von Matsushima, Borel und Remmert, sowie nützliche Literaturhinweise.

Der Raum $\mathbb{C}^n/\Gamma$ ist ein komplexer Torus (s. z.B. [$\mathcal{KONO}II$] Beispiel 2.2, S.131).

Der dritte mögliche Faktor ist ein homogenes beschränktes Gebiet. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit einer Unterklasse dieser Räume, nämlich mit quasisymmetrischen Gebieten (s. Kapitel 7).

Bevor Details der Arbeit erläutert werden, stellen wir ein paar wichtige Ergebnisse vor, die in Zusammenhang mit homogenen beschränkten Gebieten D bzw. affin homogenen Siegelgebieten $\mathcal{S}$ (s. Kapitel 6) erzielt worden sind. Dieser Exkurs gibt einen größeren Über- und Einblick in die Thematik und ist primär für den interessierten Leser geschrieben.
Da die vorliegende Arbeit eine differentialgeometrische Arbeit ist, liegt unser Betrachtungsschwerpunkt natürlich bei denjenigen Resultaten, die von geometrischer Natur sind.

Der historische Exkurs beginnt damit, die errungenen mathematischen Erkenntnisse über homogene beschränkte Gebiete, mit zunehmender komplexer Dimension der Gebiete zu betrachten. Zwei homogene beschränkte Gebiete nennt man äquivalent, wenn sie biholomorph zueinander sind.

Ist die Dimension Eins, so sei an das folgende bedeutende Resultat (siehe z.B. [$\mathcal{RE}$] S. 63) erinnert:

Riemannscher Abbildungssatz

> *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \neq \mathbb{C}$ in der Ebene $\mathbb{C}$ ist biholomorph auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ abbildbar.*

Diese Gebiete sind also alle homogen, und außer $\mathbb{E}$ existiert, bis auf Äquivalenz, kein weiteres einfach zusammenhängendes, homogenes beschränktes Gebiet.

Für die Dimension Zwei stellte Poincare [$\mathcal{PC}$07] fest, daß es mindestens zwei homogene beschränkte Gebiete gibt, nämlich die Sphäre und den Bizylinder. Dabei entspricht der Bizylinder der Menge $\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | sup\{|z_1|, |z_2|\} < 1\}$.
Diese beiden Gebiete sind nicht zueinander äquivalent. Cartan zeigte aber in [$\mathcal{CA}$35], daß jedes homogene beschränkte Gebiet der Dimension Zwei biholomorph zu einem dieser beiden ist.

Bis auf Äquivalenz klassifizierte Cartan in [$\mathcal{CA}$35] alle homogenen beschränkten Gebiete der Dimension Drei, indem er zeigte, daß sie alle symmetrisch (s. Definition 7.1.1) sind.

Für h.b.G. mit Dimensionen, die echt größer als Drei sind, gibt es keine „einfache" Antwort mehr.

E. Cartan definierte, untersuchte und klassifizierte symmetrische beschränkte Gebiete. Diese Gebiete sind bezüglich der Gruppe ihrer holomorphen Automorphismen homogen.
Eine sehr wichtige Frage, deren Antwort ggf. zeigt, ob bei größer werdender Dimension ein Verlassen der Kategorie der symmetrischen Räume überhaupt

möglich ist, stellte Cartan 1935:

Ist jedes homogene beschränkte Gebiet symmetrisch?

Die Antwort auf diese Frage ist mittlerweile wohlbekannt und lautet: NEIN!

Piatetsky-Shapiro [$\mathcal{PS}$59] gab 1957 das erste und niedrigdimensionalste nicht symmetrische, aber homogene Beispiel in komplexer Dimension Vier an.

Borel [$\mathcal{BO}$54] und Koszul [$\mathcal{KZ}$55] zeigten: Wenn eine halbeinfache Lie-Gruppe transitiver Automorphismen für ein beschränktes Gebiet existiert, dann ist das Gebiet symmetrisch. Hano [$\mathcal{HA}$57] verbesserte dieses Resultat noch, indem er „halbeinfach" durch „unimodular" ersetzte. Für eine Definition einer unimodularen Lie-Gruppe verweisen wir z.B. auf [$\mathcal{KN}$] S.467.
Später stellte man fest und heute wissen wir, daß die symmetrischen beschränkten Gebiete den hermitesch symmetrischen Räumen entsprechen und daher eher eine Besonderheit sind, also eine Ausnahme darstellen. Für eine Liste und somit Klassifikation aller symmetrischen Räume sei auf das Standardwerk von Helgason [$\mathcal{HE}$], auf [$\mathcal{BE}$] oder [$\mathcal{EDM}$] verwiesen (s. insbesondere Tabelle 4, S.139).

Bis zur Dimension Sechs existiert immer eine endliche Anzahl nicht äquivalenter, homogener beschränkter Gebiete. Aber schon für Dimensionen größer gleich Sieben existiert ein Kontinuum von nicht äquivalenten, homogenen beschränkten Gebieten (vgl. [$\mathcal{PS}$] S.220).

Für die Untersuchung h.b.G. entdeckte Piatetsky-Shapiro die dazu biholomorphen, affin homogenen unbeschränkten Siegelgebiete (s. Abschnitt 6.2) und führte sie somit ein. Das der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ via der Cayleyabbildung zugeordnete Siegelgebiet ist bekanntlich die obere Halbebene. Siegelgebiete kann man als verallgemeinerte, obere Halbebenen mit entsprechenden verallgemeinerten Cayleyabbildungen ansehen (s. auch [$\mathcal{DO}79a$] S.77 ff.). Diese neuen Studienobjekte haben eine „einfache" Struktur und ihre Konstruierbarkeit ist ein bedeutender Zugewinn bei geometrischen Untersuchungen.
Der Übergang von einem h.b.G. D zu dem dazugehörigen Siegelgebiet $\mathcal{S}$ wird durch normale J-Algebren (s. Definition 6.3.1 u. Abschnitt 6.5) geschaffen. Diese Zusammenhänge wurden das erste Mal in Buchform von Piatetsky-Shapiro selbst in [$\mathcal{PS}$] dargestellt.
Es existiert bereits eine sehr weit entwickelte Theorie für homogene Siegelgebiete. Insbesondere ist die Lie-Algebrenstruktur der Automorphismen eines Siegelgebiets $\mathcal{S}$, d.h. der biholomorphen Selbstabbildungen von $\mathcal{S}$, von vielen Mathematikern studiert und sehr detailliert beschrieben worden, wie man z.B. aus [$\mathcal{MU}$], [$\mathcal{KA}$67], [$\mathcal{DO}79a$], [$\mathcal{SA}$] entnehmen kann.
Eine Untergruppe der Automorphismengruppe eines Siegelgebiets, die transitiv

operiert, ist die Gruppe der affinen Automorphismen. Alle Elemente daraus lassen sich realisieren und durch geeignete Matrizen darstellen (s. dazu [$\mathcal{PS}$] Kapitel I, [$\mathcal{MU}$] u. [$\mathcal{DO}79b$] S.7).

Trotz der zahlreichen Arbeiten über Siegelgebiete existieren darunter nur relativ wenige geometrischen Ursprungs.

Siegelgebiete treten nicht nur in der Geometrie auf, sondern z.B. auch in der komplexen Analysis. Das sogenannte Levi-Problem, d.h. Holomorphiebereiche durch geometrische Eigenschaften des Randes zu charakterisieren, ist für die Siegel-I-Gebiete (Tubengebiete) gelöst. Sie sind Holomorphiegebiete genau dann, wenn sie pseudokonvex bzw. geometrisch konvex sind (s. [$\mathcal{KR}92$] Abschnitt 3.5.2). Die letzten beiden Konvexitätsbegriffe sind für Tubengebiete äquivalent.

„Its very likely, that most [of these] domains have negative curvature“

lies Kobayashi in [$\mathcal{KO}59$] verlauten und bezog sich dabei auf homogene beschränkte Gebiete. Man kennt Beispiele von Siegelgebieten (s. Satz A.2.1), die bzgl. jeder zulässigen Metrik (s. Anhang A.2) positive Schnittkrümmungsrichtungen haben. K.H.Look (Lu Chi-Keng) und Hsu I-Chau (Xu Yi Chao) (Acta Math. Senica 11, 1961) gaben das erste Beispiel für ein beschränktes homogenes Gebiet mit positiver holomorpher Schnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik.
Es gibt einige Arbeiten, die sich mit den Krümmungseigenschaften von Siegelgebieten beschäftigen. Oft wird gezeigt, daß Siegelgebiete mit bestimmten Krümmungseigenschaften existieren. Dabei werden die Rechnungen häufig in Termen einer normalen J-Algebra durchgeführt (s. z.B. [$\mathcal{DR}96$], [$\mathcal{DA}81$] usw.).

Innerhalb der homogenen Siegelgebiete sind die zu den symmetrischen beschränkten Gebieten assoziierten symmetrischen Siegelgebiete enthalten. Eine größere, die symmetrischen Gebiete umfassende, Klasse bilden die 1976 von Satake algebraisch definierten quasisymmetrischen Siegelgebiete (s. Definition 7.1.3).
Aufgrund ihrer Stellung zwischen den symmetrischen und den allgemeinen homogenen Siegelgebieten bilden quasisymmetrische Siegelgebiete einen natürlichen Ausgangspunkt für Untersuchungen von homogenen Siegelgebieten. Es ist m.a.W. sinnvoll zu versuchen, zunächst Fragen bzw. Problemstellungen erst für diese Gebiete zu beantworten, bevor man zu beliebigen homogenen Siegelgebieten übergeht.
Die irreduziblen (s. Abschnitt 6.6) quasisymmetrischen Siegelgebiete (kurz IQS) wurden mit verschiedenen Methoden von Dorfmeister [$\mathcal{DO}79a$], Satake [$\mathcal{SA}76$] und Takeuchi [$\mathcal{TA}75$] klassifiziert.

Es gelang D'Atri und Miatello zu zeigen, daß die einzigen homogenen Siegelgebiete mit nicht-positiver Schnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik die sym-

metrischen Gebiete sind.
D'Atri und Miatello stellen am Ende ihrer Arbeit [$\mathcal{DAMI}$83] die Frage:

> *„Wie charakterisiert man diejenigen homogenen Siegelgebiete, die nicht-positive holomorphe Schnittkrümmung (kurz n.p.h.S.) bzgl. der Bergmannmetrik haben?“*

Es ist nicht bekannt, wie man solche homogenen Siegelgebiete klassifiziert.
Die quasisymmetrischen Gebiete gehören zu dieser Klasse, wie Zelow in seiner Dissertation zeigte (s. [$\mathcal{ZE}$77]). Zudem gab er eine Formel für die holomorphe Bischnittkrümmung der *IQS* an, die als ZELOW-FORMEL bekannt wurde. Diese Resultate erzielte er unter Ausnutzung der Klassifikation der *IQS*. Zelow zeigte in [$\mathcal{ZE}$79*b*], daß quasisymmetrische Siegelgebiete sogar echt negative holomorphe Schnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik besitzen.
Quasisymmetrische Siegelgebiete sind nicht die einzigen Gebiete, die nicht-positive holomorphe Schnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik besitzen. Es existieren auch nicht-quasisymmetrische Gebiete mit dieser Eigenschaft (s. Theorem 6, [$\mathcal{DA}$79]). Das Vorzeichen der holomorphen Schnittkrümmung ist demzufolge kein Charakteristikum für quasisymmetrische Gebiete.

D'Atri und Dorfmeister zeigten, daß jedes quasisymmetrische Siegelgebiet sogar nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik hat. Der von ihnen dazu gegebene Beweis und die von ihnen angegebene Zelow-Formel werden klassifikationsfrei erbracht. Dieses Resultat ist eine Verschärfung des Resultats von Zelow.
Im kompakten Fall, d.h. wenn man eine kompakte Kählermannigfaltigkeit mit nicht-negativer holomorpher Bischnittkrümmung und positiver Riccikrümmung bzgl. der Bergmannmetrik betrachtet, ist eine solche Mannigfaltigkeit isometrisch zu einem hermitesch symmetrischen Raum, wie Mok und Zhong in [$\mathcal{MOZH}$86] zeigten.

Auf der Suche nach Charakterisierungen der quasisymmetrischen Gebiete muß festgestellt werden, daß fast alle „sinnvollen“ Bedingungen zu symmetrischen Gebieten führen (s. dazu [$\mathcal{DDZ}$85] oder auch Abschnitt 7.3, Satz 7.3.1).
D'Atri und Miatello charakterisierten diejenigen normalen J-Algebren, die zu quasisymmetrischen Gebieten gehören. Das von ihnen gefundene Kriterium geben wir etwas später, in der noch folgenden Beschreibung der Arbeit, genauer an.
Die bisher einzige geometrische Charakterisierung der *IQS* wurde von D'Atri und Dorfmeister in [$\mathcal{DADO}$88] gegeben. Sie zeigten, daß nur bei den *IQS* die Bergmannmetrik eine symmetrische Metrik auf dem, in dem Gebiet enthaltenen Tubengebiet induziert (s. Satz 7.2.2).

Von nicht zu unterschätzender Bedeutung für diese Arbeit ist der Begriff der Jordan-Algebra (s. Definition 2.2.1 und http://math1.uibk.ac.at/jordan). Jordan-Algebren wurden vermutlich zuerst 1934 in dem Artikel: *On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism,* [$\mathcal{JNW}$34] von Pascual Jordan, John von Neumann und Eugene Wigner benutzt. Dies betrifft zumindest die erste schriftliche Veröffentlichung (s. den sehr gut lesbaren Artikel von McCrimmon [$\mathcal{MC}$78]).
Die Motivation, eine solche algebraische Struktur zu suchen und zu untersuchen, kam aus der Physik, hier insbesondere aus der Quantenmechanik (s. dafür auch (2.2.γ)).
Die besondere Rolle dieser Algebren für die homogenen beschränkten Gebiete läßt sich wie folgt begründen (s. auch Kapitel 3 und 6):
Jedes homogene beschränkte Gebiet kann mit einem ihm entsprechenden affin homogenen Siegelgebiet identifiziert werden. Homogene Siegelgebiete werden mit homogenen regulären Kegeln konstruiert (s. Kapitel 6). Genau an der Stelle, an der diese Kegel auftauchen, kommen auch Jordan-Algebren zum Vorschein.
Eine Jordan-Algebra ist eine nicht-assoziative Algebra, deren Elemente bestimmte zusätzliche Bedingungen erfüllen. Diesen Jordan-Algebren kann in kanonischer Weise ein sogenanntes Jordan-Tripel-System (kurz *JTS*, s. für eine Definition und Weiteres z.B. [$\mathcal{SA}$] S.21, aber auch die Bücher von Loos über symmetrische Räume) zugeordnet werden. Wenn dieses *JTS* ein neutrales Element besitzt, so besteht die Möglichkeit, daraus eine Jordan-Algebra zu erhalten; es gilt dann also auch die Umkehrung.
Nun gibt es ein bemerkenswertes Theorem von Koecher und Vinberg (s. [$\mathcal{SA}$] S.33), das diese beiden rein algebraischen Objekte mit geometrischen zusammenbringt, nämlich mit homogenen selbstdualen Kegeln (s. Abschnitt 2.1).
Zu jedem homogenen selbstdualen Kegel existiert eine assoziierte formal-reelle Jordan-Algebra (s. Definition 2.2.1); die Lie-Algebra der Automorphismen eines solchen Kegels hängt mit dem *JTS* zusammen (s. dazu die angegebene Literatur). Aus einer vorgegebenen formal-reellen Jordan-Algebra kann eindeutig ein homogener selbstdualer Kegel rekonstruiert werden.
Die formal-reellen Jordan-Algebren wurden 1934 von Jordan, von Neumann und Wigner klassifiziert und weil diese, wie oben beschrieben, mit den homogenen selbstdualen Kegeln eineindeutig einhergehen, erhalten wir auf diesem Wege eine Klassifikation der homogenen selbstdualen Kegel.
Allgemeineren Kegeln, wie den von uns betrachteten homogenen regulären Kegeln, kann man ebenfalls eine Algebrenstruktur zuordnen. Dies wurde von Dorfmeister in [$\mathcal{DO}$79c],Vinberg in [$\mathcal{VI}$60b] oder auch Rothaus und Koecher durchgeführt bzw. studiert. Der von Dorfmeister beschrittene Weg ist für unsere Arbeit am wichtigsten (s. Kapitel 3).

In dieser Arbeit wird die Richtigkeit der am Anfang genannten Krümmungsvermutung von D'Atri und Dorfmeister gezeigt, wodurch eine neue geometrische Charakterisierung der quasisymmetrischen Siegelgebiete möglich ist.

Gliederung der Arbeit und detaillierte Beschreibung

Grundsätzlich führen wir die zu der komplexen Geometrie gehörenden Begriffe ein, wobei die Bezeichnungen der reellen Differentialgeometrie beim Leser vorausgesetzt werden.

Diesem Grundsatz folgend, wird im ersten Kapitel die Definition einer komplexen Struktur J, einer Kählermetrik usw. angegeben. Des weiteren beschreiben wir, wie man die Bergmannmetrik auf einem beschränkten Gebiet konstruiert und welche wichtigen Eigenschaften diese, insbesondere im homogenen Fall, aufweist.

Im zweiten Kapitel werden homogene reguläre Kegel $\Omega \subset V$ und damit verknüpfte Begriffe definiert, wobei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum ist. Zudem geben wir Beispiele für homogene reguläre Kegel an, von denen wohlbekannt ist, daß sie mit formal-reellen Jordan-Algebren assoziiert sind, deren Definition in Abschnitt 2.2 erfolgt. Von den Beispielen, die diesen Zusammenhang nicht aufweisen, sei der von mir sogenannte „Dorfmeister-Kegel“ als besonders gewinnbringend zu studierendes Objekt hervorgehoben. Ein Kegel dieser Art begegnete mir das erste Mal in der Arbeit [$\mathcal{DO}79a$].
Für die Arbeit wichtige Tatsachen über Jordan-Algebren enthält der Abschnitt 2.2. Zur Illustration werden Beispiele von Jordan-Algebren wiedergegeben. Die Existenz einer positiv-definiten assoziativen Bilinearform σ (s. Definition 2.2.2) und eines Einselementes ist für eine reelle Jordan-Algebra eine Kennzeichnung dafür, daß sie formal-reell ist.

Von fundamentaler Bedeutung für den Beweis der Krümmungsvermutung erwies sich die von Dorfmeister zu jedem homogenen regulären Kegel Ω assoziierte Algebra $\mathfrak{A}$ mit einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ (s. Definition 3.1.7). Gleichfalls kann aus der Vorgabe von $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ der zugehörige homogene reguläre Kegel rekonstruiert werden (s. Abschnitt 3.1 VI.). Jeder homogene reguläre Kegel ist also von einem gewissen q-Typ, wobei q eine natürliche Zahl ist. Es gilt q=1 genau dann, wenn $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist.
In Abschnitt 3.1 wird erklärt, auf welchem Weg die Algebra $\mathfrak{A}$ gewonnen werden kann. Der gesamte Abschnitt dient dazu, Satz 3.1.1 von Dorfmeister zu erläutern. Ausgehend von der Kegelinvariante $\boldsymbol{\iota}(\Omega; .)$ (s. (3.1.a)), die von Koecher definiert wurde, legen wir dar, wie man durch Differenzieren einer Funktion η aus einer bestimmten Klasse (s. (3.1.A1-A5)) eine positiv-definite assoziative Bilinearform σ (s. (3.1.d)) und eine Produktstruktur $\circ$ (s. (3.1.g)) auf V erhält. V mit diesem

Produkt $\circ$ ist die gesuchte Algebra $\mathfrak{A}$.
Schließlich wird die Definition einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung einer Algebra $\mathfrak{A}$ gegeben und skizziert, wie aus der Vorgabe von $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ der zugehörige Kegel resultiert.
Wie und welches η mit der Bergmannmetrik des Siegelgebiets $\mathcal{S}$ zusammenhängt, steht im Interessenmittelpunkt des letzten Abschnitts von Kapitel 3. Hier zitieren wir die wichtigen Resultate von Gindikin und Dorfmeister. Das Transformationsverhalten von η bzgl. der linearen affinen Automorphismen von $\mathcal{S}$ liefert das entscheidende Kriterium. Insbesondere wird auch die Algebra $\mathfrak{A}$ analysiert und man erhält Darstellungen, die im 11. Kapitel wieder benötigt werden. Außerdem werden der Vinberg-Kern $\mathfrak{X}$ (s. (3.2.c)) und die Menge $\mathfrak{S}$ (s. (3.2.d)) definiert, und es erfolgt eine Angabe darüber, wie diese, für den Fall, daß η zur Bergmannmetrik gehört, mit der Algebra $\mathfrak{A}$ zusammenhängen.
Ein Idempotent f ist ein Element $0 \neq f \in \mathfrak{A}$ mit $f^2 = f$, und ein vollständiges Orthogonalsystem von Idempotenten (kurz *VOS*, s. Definition 3.2.6) definiert man unter der Zuhilfenahme von $\mathfrak{X}$. Die möglichen Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ nach bestimmten verschiedenen *VOS*'s und die Eigenschaften der Eigenräume, die man in Anlehnung an die Begriffsbildungen bei Jordan-Algebren auch Peirce-Räume (s. Definition 3.2.8) nennt, sind besonders wichtige Hilfsmittel für uns. Zu einigen Begriffen werden Beispiele zur Verdeutlichung angegeben.

Die Koordinations- bzw. Struktursätze klassifizieren die formal-reellen Jordan-Algebren und geben Auskunft darüber, wie sich die Peirce-Räume nach einem „möglichen“ *VOS* bzgl. der Multiplikation verhalten, falls deren Produkt Null ist. Diese Sätze des 4. Kapitels stellen einen Höhepunkt einer umfassenden Theorie dar und sind für uns wichtige Werkzeuge beim Beweis der Krümmungsvermutung.

Abschnitt 5.1 ist dem Dorfmeister Kegel Ω_D für den q=2 Fall gewidmet. Für diesen Kegel wird gezeigt, daß die oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Diagonalelementen einfach transitiv auf Ω_D operieren. Diese Rechnungen erwiesen sich bei der Berechnung der zu Ω_D assoziierten Algebra $\mathfrak{A}$ als nützlich.
Das Kapitel 5 beschließen wir mit einigen Ausführungen zu einem Kegel vom q=3-Typ. Soweit mir bekannt, existiert ein solches Beispiel bisher noch nicht in der Literatur. Auf die Angabe eines allgemeinen Konstruktionsverfahren eines Kegels von beliebigem q-Typ wird verzichtet.

Die eigentlichen Objekte, von denen eine Unterklasse, nämlich die affin homogenen Siegelgebiete, genauer untersucht wird, werden im sechsten Kapitel eingeführt.
Doch zuerst gehen wir in Abschnitt 6.1 kurz auf transitiv bzw. einfach transitiv operierende Untergruppen in der Isometriegruppe eines vorgegebenen Siegelgebiets $\mathcal{S}$ ein. Eine in diesem Zusammenhang interessante Beziehung zwischen möglichen, nicht isomorphen, einfach transitiv operierenden Untergruppen in der

Isometriegruppe weist Satz 6.5.3 auf.
Man unterscheidet zwischen Siegel-I, II, III-Gebieten; dies erklären wir in Abschnitt 6.2. Hier werden die verschiedenen Arten von Siegelgebieten definiert, wodurch der Zusammenhang mit den Kegeln klar erkennbar wird. Die affinen Automorphismen eines Siegel-II-Gebiets sind alle beschreibbar, und wir geben sowohl weitere Eigenschaften als auch Beispiele für diese Gebiete an.
Siegelgebiete der dritten Art sind für uns als Realisierungen von Siegel-II-Gebieten von Bedeutung; dies wird ausführlich in Abschnitt 10.1 dargelegt.
Der Übergang von einem homogenen beschränkten Gebiet zu seinem dazugehörigen Siegelgebiet wird durch die infinitesimale Struktur, genauer durch eine normale J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$ geschaffen, die wir in Abschnitt 6.3 definieren. Diese spezielle, zu einer einfach transitiv operierenden Gruppe gehörende Lie-Algebra besitzt eine charakteristische Wurzelraumzerlegung und weitere Zerlegungen; dies ist in Abschnitt 6.4 zu finden. Die Wurzelraumzerlegung motiviert die Definition der Räume 1. und 2. Art (s. Definition 6.4.2).
Eine vorgegebene normale J-Algebra in Abschnitt 6.5 gestattet die Rekonstruktion eines zugehörigen affin homogenen Siegelgebietes. Dies ermöglicht unter anderem, daß man an der infinitesimalen Struktur der normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ die zum Tubengebiet bzw. Kegel in $\mathfrak{s}$ gehörenden Anteile direkt erkennt und somit entsprechend zuordnen kann (s. Definition 6.5.2). Den Kegelanteil bezeichnen wir mit $J\mathfrak{L}$.
Siegelgebiete sind im allgemeinen direkte Produkte irreduzibler Gebiete. Die Reduzibilität des Siegelgebiets korrespondiert mit der analogen Eigenschaft des zu dem Gebiet gehörenden Kegels. Diese Zusammenhänge zu klären, ist die Aufgabe des Abschnitts 6.6, wobei auch das zuvor in Abschnitt 6.5 beschriebene Rekonstruktionsverfahren eines Siegelgebiets aus einer normalen J-Algebra eine entscheidende Rolle spielt.

Eine Unterklasse der homogenen Siegelgebiete bilden die quasisymmetrischen Siegelgebiete. Sie können, wie schon erläutert, als Schnittstelle zwischen symmetrischen und beliebigen Siegelgebieten angesehen werden. Um quasisymmetrische Siegelgebiete in unserem Kontext definieren zu können, sind einige Vorbereitungen nötig, die in engem Zusammenhang mit den Begriffsbildungen des 3. Kapitels stehen. Alle dafür notwendigen Vorbereitungen beinhaltet der Anfang des Abschnitts 7.1.
Anschließend werden wichtige, für homogene quasisymmetrische Siegelgebiete äquivalente Charakterisierungen angegeben. Von diesen wird vor allem die Aussage genutzt, daß die homogenen quasisymmetrischen Siegelgebiete in eineindeutiger Beziehung zu den Jordan-Algebren stehen, also vom q=1-Typ sind.
Das Klassifikationsergebnis der *IQS* wird nachfolgend in der Tabelle 1 (S.62) dargestellt; davon gesondert werden die darin enthaltenen symmetrischen Siegelgebiete in der Tabelle 2 (S.63) aufgelistet.
Die bisher erzielten Charakterisierungen der *IQS* bilden den Inhalt des Abschnitts

7.2. Dies sind Ergebnisse von D'Atri, Miatello und Dorfmeister, die auch schon zuvor erwähnt wurden. Die von D'Atri und Miatello stammende Kennzeichnung besagt, daß die *IQS* genau diejenigen homogenen Siegelgebiete sind, zu denen eine normale J-Algebra gehört, deren Räume 1. und 2. Art jeweils die gleiche Dimension haben. Dieses Resultat wird ebenfalls maßgebliche Verwendung in der Arbeit finden.
Des weiteren werden Gleichungen angegeben, die es ermöglichen, zu einem fest vorgegebenen *IQS* eine dazugehörige normale J-Algebra anzugeben. Damit lassen sich die *IQS* der Tabelle 1 mit den ihnen entsprechenden normalen J-Algebren in eine bijektive Beziehung setzen. Somit kann man leicht beurteilen, ob eine beliebige vorgegebene normale J-Algebra $\mathfrak{s}$ zu einem symmetrischen Siegelgebiet gehört oder nicht.
Es existieren viele Charakterisierungen für die symmetrischen Siegelgebiete. Einen Überblick darüber bietet Abschnitt 7.3.

Im achten Kapitel werden weitere notwendige Werkzeuge für den Beweis der Krümmungsvermutung in die Arbeit eingefügt. So werden zuerst in Abschnitt 8.1 die verschiedenen Krümmungsbegriffe, die in der komplexen Differentialgeometrie zur Verfügung stehen, eingeführt und erklärt. Weiter geben wir ein wichtiges Resultat wieder, das die holomorphe Bischnittkrümmung einer komplexen Untermannigfaltigkeit mit der des Außenraumes in Beziehung setzt. Dabei stellt sich heraus, daß die holomorphe Bischnittkrümmung einer komplexen Untermannigfaltigkeit bzgl. der induzierten Metrik kleiner wird als die des Außenraumes.
Da die Siegelgebiete mit der Bergmannmetrik versehen werden und diese bekanntlich, bis auf eine Konstante, die einzige Kähler-Einstein Metrik auf diesen Räumen ist, wird der Zusammenhang zwischen der Einsform ω auf einer entsprechenden normalen J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$ und der Bergmannmetrik in Abschnitt 8.2 erläutert. Die Einsteinkoeffizienten, die den Werten von ω auf gewissen vorgegebenen Vektoren aus $\mathfrak{s}$ entsprechen, werden definiert.
Betrachtet man ein homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$, so ist dieses mit einem bestimmten homogenen regulären Kegel Ω konstruiert. Dem Kegel Ω kann man einerseits eine Algebra $\mathfrak{A}$ zuordnen, andererseits entspricht einem solchen Kegel ein Anteil $J\mathfrak{L}$ in einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$, die zum Siegelgebiet $\mathcal{S}$ gehört, d.h. $\mathfrak{s}$ gehört zu einer Lie-Untergruppe der Isometriegruppe von $\mathcal{S}$, die auf $\mathcal{S}$ einfach transitiv operiert. Die eineindeutige Beziehung der Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{L}$ wird in Abschnitt 8.3 studiert. Dabei werden die Peirce-Räume von $\mathfrak{A}$ bzgl. eines speziellen *VOS* mit den Wurzelräumen, die zu $\mathfrak{L}$ gehören, in eine bzgl. der Indizes bijektive Beziehung gesetzt. Die sich dabei entsprechenden Räume haben sogar die gleiche reelle Dimension. Bei dieser Identifizierung muß besonders darauf geachtet werden, daß man beim Übergang von der Algebra $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{L}$ und umgekehrt die jeweilige Indexumkehr beachtet.
Ein für uns wichtiges Hilfsmittel zur Veranschaulichung stellt das einer Algebra $\mathfrak{A}$ bzw. dem entsprechenden Siegelgebiet $\mathcal{S}$ zugeordnete Arbeitsdiagramm (oder

auch nur Diagramm, s. (8.3.g)) dar. Zu einem solchen Diagramm gehören auch Räume U_i, die das Pendant zu den Räumen 1. Art auf der normalen J-Algebrenseite sind.
In Abschnitt 8.4 werden die Arbeitsdiagramme mit der Frage nach der Irreduzibilität von $\mathcal{S}$ für den q=2 Fall in Verbindung gesetzt. Es wird gezeigt und erklärt, wie man einem Diagramm „ansieht", ob $\mathcal{S}$ irreduzibel ist oder nicht. Falls $\mathcal{S}$ reduzibel ist, so gehört dazu ein Diagramm, das wir „aufspaltend" nennen.

Unmittelbar wichtige Aussagen für den Beweis der Krümmungsvermutung beinhaltet das 9. Kapitel. Wir definieren in Abschnitt 9.1 zuerst den q-Typ eines Siegelgebiets $\mathcal{S}$, was durch die entsprechende Eigenschaft der zugeordneten Algebra $\mathfrak{A}$ möglich ist. Die homogenen Siegelgebiete vom q=1-Typ sind quasisymmetrische Siegelgebiete.
Die Größen der reellen Dimensionen der Wurzelräume einer zu $\mathcal{S}$ gehörenden normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ können nicht völlig willkürlich gewählt werden, sondern sie unterliegen einer gewissen Ordnung, was präzisiert wird. Dieses Strukturresultat geht auf Piatetsky-Shapiro zurück; der Grund dafür ist in der Injektivität der adjungierten Abbildung zwischen verschiedenen Wurzelräumen zu sehen. Dazu müssen allerdings entsprechende Wurzelräume a priori von Null verschiedene Dimensionen aufweisen.
Insbesondere wird nun die Algebra $\mathfrak{A}$ für den q=2 Fall studiert und gezeigt, daß einige Räume 2. Art gleiche Dimensionen besitzen müssen, was aus entsprechenden Darstellungen resultiert.
Tsuji erarbeitete bei seinen Untersuchungen zur Krümmungsvermutung notwendige Kriterien in Termen der Einsteinkoeffizienten, die ein Siegelgebiet erfüllen muß, damit es nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung hat. Diese Resultate und weitere Ergebnisse von Tsuji bilden den Inhalt von Abschnitt 9.2.
In Abschnitt 9.3 verallgemeinern wir ein Lemma von Tsuji, was für die zu betrachtenden q=2-Typ Fälle von Bedeutung sein wird. Diese scheinbar einfache Verallgemeinerung hat zweifelsohne eine große Tragweite. Zudem geben wir an, welche Bedeutung die Dimensionen der Räume 1. Art für gewisse normale J-Algebren und Ungleichungen haben.

Für uns sehr wichtige, von Dorfmeister erzielte Ergebnisse schließen sich in Abschnitt 10.1 an. Dorfmeister zeigte, daß man jedes Siegel-II-Gebiet auf viele verschiedene Weisen als Siegel-III-Gebiet realisieren kann. Dabei hängt jede dieser Realisierungen von einem zuvor zu wählenden Idempotent $f \in \mathfrak{S}$ ab. Diese Resultate inklusive Beweisen werden in Abschnitt 10.1 wiedergegeben.
An den Anfang des Abschnitts 10.2 wird ein weiteres Ergebnis von Dorfmeister gestellt, welches besagt, daß die Faserräume einer Siegel-III-Realisierung via f genau dann quasisymmetrisch sind, wenn der in $\mathfrak{A}$ der Faser zugeordnete Anteil $\mathfrak{A}_0(f)$ eine Jordan-Algebra ist. Wir zeigen dann, daß der Bergmannkern der Faser einer Siegel-III-Realisierung bzgl. eines Idempotents f der Einschränkung

des Bergmannkerns des Totalraumes auf die Faser entspricht. Daraus resultiert, daß die Bergmannmetrik der Faser der von der Bergmannmetrik des Totalraumes induzierten Metrik entspricht.
Die Realisierung als Siegel-III-Gebiet und die Ergebnisse des Abschnitts 10.2 ermöglichen eine induktive Vorgehensweise beim Beweis der Krümmungsvermutung, weshalb das induktive Argument ausführlich in (10.2.α) erklärt wird.
Das Verhalten der zu den Räumen 1. Art einer normalen J-Algebra korrespondierenden Räume U_i im Diagramm von $\mathfrak{A}$, wird in Abschnitt 10.3 für die verschiedenen möglichen q-Typen und Argumente studiert. Dabei stellt man fest, daß diese keine größeren „Probleme" für die im 12. Kapitel verwendeten Argumentationen darstellen. Dies vorab zu erklären, ist die Aufgabe des Abschnitts 10.3.
Anschließend wird in Abschnitt 10.4 für eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ erklärt, daß ein mit $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ bezeichneter reeller Untervektorraum von $\mathfrak{A}$ die Summe irreduzibler reeller Darstellungsräume einer entsprechenden formal-reellen Jordan-Algebra ist.

Kapitel 11 steht in direktem Zusammenhang zum Beweis des Hauptresultates, denn die hier betrachteten Fälle, d.h. verschiedene Diagramme, sind diejenigen, zu denen wir durch den Beweis der Krümmungsvermutung „automatisch" geleitet werden. Die zu den speziellen Diagrammen vom q=2-Typ, d.h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \oplus \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{A}^1$, gehörenden Siegelgebiete werden im voraus bzgl. ihrer holomorphen Bischnittkrümmung untersucht. Dabei sind $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}^1$ formal-reelle Jordan-Algebren, und $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist ein reeller Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}^1$.
Mit der Analyse dieser Diagramme wird in Abschnitt 11.1 begonnen, indem gezeigt wird, daß man für einen speziellen q=2-Fall, nämlich $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$, eine bestimmte Anzahl von Elementen aus verschiedenen Wurzelräumen einer zugehörigen normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ wählen kann, für die alle paarweise gebildeten Lie-Klammerprodukte verschwinden. Folglich ist unser verallgemeinertes Lemma von Tsuji aus Abschnitt 9.3 anwendbar und es liefert für diesen Spezialfall ein neues notwendiges Kriterium für n.p.h.B..
Als nächstes wird gezeigt, daß der in Abschnitt 11.1 studierte Spezialfall tatsächlich nur dann n.p.h.B. hat, wenn er schon vom q=1-Typ, demzufolge quasisymmetrisch ist. Dafür wird zuerst in Abschnitt 11.2 gezeigt, daß in der vorgegebenen Situation gewisse Räume 1. Art mit bestimmten Indizes die gleiche Dimension haben. Der nächste Schritt besteht dann in der Untersuchung des Spezialfalls für den Fall, daß die Algebra $\mathfrak{A}^0$ einfach ist. Anschließend wird der Fall, daß $\mathfrak{A}^0$ nicht einfach ist, studiert.
Um die in Abschnitt 11.2 dargelegten Resultate bzgl. des Spezialfalls zu erlangen, ist eine genaue Untersuchung der inneren Struktur der Algebra $\mathfrak{A}$ nötig. Von entscheidender Bedeutung sind insbesondere die reellen Darstellungen der in $\mathfrak{A}$ enthaltenen einfachen formal-reellen Jordan-Algebren. Die benötigte Darstellungstheorie erschließt sich aus einer genauen Kenntnis der Klassifikation der *IQS* nach Dorfmeister.

Dabei kommt es vor allem auf die Feinstruktur der reellen Darstellungsräume bei den verschiedenen einfachen formal-reellen Jordan-Algebren an. Da die Darstellungsräume vollständig reduzibel sind, interessieren uns vornehmlich die irreduziblen reellen Darstellungen. Alles dafür Benötigte wird dargestellt, entwickelt oder es werden entsprechende Literaturhinweise gegeben. Die Arbeit [$\mathcal{DO}79a$], die das Klassifikationsergebnis der *IQS* enthält, war für diesen Abschnitt sehr hilfreich.
Der letzte Abschnitt des Kapitels 11 beinhaltet weitere spezielle Diagramme vom q=2-Typ, für die jeweils angenommen wird, daß ein dazugehörendes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B. existiert. Für jeden dieser Fälle zeigen wir, daß $\mathcal{S}$ doch positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen besitzt oder schon quasisymmetrisch und folglich vom q=1-Typ ist. Bei den geführten Beweisen gehen die Strukturaussage von Piatetsky-Shapiro aus Abschnitt 9.1, die für n.p.h.B. notwendigen Bedingungen von Tsuji aus Abschnitt 9.2 und die Charakterisierung der quasisymmetrischen Siegelgebiete via der Dimensionen der Räume 1. und 2. Art von D'Atri und Miatello ein.

Das Hauptresultat der Arbeit ist in Kapitel 12 enthalten, denn hier wird nun die Krümmungsvermutung gezeigt. Alle in den Kapiteln 1 bis 11 geleisteten Vorarbeiten fließen in den Beweis mit ein.
Im ersten bedeutenden Schritt zeigen wir in Abschnitt 12.1, daß sich die Betrachtung auf Siegelgebiete vom q=2-Typ reduzieren läßt, was eine direkte Konsequenz des induktiven Arguments ist (s. (10.2.α), oder $\mathcal{STA}$ S.129).
Folglich bleibt zu zeigen, daß keine Siegelgebiete mit n.p.h.B. vom q=2-Typ existieren und diese Aussage beweisen wir in Abschnitt 12.2. Dazu wird die Existenz eines solchen Gebietes angenommen.
Eine Analyse der q=2 Fälle zeigt nun, daß innerhalb der Siegelgebiete diesen Typs vier wesentliche mögliche Algebren $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ zu unterscheiden sind. Jeder Fall wird im einzelnen untersucht. Dabei reduziert sich für jeden der vier Fälle die Betrachtung induktiv auf bestimmte Diagramme, wobei auch immer der zweite Struktursatz von entscheidender Bedeutung ist. Zum Teil wurden die bei dieser Vorgehensweise resultierenden Diagramme schon im 11. Kapitel behandelt.
Anschließend können wir entweder direkt zeigen, daß jedes zu einem gerade betrachteten Diagramm gehörende Siegelgebiet positive Bischnittkrümmungsrichtungen hat oder, daß es vom q=1-Typ und somit schon quasisymmetrisch ist. Wir erhalten also immer einen Widerspruch zu einer Voraussetzung oder Annahme.

Kurze Beschreibung des Anhangs

Im Anhang A wird ein Beispiel für ein Siegelgebiet der reellen Dimension Zehn dargelegt, wodurch einige in dieser Arbeit angegebene Sachverhalte illustriert werden.

Da die Arbeit eine Fülle von Bezeichnungen enthält, listen wir zum leichteren Wiederfinden als Lesehilfe einige Bezeichnungen im Anhang B auf.

Bemerkungen

An dieser Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. J. Dorfmeister sowohl für die Überlassung seiner Habilitationsschrift als auch einem Exemplar seiner Dissertation.
Um die Habilitationsschrift von Dorfmeister zugänglicher zu machen, wurde ein Exemplar der Institutsbibliothek zugeführt.
Einen für diese Arbeit wichtigen Teil seiner Habilitation, der in keinem Artikel veröffentlicht wurde, habe ich mit der Erlaubnis von Herrn Dorfmeister in Kapitel 10 integriert, wofür ich mich auch an dieser Stelle bedanken möchte.

Zum Sprachgebrauch

Wir sprechen in dieser Arbeit des öfteren von der zu einem homogenen Siegelgebiet $\mathcal{S}$ „zugeordneten" oder „dazugehörigen" normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$, Algebra $\mathfrak{A}$ oder von einem zugeordneten Kegel Ω. Was wir unter dem zu $\mathcal{S}$ zugehörigen Kegel verstehen, ist aufgrund der Siegelgebietsdefinitionen des Abschnitts 6.2 offensichtlich. Somit ist aber auch direkt klar, was wir unter der $\mathcal{S}$ zugeordneten Algebra $\mathfrak{A}$ verstehen, denn dies ist die in Kapitel 3 einem Kegel eindeutig zugeordnete Algebra. Eine zu $\mathcal{S}$ gehörende normale J-Algebra $\mathfrak{s}$ ist eine solche, für die $S = exp(\mathfrak{s})$ einfach transitiv auf $\mathcal{S}$ operiert.
In ähnlicher Weise sprechen wir von Räumen 1. und 2. Art, die einem Teilraum $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}$ selbst zugeordnet werden. Dies sind die Räume, die via der Identifizierung (8.3.I) mit den entsprechenden Peirce-Räumen des Teilraumes $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}$ verknüpft sind.

Allgemeine Voraussetzungen und Notationen (s. auch Anhang B)

Aus der Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren setze ich die Kenntnis der elementaren Grundbegriffe, wie „auflösbar", „halbeinfach" usw., als bekannt voraus.
Sätze usw. werden nach den Abschnitten nummeriert; dies sollte ein leichteres und schnelleres Auffinden der Aussagen ermöglichen.
Bemerkungen bzw. Voraussetzungen werden ebenfalls durch dreiwertige Nummerierungen dem jeweiligen Abschnitt eindeutig zugeordnet. Dabei ist die letzte Kennzeichnung ein Buchstabe aus dem griechischen Alphabet.
Beispiele werden z.B. mit (1.2.B1) und (2.4.B3) usw. aufgelistet. Die Endungen B1 und B2 weisen darauf hin, daß es sich um ein Beispiel handelt.
Gleichungen bzw. Definitionen, die im laufenden Text gegeben werden, nummeriere ich mit den Abschnittsziffern, gefolgt von einem arabischen Buchstaben.
Durch die verschiedenen Endungen ist dem Leser immer klar, von welcher Art der Bezug ist, ob es sich also um ein Beispiel, eine Gleichung bzw. Definition oder um eine Bemerkung bzw. Voraussetzung handelt.

Sind G, S... Lie-Gruppen, dann werden mit $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$... bzw. auch mit $Lie(G)$, $Lie(S)$... deren Lie-Algebren bezeichnet.
Die Kegelalgebra, eine Jordan-Algebra usw. notieren wir hingegen immer mit großen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{L}$ usw..
$GL(V)$ bezeichnet immer die allgemeine lineare Gruppe eines Vektorraumes V.
Ist V ein reeller Vektorraum, dann notiert $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung.
Die zu einer linearen Abbildung B eines Vektorraumes V mit Skalarprodukt τ bzgl. τ adjungierte Abbildung bezeichnen wir mit B^{τ}.

Eine weitere, eigene Notation zu entwickeln, erschien in Anbetracht der schon zahlreich vorhandenen als unangebracht. Wir verfolgten bei der Festlegung unserer Notation das Prinzip, immer die in der Literatur gängigste zu benutzen und uns zu eigen zu machen. Die Konsequenz daraus ist, daß dem Leser in den meisten Fällen ein Notationsabgleich erspart bleibt.
Prinzipiell werden nur solche Beweise ausgeführt, die neu oder schwer zugänglich sind.

Danksagungen

Ich möchte mich herzlich bei Frau Prof. Dr. Ursula Hamenstädt sowohl für das Bekanntmachen mit den Siegelgebieten und ihr stetes Interesse an meiner Forschung sowie am Fortgang der Arbeit, als auch für die Schaffung der erforderlichen Rahmenbedingungen bedanken. Alle meine Aktivitäten wurden von ihr befürwortet und freundlich unterstützt.

Ebenso herzlich bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Josef Dorfmeister, ohne dessen Rat die Arbeit nicht den erlangten Abschluß erhalten hätte. Insbesondere danke ich Herrn Dorfmeister für sein persönliches und wissenschaftliches Engagement während unserer Emailkonversationen und meines fünfwöchigen Forschungsaufenthaltes an der University of Kansas. Er war und ist mir ein ausgezeichneter Lehrer.

Herrn Prof. Dr. S. Gindikin danke ich für ein interessantes Gespräch über verallgemeinerte Siegelgebiete während seines Aufenthaltes am MPI.

Mein Dank gilt auch dem SFB 256 für die allzeit gewährte finanzielle Unterstützung, sowie allen, die mich während der Promotionszeit begleiteten.

Besonderer Dank gebührt meinen Eltern.

Die Arbeit ist meiner Frau Sandra gewidmet.

Eine geometrische

Charakterisierung

quasisymmetrischer Siegelgebiete

1 Die Bergmannmetrik

Jedes homogene beschränkte Gebiet ist biholomorph zu einem affin homogenen Siegelgebiet, was wir auch in der Einleitung beschrieben haben (s. Kapitel 6, insbesondere Satz 6.1.1). Da wir die Geometrie der Bergmannmetrik studieren wollen, führen wir aus, wie man diese auf beschränkten Gebieten erhält.
Dafür erinnern wir an bzw. zitieren wir einige wohlbekannte Tatsachen, die in Zusammenhang mit der Bergmannmetrik stehen (s. [$\mathcal{KO}$95] III., [$\mathcal{KONO}II$] Beispiel 6.6 S.162, insbesondere [$\mathcal{HE}$] S.364 ff.).

1.1 Kählermetrik

Es wird die Definition einer Kählermetrik gegeben. Eine Kählermetrik vereinigt in sich Riemannsche-, Symplektische- und Komplexe-Geometrie und ist ein natürliches Objekt für homogene beschränkte Gebiete (s. Definition 1.2.7), die wir später betrachten werden.

Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $n < \infty$. Mit TM bezeichnen wir das TANGENTIALBÜNDEL, mit $\Gamma(TM)$ die $\mathcal{C}^\infty$-SCHNITTE von TM und mit $Hom(TM)$ das HOMOMORPHISMENBÜNDEL von TM. Eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung f von TM in sich ist ein SCHNITT von $Hom(TM)$ genau dann, wenn gilt:

(1.1.a) f ist FASERTREU, d.h. sie erhält die zum $\mathbb{R}^n$ isomorphen Fasern von TM und

(1.1.b) die Einschränkung von f auf jede Faser von TM ist eine lineare Abbildung.

Das AUTOMORPHISMENBÜNDEL $Aut(TM) \subset Hom(TM)$ besteht aus denjenigen Abbildungen, bei denen die linearen Abbildungen in (1.1.b) Isomorphismen sind. Ein differenzierbarer Schnitt J in $Aut(TM)$ heißt KOMPLEXE STRUKTUR genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt:

(1.1.c) $$J^2(x) = -Id\Big|_{T_xM} \text{ und}$$

(1.1.d) $$[X,Y] + J[X,JY] + J[JX,Y] - [JX,JY] = 0$$

für alle Vektorfelder X, Y auf M. Aus (1.1.c) folgt direkt, daß $n = 2m$ gelten muß. Existiert auf einer Mannigfaltigkeit eine komplexe Struktur J, so nennt man sie eine KOMPLEXE MANNIGFALTIGKEIT.
Betrachtet man M, eine komplexe Mannigfaltigkeit, als eine reelle Mannigfaltigkeit und ist g eine Riemannsche Metrik auf M, dann sagt man, g ist HERMITESCH, genau dann, wenn für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt:

(1.1.e) $$g(JX, JY) = g(X, Y).$$

Bekanntlich definiert jede Riemannsche Metrik eindeutig einen linearen Zusammenhang, den LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG ∇ (s. z.B. [$\mathcal{GHL}$] S.70). Bezüglich eines Zusammenhangs kann jeweils ein Parallelitätsbegriff erklärt werden (s. [$\mathcal{PO}$] Ch. 2., [$\mathcal{GHL}$] S.77 ff.). Wir können nun definieren (s. z.B. [$\mathcal{BE}$] Ch. 2.):

Definition 1.1.1 (Kählermetrik) *Eine hermitesche Metrik g auf einer komplexen Mannigfaltigkeit M heißt* KÄHLERMETRIK *genau dann, wenn die komplexe Struktur J parallel bzgl. des Levi-Civita Zusammenhangs ∇ ist, d.h. für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt:*
$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y = 0.$$

Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer hermiteschen Metrik (bzw. Kählermetrik) g, so sagt man auch, daß M eine HERMITESCHE-STRUKTUR (bzw. eine KÄHLER-STRUKTUR) besitzt.

Definition 1.1.2 (homogene Kählermannigfaltigkeit) *Eine komplexe Mannigfaltigkeit M mit Kählermetrik g wird genau dann* HOMOGENE KÄHLERMANNIGFALTIGKEIT *genannt, wenn die Gruppe $Aut(M, g)$ der biholomorphen Isometrien transitiv auf M operiert.*

1.2 Allgemeines zur Bergmannmetrik

Die „Konstruktion“ und wichtige Eigenschaften der Bergmannmetrik werden zusammenfassend dargestellt.

Definition 1.2.1 (beschränktes Gebiet) *Eine beschränkte, offene, zusammenhängende Teilmenge D eines Vektorraumes $\mathbb{C}^n$ mit $n < \infty$ wird* BESCHRÄNKTES GEBIET *genannt.*

Sei D ein beschränktes Gebiet. Mit $L^2(D)$ wird der Hilbertraum der komplexwertigen quadratintegrierbaren Funktionen notiert, d.h. für alle $f \in L^2(D)$ gilt:
$$\int_D f(z)\overline{f(z)}d\mu(z) < \infty.$$
Dabei ist μ das Lebesgue-Maß des $\mathbb{R}^{2n}$. Man definiert nun für alle $f, g \in L^2(D)$

(1.2.a) $$< f, g >:= \int_D f(z)\overline{g(z)}d\mu(z),$$

wodurch ein Skalarprodukt $< .,. >$ auf dem $L^2(D)$ gegeben ist, und bekanntlich erhält man aus diesem Skalarprodukt eine Norm auf dem Hilbertraum $L^2(D)$ via $||f|| := < f, f >^{\frac{1}{2}}$ für alle $f \in L^2(D)$.

Mit $\mathfrak{H}(D) \subset L^2(D)$ bezeichnen wir die Teilmenge, die aus den holomorphen Funktionen besteht. Holomorphe Funktionen sind analytisch und daher lokal in Potenzreihen entwickelbar.
Schränkt man die Funktionen aus $\mathfrak{H}(D)$ auf eine beliebige kompakte Teilmenge K von D ein und bezeichnet man mit $|\cdot|$ den Betrag auf $\mathbb{C}$, dann gilt (s. [$\mathcal{HE}$] Proposition 3.1, S.364):

Proposition 1.2.2 *Für jede kompakte Teilmenge $K \subset D$ existiert eine Zahl $C_K \in \mathbb{R}^+$, so daß $|f(z)| \leq C_K \|f\|$, $\forall z \in K$ und $\forall f \in \mathfrak{H}(D)$.*

$\mathfrak{H}(D)$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $L^2(D)$; das lehrt Korollar 3.2, S.365 in [$\mathcal{HE}$]. Somit ist $\mathfrak{H}(D)$ selbst ein Hilbertraum mit dem von $L^2(D)$ induzierten Skalarprodukt (1.2.a).

Für unsere Arbeit ist der Begriff des Bergmannkerns von Bedeutung (s. auch Abschnitt 3.2). Zu dessen Konstruktion benötigt man eine Hilbertbasis (vgl. [$\mathcal{HISL}$] S.93), d.h. ein orthonormales System $\{\varphi_i\}$ von Elementen aus $\mathfrak{H}(D)$, so daß für alle $\phi \in \mathfrak{H}(D)$ die Parsevalsche Gleichung

$$||\phi||^2 = \sum | < \phi, \varphi_i > |^2$$

erfüllt ist. Wir zitieren Theorem 3.3 aus [$\mathcal{HE}$] S.365:

Satz 1.2.3 *Sei $\varphi_0, \varphi_1 ...$ eine Hilbertbasis von $\mathfrak{H}(D)$. Dann ist die Reihe*

(1.2.b) $$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(x)} =: \mathcal{K}(z, \overline{x})$$

gleichmäßig konvergent für jede kompakte Teilmenge von $D \times D$. $\mathcal{K}(z, \overline{x})$ ist unabhängig von der Wahl der Hilbertbasis, und $\forall F \in \mathfrak{H}(D)$ gilt:

(1.2.c) $$F(z) = \int_D \mathcal{K}(z, \overline{x}) F(x) d\mu(x).$$

Definition 1.2.4 (Bergmannkern) *Die in (1.2.b) definierte Funktion $\mathcal{K}$ nennt man den* Bergmannkern *von D.*

Via (1.2.c) läßt sich jede Funktion aus $\mathfrak{H}(D)$ mit Hilfe des Bergmannkerns $\mathcal{K}$ schreiben. Genau dies stellt die wichtige Eigenschaft des Kerns dar; er reproduziert die Funktion an jeder Stelle (vieles über reproduzierende Kerne kann in [$\mathcal{AR}$] nachgelesen werden, s. auch den Anhang in [$\mathcal{KOE}$99]).

Sei $z_1, ..., z_n$ ein Koordinatensystem von D. Unter Verwendung des Bergmannkerns kann ein Volumenelement v (Bergmannvolumen) auf D eingeführt werden, das durch

(1.2.d) $$v = i^n \mathcal{K} dz^1 \wedge ... \wedge dz^n \wedge d\overline{z}^1 ... \wedge d\overline{z}^n$$

gegeben ist. Des weiteren erhält man durch $\mathcal{K}$ eine Kählermetrik via

(1.2.e) $$g = ds^2 := \sum_{k,j}^{n} \frac{\partial^2 log\mathcal{K}}{\partial z^k \partial \overline{z}^j} dz^k \wedge d\overline{z}^j.$$

Beweise dafür, daß v ein Volumenelement und g eine Kählermetrik ist, können in [$\mathcal{HE}$] Proposition 2.5, S.362 und Proposition 3.4, S.367 nachgelesen werden. Es gilt $(det(g(x,y)_{ij}))^{\frac{1}{2}} = c\mathcal{K}(z,\overline{z})$ für alle $x + iy = z \in D$ und $0 \neq c \in \mathbb{R}$ (s. auch Proposition 1.2.8).

Definition 1.2.5 (Bergmannmetrik) *Die in (1.2.e) auf D definierte Kählermetrik heißt* BERGMANNMETRIK.

Wenn nun D und D' beschränkte Gebiete in $\mathbb{C}^n$ sind und g, g' die dazugehörigen Riemannschen Strukturen, die durch die jeweiligen Bergmannkerne induziert werden, dann ist jeder holomorphe Diffeomorphismus von D auf D' eine Isometrie (s. [$\mathcal{HE}$] Proposition 3.5, S.370).
Wenn wir mit $I(D,g)$ die Menge der Isometrien von (D,g) und mit

(1.2.f) $Aut(D)$ die BIHOLOMORPHEN AUTOMORPHISMEN von D

bezeichnen, können wir folgende Aussage machen:

Lemma 1.2.6 *Sei D ein beschränktes Gebiet und g die Bergmannmetrik, dann gilt:*

1. *$I(D,g)$ und $Aut(D)$ sind Lie-Gruppen.*

2. *$Aut(D) \subset I(D,g)$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $I(D,g)$.*

3. *$I(D,g)$ und $Aut(D)$ haben isomorphe Lie-Algebren.*

Beweis:
Die Teilmenge $Aut(D)$ von $I(D,g)$ ist eine Lie-Gruppe, denn: Bezüglich der Verknüpfung von Abbildungen ist $Aut(D)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $I(D,g)$ (versehen mit der kompakt offenen Topologie (s. [$\mathcal{HE}$] S.202)). Die Isometriegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist nach dem Theorem von Myers-Steenrod (s. z.B. [$\mathcal{GHL}$] S.65) eine Lie-Gruppe, folglich ist $Aut(D)$ als abgeschlossene Untergruppe sogar eine Lie-Untergruppe (s. [$\mathcal{WA}$] 3.42, S.110). $Aut(D)$ läßt auch v (1.2.d) invariant. Dies zeigt 1. und 2., und um 3. zu zeigen benötigen wir, daß die Einskomponenten der Gruppen übereinstimmen, d.h. $Aut^0(D) = I^0(D,g)$. Dies gilt aber wegen [$\mathcal{KONO}$57] Theorem 3, S.119. □

Definition 1.2.7 (homogenes beschränktes Gebiet) *Ein beschränktes Gebiet D wird genau dann* HOMOGENES BESCHRÄNKTES GEBIET, *kurz h.b.G., genannt, wenn Aut(D), definiert in (1.2.f), transitiv auf D operiert.*

Wir betrachten in dieser Arbeit ausschließlich Größen, die von einer Riemannschen Metrik abgeleitet wurden. Dies gilt für den jeweils betrachteten linearen Zusammenhang, für den Krümmungstensor usw..

Durch Kontraktion, d.h. Spurbildung, erhält man aus dem Krümmungstensor den Riccitensor Ric (s. z.B. [$\mathcal{BE}$] S.46). Dieser Tensor Ric ist vom gleichen Typ wie die Riemannsche Metrik g, was als Anlaß zum Vergleich der beiden genommen werden kann und somit zur Betrachtung derjenigen Riemannschen Metriken mit

(1.2.g) $$Ric = \lambda g,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

führt. Genau solche Riemannsche Metriken werden EINSTEINMETRIKEN und λ wird EINSTEINKONSTANTE genannt (vgl. auch [$\mathcal{KONOI}$] S.292). Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) nennt man EINSTEINMANNIGFALTIGKEIT (s. insbesondere [$\mathcal{BE}$]), wenn (1.2.g) gilt.
Für homogene beschränkte Gebiete ist folgendes bekannt (vgl. [$\mathcal{HE}$] Proposition 3.6, S.371):

Proposition 1.2.8 *Sei D ein homogenes beschränktes Gebiet mit Bergmannmetrik g, dann gilt:*

1. *D ist eine Kählermannigfaltigkeit (s. Definition 1.1.1).*

2. $\mathcal{K}(z,\overline{z}) = c(det(g(x,y)_{ij})^{\frac{1}{2}})$, *mit* $z = x + iy \in D$ *und* $c \in \mathbb{R}$.

3. *Die Riccikrümmung erfüllt $Ric = -g$. Insbesondere ist D also eine Einsteinmannigfaltigkeit mit negativer Einsteinkonstante.*

4. *Bis auf einen positiven reellen Faktor ist die Bergmannmetrik die einzige Metrik, die sowohl Kähler als auch Einstein auf D ist.*

Für einen Beweis der letzten Aussage von Proposition 1.2.8 vergleiche man mit der Bemerkung in [$\mathcal{DA}$79] S.409.

2 Grundlagen

Homogene reguläre Kegel sind Bausteine für die später zu untersuchenden Siegelgebiete (s. Kapitel 6) und werden hier isoliert davon eingeführt.
Beginnend mit den Untersuchungen von Koecher hat es sich als nützlich erwiesen, zur Beschreibung gewisser Gebiete Jordan-Algebren zu verwenden. Genauer untersuchte Koecher ω-Gebiete, für deren Definition wir auf [$\mathcal{KOE}$99] §1, S.34 verweisen; z.B. sind selbstduale Kegel (s. (2.1.c)) ω-Gebiete. Für den Zusammenhang von Jordan-Algebren mit ω-Gebieten s. [$\mathcal{KOE}$99] Theorem 4, S.49. Da Jordan-Algebren für uns von großem Nutzen sein werden, ist ein Abschnitt diesen Algebren gewidmet.

2.1 Homogene reguläre Kegel

Untersuchungen von Positivitätsbereichen (s. [$\mathcal{KOE}$99] I), also selbstdualen Kegeln, bildeten den Ausgangspunkt für das Studium allgemeinerer Kegel, wie z.B. der Klasse der homogenen regulären Kegel, die in dieser Arbeit essentiell sind.

Ein REGULÄRER KEGEL Ω ist eine nicht leere, offene, konvexe Teilmenge eines endlich dimensionalen Vektorraumes V über $\mathbb{R}$, für die gilt:

(2.1.a) $$x \in \Omega,\ \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in \Omega \text{ und } \pm x \in \overline{\Omega} \Rightarrow x = 0.$$

Dabei bezeichnet $\overline{\Omega}$ die abgeschlossene Hülle von Ω in V. In einem regulären Kegel ist kein eindimensionaler reeller Teilraum enthalten.

Sei Ω ein regulärer Kegel und V^* bezeichne wie üblich den Dualraum von V, dann ist die Menge

(2.1.b) $$\Omega^* := \{\lambda \in V^* | \lambda(x) > 0, \forall x \in \overline{\Omega}, x \neq 0\} \subset V^*$$

ein regulärer Kegel in V^* (s. Lemma 1.4, S.112 [$\mathcal{DOKO}$79]). Ω^* nennt man den DUALEN KEGEL von Ω.

Ist allgemeiner σ eine symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform von V, dann ist

(2.1.c) $$\Omega^\sigma = \{x \in V | \sigma(x, y) > 0, \forall y \in \overline{\Omega} - \{0\}\}$$

ebenfalls ein regulärer Kegel in V (s. [$\mathcal{DOKO}$79] S.115). Dieser Kegel Ω^σ heißt σ-DUALER KEGEL von Ω.
Durch σ ist via $\lambda \in V^* \mapsto x \in V$ ein kanonischer Isomorphismus von V^* auf V gegeben, so daß $\forall y \in V\ \lambda(y) = \sigma(x, y)$ gilt. Dieser Isomorphismus bildet den dualen Kegel Ω^* auf den σ-dualen Kegel Ω^σ ab.

Ein regulärer Kegel Ω in (V, σ) heißt SELBSTDUAL bzgl. σ oder auch σ-SELBSTDUAL genau dann, wenn gilt:

(2.1.d) $$\Omega^\sigma = \Omega.$$

Ein regulärer Kegel Ω heißt HOMOGEN genau dann, wenn die Gruppe

(2.1.e) $$Aut(\Omega) = \{W \in GL(V) | W\Omega = \Omega\}$$

transitiv auf Ω operiert. Es gilt (vgl. [$\mathcal{DOKO}$79] (1.6) und (1.9)):

(2.1.f) $$(\Omega^\sigma)^\sigma = \Omega \text{ und } (Aut(\Omega))^\sigma = Aut(\Omega^\sigma).$$

Beispiele für homogene reguläre Kegel und Bemerkungen:

(2.1.α) Die homogenen selbstdualen Kegel werden auch SYMMETRISCHE KEGEL genannt, weil man solche Kegel Ω mit einer Riemannschen Metrik g versehen kann, so daß (Ω, g) ein Riemannscher symmetrischer Raum wird (s. [$\mathcal{FAKO}$] S.15 ff.).

(2.1.β) Eine interessante Frage lautet:

Wann ist ein regulärer Kegel sogar homogen?

Dorfmeister zeigte z.B. in seinem Beitrag „Symmetric Cones“ zum Buch [$\mathcal{GI}$96] für D'Atri, daß ein regulärer Kegel Ω homogen ist, wenn die Metrik g, die von der Kegelinvarianten $\boldsymbol{\iota}$ herkommt, einen symmetrischen Raum definiert.
Die Kegelinvariante $\boldsymbol{\iota}(\Omega, x)$ definieren wir in (3.1.a), und die betrachtete Riemannsche Metrik g erhält man $\forall x \in \Omega$ via
$$g_x(u, v) = \Delta_x^u \Delta_x^v \boldsymbol{\iota}(\Omega, x).$$
Für die verwendeten Bezeichnungen beachte man Abschnitt 3.1 II.

BEISPIELE SELBSTDUALER KEGEL

(2.1.B1) *Klassische Kegel*

Sei $\mathcal{H}(n, \mathbb{R}) = Sym(n, \mathbb{R}) := \{X \in Mat(n, \mathbb{R}) | X^t = X\}$ und $\mathcal{H}(n, \mathbb{K}) = Herm(n, \mathbb{K})$ $:= \{X \in Mat(n, \mathbb{K}) | \overline{X}^t = X\}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
Sei nun $<.,.>$ die standard positiv-definite symmetrische bzw. hermitesche Form von $\mathbb{K}^n$, d.h. für $z, w \in \mathbb{K}^n$ gilt $< z, w > = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w}_i$, dann können wir definieren:
$$\Omega = Pos(n, \mathbb{K}) := \{X \in \mathcal{H}(n, \mathbb{K}) = V | < Xv, v > > 0, \forall 0 \neq v \in \mathbb{K}^n\}.$$
$Pos(n, \mathbb{K})$ ist die Menge der positiv-definiten Matrizen, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ gilt. Des weiteren ist $Pos(n, \mathbb{K})$ ein homogener, regulärer, σ-selbstdualer Kegel (s. (2.1.d)). Diese Kegel werden auch KLASSISCHE KEGEL und KLASSISCHE POSITIVITÄTSBEREICHE genannt. Die Bilinearform σ (s. z.B. auch [$\mathcal{DO}$79a]) ist dabei

auf $\mathcal{H}(n,\mathbb{K})$ durch
$$\sigma(X,Y) := Re(Spur(XY))$$
definiert. Re bedeutet, daß wir den Realteil der Spur nehmen, was natürlich nur von Bedeutung ist, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ gilt. Bekanntlich existiert folgender Isomorphismus:
$$\mathcal{H}(n,\mathbb{H}) \cong \left\{ X \in \mathcal{H}(2n,\mathbb{C}) | JXJ = -X^t, \text{mit } J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
Falls wir also über dem Schiefkörper (bzw. der Divisionsalgebra) $\mathbb{H}$ arbeiten, können wir wegen dieser Isomorphie jedes Element aus $\mathcal{H}(n,\mathbb{H})$ mit dem entsprechenden Element aus $\mathcal{H}(2n,\mathbb{C})$ identifizieren. Eine quaternionische Matrix $X_1 + jX_2$ ist dann mit der komplexen Matrix $\begin{pmatrix} \overline{X_1} & X_2 \\ -\overline{X}_2 & X_1 \end{pmatrix}$ assoziiert. Die Spurbildung wird in diesem Fall für die entsprechenden Matrizen in $\mathcal{H}(2n,\mathbb{C})$ durchgeführt.
Für die Automorphismengruppe (definiert in (2.1.e)) jedes klassischen Kegels Ω gilt:
$$Aut(Pos(n,\mathbb{K})) \supset \{W_Q | Q \in GL(n,\mathbb{K}) \text{ und } W_Q(X) = QX\overline{Q}^t\}.$$
Einen Beweis dafür, daß $Pos(n,\mathbb{R})$ σ-sebstdual ist, findet man z.B. in [$\mathcal{FAKO}$] S.9 ff..

(2.1.B2) *Lorentzlichtkegel*

Sei $[\mathcal{X},\mu,e]$ ein Tripel, mit $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n, n \geq 2$; wir wählen $e = (1,0,...,0)^t$. Wie man aus (2.2.B4) entnehmen kann, hat dann die symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform μ auf $\mathcal{X}$ die Signatur $(1,n-1)$. Man definiert nun
$$P(1,n-1) := \{Y \in \mathcal{X} | \mu(Y,Y) > 0, \mu(Y,e) > 0\}.$$
Die so definierte Menge $P(1,n-1)$ ist ein homogener, bzgl. des euklidischen Skalarprodukts von $\mathbb{R}^n$, selbstdualer Kegel, was z.B. in [$\mathcal{FAKO}$] S.7-8 gezeigt wird. $P(1,n-1)$ nennt man Lorentzlichtkegel, der in besonderem Maße im Fall $n = 4$ für die spezielle Relativitätstheorie von Bedeutung ist. Es gelten die folgenden Isomorphismen (s. [$\mathcal{SA}$] S.36):
$$P(1,2) \cong Pos(2,\mathbb{R}),\ P(1,3) \cong Pos(2,\mathbb{C}),\ P(1,5) \cong Pos(2,\mathbb{H}).$$

(2.1.B3) *Ausnahmekegel*

Mit $\mathbb{O}$ bezeichnen wir die Cayley-Oktaven und wir betrachten in
$$\mathcal{H}(3,\mathbb{O}) := \{X \in Mat(3,\mathbb{O}) | \overline{X}^t = X\}$$
die Menge
$$Pos(3,\mathbb{O}) := \{X^2 | X \in \mathcal{H}(3,\mathbb{O}), X \text{ ist invertierbar}\}$$
(s. auch (2.2.B5) u. [$\mathcal{SA}$] S.37). Weil $\mathbb{O}$ eine nicht-assoziative Divisionsalgebra ist, können wir $Pos(3,\mathbb{O})$ nicht in der gleichen Weise wie die Kegel in (2.1.B1) definieren. Es existieren mehrere zu der hier angegebenen Definition äquivalente Möglichkeiten, der Definition von $Pos(3,\mathbb{O})$. Solche gleichwertigen Definitions-

möglichkeiten kann man Satz 7.5 in [$\mathcal{DOKO}$79] entnehmen.
$Pos(3,\mathbb{O})$ bezeichnet man als AUSNAHMEKEGEL; diese Namensgebung begründen wir nun anschließend in (2.1.γ).

(2.1.γ) Die exakte Definition einer formal-reellen Jordan-Algebra, geben wir in der Definition 2.2.1 an. Das Klassifikationsergebnis der formal-reellen Jordan-Algebren stellt den Inhalt des ersten Struktursatzes 4.1.2 dar. Aus Satz 4.1.2 resultiert, daß $\mathcal{H}(3,\mathbb{O})$ eine formal-reelle Jordan-Algebra ist. Allerdings ist $\mathcal{H}(3,\mathbb{O})$ eine besondere formal-reelle Jordan-Algebra, die man als NICHT-SPEZIELLE oder auch als AUSNAHME-ALGEBRA bezeichnet (s. dazu (2.2.B2-B5)).
Weil $Pos(3,\mathbb{O})$ in $\mathcal{H}(3,\mathbb{O})$ enthalten ist (s. z.B. [$\mathcal{SA}$] S.33, das Theorem von Koecher und Vinberg), nennt man $Pos(3,\mathbb{O})$ den Ausnahmekegel.
Analog zur Definition von $Pos(3,\mathbb{O})$ in (2.1.B3) kann man die Kegel in (2.1.B1) als Teilmengen entsprechender formal-reeller Jordan-Algebren definieren.

BEISPIELE NICHT-SELBSTDUALER KEGEL

(2.1.B4) *Der Dorfmeister-Kegel* Ω_D
Betrachten wir den Untervektorraum V von $Mat(n+m,\mathbb{C})$, der via:

$$\begin{aligned} V &:= \{X \in Mat(n+m,\mathbb{C}) | X = \begin{pmatrix} A_1 & A_{\frac{1}{2}} \\ \overline{A}^t_{\frac{1}{2}} & A_0 \end{pmatrix}, \\ &\quad A_1 \in \mathcal{H}(n,\mathbb{C}),\ A_0 \in \mathcal{H}(m,\mathbb{R}), A_{\frac{1}{2}} \in Mat(n \times m,\mathbb{C})\}. \end{aligned}$$

definiert ist, so können wir den DORFMEISTER-KEGEL als

$$\Omega_D := \{X \in V | X > 0\}$$

definieren. Dabei bedeutet $X > 0$, daß X positiv-definit ist, also $X \in Pos(m+n,\mathbb{C})$ (s. (2.1.B1)). Den für ein spezielles σ, wobei wir σ in (3.1.B3) angeben, σ-dualen Kegel, betrachtete Dorfmeister in [$\mathcal{DO}$79*a*]. Wie wir [$\mathcal{DO}$79*a*] S.4-5 entnehmen können, muß man dasjenige σ in (3.1.B3) mit $\alpha = 2n + 2m + 1$ und $\beta = 2n + m + 2$ wählen.
In Abschnitt 5.1 betrachten wir dieses Beispiel ausführlich, und wir begründen dort auch, warum Ω_D nicht σ-selbstdual ist.

(2.1.B5) *Der Vinberg-Kegel* Ω_V
Sei V der Vektorraum der symmetrischen 3×3-Matrizen von der Form

$$V := \left\{ A \in Sym(3,\mathbb{R}) | A = \begin{pmatrix} \mathrm{x} & 0 & \mathrm{r} \\ 0 & \mathrm{y} & \mathrm{s} \\ \mathrm{r} & \mathrm{s} & \mathrm{z} \end{pmatrix}; x,y,z,r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

und man setzt $\forall Z, Y \in V\ \sigma(Z,Y) = Spur(ZY)$.
Dann ist σ ein Skalarprodukt auf V und man definiert

$$\Omega_V := \{A \in V | A \text{ ist positiv-definit } \Leftrightarrow A > 0\}$$

$$= \{A \in V | x > 0, xy > 0, xz - r^2 > 0\}.$$

Ω_V wird VINBERG-KEGEL genannt und Vinberg zeigte in [$\mathcal{VI}60a$], daß dieser Kegel für kein Skalarprodukt auf V selbstdual ist.

(2.1.δ) Der Vinberg-Kegel war das erste Beispiel eines nicht-selbstdualen Kegels. Ganze Klassen solcher Beispiele findet man in [$\mathcal{WU}$] S.263 ff..

2.2 Jordan-Algebren

Alle Informationen zu Jordan-Algebren haben wir aus jeweils einem der Bücher [$\mathcal{BRKOE}$], [$\mathcal{JA}$], [$\mathcal{KOE}99$] oder [$\mathcal{FAKO}$] entnommen. Der zugrunde liegende Körper der betrachteten Objekte sei immer der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Sprechen wir von einem beliebigen Körper, so gilt für die Charakteristik des Körpers, daß sie ungleich Zwei ist. Alle Ausnahmen davon geben wir explizit an.

Im allgemeinen ist eine Algebra $\mathfrak{A}$ weder assoziativ noch kommutativ und wir definieren:

Definition 2.2.1 (Jordan- und formal-reelle Jordan-Algebra) *Eine Algebra* $(\mathfrak{A}, \circ)$ *über einem beliebigen Körper* $\mathbb{K}$ *heißt* JORDAN-ALGEBRA, *wenn gilt:*

(JA.1) $u \circ v = v \circ u,$

(JA.2) $u \circ (u^2 \circ v) = u^2 \circ (u \circ v), \forall u, v \in \mathfrak{A}.$

Eine reelle Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$, *d.h.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *nennt man* FORMAL-REELLE JORDAN-ALGEBRA, *wenn aus* $u^2 + v^2 = 0$ *stets* $u = v = 0$ *folgt.*

Bemerkungen und Beispiele:

(2.2.α) Wir benutzen zur Verdeutlichung dafür, daß in der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ multipliziert wird, das Zeichen $\circ$. Sind wir der Meinung, daß dies eindeutig erkennbar ist, so lassen wir es in vielen Fällen auch weg.

(2.2.β) Mit $A(u)$ wird die lineare Transformation von $\mathfrak{A}$ mit $u \circ v = A(u)v$ bezeichnet. Dann ist $A(u)A(u^2) = A(u^2)A(u) \Leftrightarrow (JA.2)$ (s. [$\mathcal{KOE}99$] S.53).

(2.2.γ) Die Gleichungen, die durch $(JA.1)$ und $(JA.2)$ gegeben sind, resultierten aus Untersuchungen von Pasqual Jordan, der die algebraischen Gesetze für die Operatoren der Quantenmechanik (den Observablen) analysierte (s. z.B. [$\mathcal{MC}78$], [$\mathcal{JNW}34$]). Deshalb wurden diese Algebren zu Ehren von P. Jordan Jordan-Algebren genannt.

(2.2.δ) Sei $\mathfrak{A}$ eine halbeinfache Jordan-Algebra, d.h. das Radikal, das wir in (2.2.a) definieren, verschwindet. Falls $\mathfrak{A}$ keine Aufspaltung in eine direkte Summe aus zu $\mathfrak{A}$ und der Nullalgebra 0 verschiedenen Jordan-Algebren besitzt, so bezeichnet man $\mathfrak{A}$ als EINFACHE Jordan-Algebra.

(2.2.B1) Jede assoziative Algebra $\mathfrak{A}$ mit dem zusätzlichen Produkt $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $\forall\ x, y \in \mathfrak{A}$ ist eine Jordan-Algebra. Eine Algebra $\mathfrak{A}$, versehen mit diesem Produkt, bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^+$. Solche Jordan-Algebren gehören zu den „speziellen" Jordan-Algebren (s. dazu (2.2.B5)).

(2.2.ϵ) Jede assoziative Algebra $\mathfrak{A}$ wird zu einer Lie-Algebra, wenn wir $\mathfrak{A}$ mit der Multiplikation $x \cdot y = xy - yx =: [x, y]$ (s. (2.2.b)) versehen. Die Algebra mit diesem Produkt bezeichnet man mit $\mathfrak{A}^-$.

(2.2.B2) Die Vektorräume $Sym(n, \mathbb{R}), Herm(n, \mathbb{C})$ und $Herm(n, \mathbb{H})$ sind jeweils formal-reelle Jordan-Unteralgebren von $Mat(n, \mathbb{K})^+$, für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (s. (2.1.B1) und Satz 4.1.2).
Die Algebra $Herm(3, \mathbb{O})$ ist wegen Satz 8.3 in [$\mathcal{BRKOE}$] S.266 eine nicht-spezielle Jordan-Algebra (s. auch (2.2.B5)), und aufgrund des Satzes 4.1.2 ist sie, bis auf Isomorphie, die einzige nicht-spezielle formal-reelle Jordan-Algebra.

Bevor wir mit Beispielen fortfahren benötigen wir (s. z.B. [$\mathcal{BRKOE}$] I §6.):

Definition 2.2.2 (assoziative Bilinearform) *Sei σ eine symmetrische Bilinearform auf einer Algebra $(\mathfrak{A}, \circ)$, so nennt man σ* ASSOZIATIV *genau dann, wenn für alle $x, y, z \in \mathfrak{A}$*

$$\sigma(x \circ y, z) = \sigma(x, y \circ z) \text{ gilt.}$$

(2.2.B3) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und B eine symmetrische Bilinearform von V. Auf $U = V \times \mathbb{R}$ definiert man das Produkt

$$(v_1, \lambda_1) \circ (v_2, \lambda_2) := (\lambda_2 v_1 + \lambda_1 v_2, \lambda_1\lambda_2 + B(v_1, v_2)),$$

$\forall (v_i, \lambda_i) \in U, i = 1, 2$. Die so definierte Multiplikation $\circ$ in U ist offensichtlich kommutativ und für $x = (v, \lambda)$ erhalten wir: $x^2 = (2\lambda v, \lambda^2 + B(v, v))$. Setzt man $T(v) = A(v, 0)$ und $I = A(0, 1)$, dann ist $A(x) = T(v) + \lambda I$ und $A(x^2) = 2\lambda T(v) + ((\lambda^2 + B(v, v))I)$. Es ist nun leicht zu sehen, daß $A(x)$ und $A(x^2)$ kommutieren, folglich ist $(U, \circ)$ eine Jordan-Algebra (s. (2.2.β)).
Eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement e und mit einer assoziativen positiv-definiten Bilinearform $<.,.>$ nennt man EUKLIDISCH. Wegen Satz 2.2.4 gilt, daß eine Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ formal-reell ist genau dann, wenn sie euklidisch ist.
Dabei folgt „$\Leftarrow$" so: Wenn $a_1^2 + a_2^2 = 0$ für $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ gilt und $<.,.>$ eine assoziative positiv-definite Bilinearform ist, dann folgt

$$< a_1, a_1 > + < a_2, a_2 > = < e, a_1^2 > + < e, a_2^2 > = < e, a_1^2 + a_2^2 > = 0$$

und somit folgt $a_1 = 0$ und $a_2 = 0$ (hier geht ein, daß $< .,. >$ positiv-definit ist bzw. sein muß).
Für „$\Rightarrow$" siehe z.B. [$\mathcal{FAKO}$] Proposition 4.2, S.154.

Wenn also die symmetrische Bilinearform B von V unseres Beispiels zusätzlich positiv-definit ist, dann ist durch

$$< (v_1, \lambda_1), (v_2, \lambda_2) > := \lambda_1 \lambda_2 + B(v_1, v_2)$$

eine assoziative positiv-definite Bilinearform von U definiert, wie leicht nachzurechnen ist. Zudem existiert ein Einselment in $(U, \circ)$, nämlich $e = (0, 1)$; folglich ist $(U, \circ)$ euklidisch, also eine formal-reelle Jordan-Algebra.

(2.2.B4) Als einen wichtigen Spezialfall von (2.2.B3) betrachten wir nun das folgende Beispiel: Sei $\mathcal{X}$ ein Vektorraum der Dimension $n \geq 3$ über $\mathbb{R}$, d.h. $\mathcal{X} \cong \mathbb{R}^n$ (die Konstruktion ist für jeden beliebigen Körper durchführbar), $\mu : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine nicht-entartete, symmetrische Bilinearform, $e \in \mathcal{X}$ mit $e \neq 0$ und $\mu(e, e) = 1$. Dann setzt man $\lambda(v) := \mu(v, e)$, $\forall v \in \mathcal{X}$. Durch

$$u \circ v = \lambda(u)v + \lambda(v)u - \mu(u, v)e$$

wird auf $\mathcal{X}$ eine kommutative Multiplikation $\circ$ erklärt. Weil $v^2 = 2\lambda(v)v - \mu(v, v)e$ gilt, ist $A(v^2)$ eine Linearkombination von $A(v)$ und $A(e) = Id$. Somit ist $(JA.2)$ (vgl. (2.2.β)) erfüllt (s. [$\mathcal{BRKOE}$] §5, S.193 und [$\mathcal{SA}$] IV, S.36), und wir erhalten, daß $\mathcal{X}$ mit diesem Produkt eine Jordan-Algebra ist, bei der nach Konstruktion e das Einselement ist. Diese Algebra bezeichnet man mit $[\mathcal{X}, \mu, e]$.
Wählen wir nun das Einselement $e = (1, 0, ..., 0)^t$, so setzen wir $\mathcal{X} \ni \tilde{v}_1 = (\lambda_1, v_1)$ und $\mathcal{X} \ni \tilde{v}_2 = (\lambda_2, v_2)$. Weiter nehmen wir an, daß μ die Signatur (s, l) mit $s + l = n$ besitzt. Mit diesen Vereinbarungen gilt $\lambda(\tilde{v}_1) = \lambda_1$, $\lambda(\tilde{v}_2) = \lambda_2$ und folglich ergibt sich das Produkt von $\tilde{v}_1$ mit $\tilde{v}_2$ zu

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 \circ \tilde{v}_2 &= \lambda(\tilde{v}_1)\tilde{v}_2 + \lambda(\tilde{v}_2)\tilde{v}_1 - \mu(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)e \\ &= \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + 2\lambda_1\lambda_2 e + (-\lambda_1\lambda_2 - \sum_{i=2}^{s} v_1^i v_2^i + \sum_{j=s+1}^{n} v_1^j v_2^j)e. \end{aligned}$$

Die Analogie zum Produkt in (2.2.B3) erkennt man nun sofort und deshalb folgt, daß $[\mathcal{X}, \mu, e]$ eine formal-reelle Jordan-Algebra ist, falls μ die Signatur $(1, n-1)$ besitzt. Dann erhalten wir nämlich:

$$\tilde{v}_1 \circ \tilde{v}_2 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 + (\lambda_1\lambda_2 + B(v_1, v_2))e,$$

wobei B das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^{n-1}$ ist.
M.a.W.: Die Signatur von μ kann nicht willkürlich gewählt werden, wenn man $e = (1, 0, ..., 0)^t$ gewählt hat und die damit konstruierte Jordan-Algebra formal-reell sein soll (s. auch Satz 4.1.2).
Der Lorentzlichtkegel in (2.1.B2) ist somit der Kegel, der zu der formal-reellen Jordan-Algebra $[\mathcal{X}, \mu, e]$ gehört mit $e = (1, 0, ..., 0)^t$, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ und mit einem μ der Signatur $(1, n-1)$.

(2.2.B5) $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ([$\mathcal{BRKOE}$] S.227 ff.), die Menge der 3×3 hermiteschen Matrizen über $\mathbb{O}$, den Cayley-Oktaven, ist eine nicht-spezielle Algebra (VIII, Satz 8.3 in

[$\mathcal{BRKOE}$]). Eine Jordan-Algebra heißt SPEZIELL (s. für Beispiele (2.2.B2)) genau dann, wenn es eine assoziative Algebra $\mathfrak{B}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}$ zu einer Teilalgebra von $\mathfrak{B}^+$ (s. (2.2.B1)) isomorph ist (vgl. [$\mathcal{BRKOE}$] S.178). Die nicht-speziellen Algebren nennt man auch AUSNAHME-ALGEBREN. $\mathcal{H}_3(\mathbb{O})$ ist die einzige Ausnahme-Algebra, die formal-reell ist (s. [$\mathcal{BRKOE}$] §8 S.264 und Satz 4.1.2). Für die Produktstruktur dieser Algebra sei auf [$\mathcal{BRKOE}$] S.227 verwiesen.

Für den zweiten Struktursatz 4.2.1 sind die nachfolgenden Begriffe bzw. Aussagen über formal-reelle Jordan-Algebren von Bedeutung.
Eine formal-reelle Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ nennt man HALBEINFACH, falls das Radikal von $\mathfrak{A}$ verschwindet (s. [$\mathcal{BRKOE}$] S.319). Dabei ist das RADIKAL (s. [$\mathcal{KOE}$99] S.60) $rad(\mathfrak{A})$ einer Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ definiert durch

(2.2.a) $$rad(\mathfrak{A}) := \{a \in \mathfrak{A} | Spur(A(a \circ u)) = 0, \forall u \in \mathfrak{A}\}.$$

Für eine beliebige Algebra $\mathfrak{A}$ definiert man $\forall x, y \in \mathfrak{A}$ den KOMMUTATOR

(2.2.b) $$[x, y] := xy - yx$$

und $\forall x, y, z \in \mathfrak{A}$ den ASSOZIATOR

(2.2.c) $$(x, y, z) := (xy)z - x(yz).$$

Als Abkürzung z.B. für $[x, y] = 0$, $\forall y \in \mathfrak{A}$ oder $(x, y, z) = 0$, $\forall y, z \in \mathfrak{A}$ benutzt man die symbolische Schreibweise $[x, \mathfrak{A}] = 0$ oder entsprechend $(x, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 0$ u.ä..

Zur Definition des ZENTRUMS $\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ benötigt man den NUKLEUS $\mathcal{N}(\mathfrak{A})$, der gegeben ist durch:

(2.2.d) $$\mathcal{N}(\mathfrak{A}) := \{x \in \mathfrak{A} | (x, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, x, \mathfrak{A}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, x) = 0\};$$

dann ist

(2.2.e) $$\mathcal{Z}(\mathfrak{A}) := \{x \in \mathcal{N}(\mathfrak{A}) | [x, \mathfrak{A}] = 0\}.$$

Mit diesen Vereinbarungen können wir nun den nachfolgenden Satz formulieren (s. [$\mathcal{BRKOE}$] S.319 und [$\mathcal{BRKOE}$] S.26, 4.):

Satz 2.2.3 *Jede einfache formal-reelle Jordan-Algebra ist* ZENTRAL-EINFACH, *d.h.* $\mathfrak{A} \neq 0$ *und* 0, $\mathfrak{A}$ *sind die einzigen Ideale von* $\mathfrak{A}$. *Es gibt ein Einselement* $e \in \mathfrak{A}$ *und für das Zentrum* $\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$ *von* $\mathfrak{A}$ *gilt* $\mathcal{Z}(\mathfrak{A}) = \mathbb{R}e$.

Folgende äquivalente Kriterien existieren als Kennzeichnungen einer formal-reellen Jordan-Algebra (s. [$\mathcal{KOE}$99] Theorem 12, S.118):

Satz 2.2.4 *Für eine reelle Jordan-Algebra* $\mathfrak{A}$, $x, y \in \mathfrak{A}$ *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a.) $\mathfrak{A}$ *ist formal-reell.*

b.) *Die durch* $Spur(A(x \circ y))$ *definierte Bilinearform ist positiv-definit.*

c.) *Es gibt eine positiv-definite assoziative Bilinearform* σ *auf* $\mathfrak{A}$, *d.h.* $\forall x, y, z \in \mathfrak{A}$ *gilt* $\sigma(x \circ y, z) = \sigma(x, y \circ z)$ *(s. auch Definition 2.2.2), und* $\mathfrak{A}$ *besitzt ein Einselement* e.

3 Kegel, q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung und η_B

Ausgehend von homogenen regulären Kegeln wird dargelegt, wie man die von Dorfmeister ([$\mathcal{DO}$79*c*], [$\mathcal{DO}$74]) zu diesen Kegeln assoziierte algebraische Struktur erhält. Im Abschnitt 3.2 stellen wir die Verbindung zum ersten Kapitel her und betrachten Darstellungen.

3.1 Dorfmeisters algebraische Beschreibung der Kegel

Wir präsentieren Ergebnisse aus Dorfmeisters Dissertation [$\mathcal{DO}$74] und Habilitation [$\mathcal{DO}$79*a*], die für unsere Arbeit von Bedeutung sind und in verschiedenen Veröffentlichungen publiziert wurden (s. [$\mathcal{DO}$74], [$\mathcal{DO}$75], [$\mathcal{DO}$79*b*], [$\mathcal{DO}$79*c*] und [$\mathcal{DO}$79*d*]).
Aus Platzgründen ist es hier nicht möglich, die algebraische Beschreibung der homogenen regulären Kegel im Detail zu entwickeln, sondern wir skizzieren diese nur und geben entsprechende Literaturhinweise.

Folgende bedeutende Aussage zeigte Dorfmeister in seiner Dissertation [$\mathcal{DO}$74] (s. [$\mathcal{DO}$79*c*] Theorem 8.6, S.87):

Satz 3.1.1 *Zu jedem homogenen regulären Kegel Ω in V und jedem $c \in \Omega$ gibt es genau ein Paar $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$, bestehend aus einer kommutativen Algebra $\mathfrak{A}$ mit Einselement c, Linksmultiplikation $A(x)$, $\forall x \in \mathfrak{A}$ und einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ der Algebra $\mathfrak{A}$.*

Die Bedeutung des Satzes wird nachfolgend erläutert und verständlich gemacht; dazu sind einige Ausführungen nötig, mit denen wir nun beginnen:

I. *Die Invariante des Kegels*

Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und σ eine symmetrische positiv-definite Bilinearform von V. Für jeden regulären Kegel Ω (s. (2.1.a)) in V definiert man eine Funktion $\boldsymbol{\iota}$ (s. [$\mathcal{DOKO}$79] §3)

(3.1.a) $$\boldsymbol{\iota}(\Omega; x) := \int_{\Omega^\sigma} e^{-\sigma(x,y)} dy.$$

Dabei bezeichnet dy das Lebesgue-Maß auf V. Die so definierte Funktion $\boldsymbol{\iota}$ nennt man die Invariante des Kegels Ω. Die Invariante $\boldsymbol{\iota}$ wurde zuerst von Koecher zur Untersuchung von Kegeln betrachtet. Sie ist eine spezielle, strikt logarithmisch konvexe Abbildung (s. (3.1.A3)).
$\boldsymbol{\iota}$ weist $\forall x \in \Omega$ und $W \in Aut(\Omega)$ das folgende Transformationsverhalten auf:

(3.1.b) $$\boldsymbol{\iota}(\Omega; Wx) = |detW|^{-1}\, \boldsymbol{\iota}(\Omega; x)$$

und es gilt: Falls Ω ein homogener regulärer Kegel (s. (2.1.e)) ist, dann unterscheidet sich jede Funktion f auf Ω, die $\forall g \in Aut(\Omega)$ $f(gx) = det(g)^{-1} f(x)$ erfüllt, von $\boldsymbol{\iota}$ nur um einen konstanten Faktor. Der konstante Faktor ist positiv, wenn f

positiv ist (s. [$\mathcal{DO}$74] S.24).
Ist dx ein Lebesgue-Maß auf Ω, dann setzt man $d\mu(x) := \boldsymbol{\iota}(\Omega, x)dx$. Wegen der Eigenschaft (3.1.b) ist $d\mu$ ein bezüglich $Aut(\Omega)$ invariantes Maß auf Ω. Aus diesem Grund nennt man $\boldsymbol{\iota}$ „Invariante" des Kegels.

II. $\boldsymbol{\eta}$ *und daraus abgeleitete Größen*
Sei $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^+$ eine beliebige Abbildung, dann definieren wir

(3.1.c) $$Aut(\Omega, \eta) := \{W \in GL(V) | W\Omega = \Omega, \eta(Wx) = \alpha(W)\eta(x), \forall x \in \Omega\}.$$

$Aut(\Omega, \eta)$ ist eine Gruppe und $\alpha : Aut(\Omega, \eta) \to \mathbb{R}^+$ ein Homomorphismus der Gruppen (s. [$\mathcal{DO}$79d] §1).
Ist η stetig, so folgt, daß die Menge $Aut(\Omega, \eta)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $GL(V)$ und α ein stetiger Homomorphismus ist (s. [$\mathcal{DO}$79d] §1).
Wir betrachten im folgenden immer Tripel (Ω, η, e), wobei Ω ein homogener regulärer Kegel, e ein Element aus Ω und $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^+$ eine Abbildung ist, mit den folgenden Eigenschaften:

(3.1.A1) η ist beliebig oft differenzierbar,

(3.1.A2) η ist HOMOGEN, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $\forall x \in \Omega$ und $\beta > 0$ $\eta(\beta x) = \beta^\lambda \eta(x)$ gilt,

(3.1.A3) die durch $(u, v) \mapsto \Delta_x^u \Delta_x^v ln(\eta(x))$, $\forall u, v \in V$, $\forall x \in \Omega$ gegebene Bilinearform von V ist positiv-definit ($\Leftrightarrow \eta$ ist STRIKT LOGARITHMISCH KONVEX). Δ_x^u ist der Operator der Richtungsableitung in x in Richtung u,

(3.1.A4) für jede Folge x_n von Ω, die gegen einen Randpunkt von Ω strebt, konvergiert die Folge $\eta(x_n)$ gegen $+\infty$. Diese Eigenschaft von η wird „η ist EXPLODIEREND" genannt,

(3.1.A5) die Gruppe $Aut(\Omega, \eta)$ operiert transitiv auf Ω.

Wegen Satz 1.1 in [$\mathcal{DO}$79d] gilt: (3.1.A2) $\Rightarrow$ (3.1.A5) und (3.1.A3)+(3.1.A5) $\Rightarrow$ (3.1.A4). Einen Überblick über Untersuchungen zu logarithmisch konvexen Funktionen auf Ω gibt [$\mathcal{DOKO}$79].

Es ist klar, daß alle aus $F = (\Omega, \eta, e)$ abgeleiteten Objekte von der Wahl dieses Tripels F abhängen. Dies wird von uns nicht gesondert gekennzeichnet!

II.1 *Die Bilinearform* $\boldsymbol{\sigma}$
Man definiert eine Abbildung $\sigma : V \times V \to \mathbb{R}$, indem man $\forall u, v \in V$

(3.1.d) $$\sigma(u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v ln(\eta(x))|_{x=e}$$

setzt. Die so definierte Abbildung σ ist eine symmetrische, positiv-definite Bilinearform von V (s. auch (3.1.A3)). σ wird bilinear auf $V^{\mathbb{C}}$, die Komplexifizierung von V, fortgesetzt.
Durch σ kann eine Abbildung h von Ω in den σ-dualen Kegel Ω^{σ} (s. (2.1.c)) via

(3.1.e) $$\sigma(h(x), u) := -\Delta_x^u ln(\eta(x))$$

und eine Abbildung $H : \Omega \to End(V)$ durch

(3.1.f) $$\sigma(H(x)u, v) := \Delta_x^u \Delta_x^v ln(\eta(x))$$

(s. [$\mathcal{DO}$79b] S.322) definiert werden, wobei jeweils $x \in \Omega$ gilt.
$h : \Omega \to \Omega^{\sigma}$ ist ein birationaler Diffeomorphismus mit einzigem Fixpunkt e (s. [$\mathcal{DO}$79e] Lemma 2.5, S.47, auch für weitere Eigenschaften von H).

II.2 *Die kommutative Algebra* $\mathfrak{A}$

Für alle $u, v \in V$ kann man eine Multiplikation $\circ$ durch

(3.1.g) $$\sigma(u \circ v, w) := -\tfrac{1}{2}\Delta_x^u \Delta_x^v \Delta_x^w ln(\eta(x))|_{x=e}, \ \forall w \in V \text{ erklären.}$$

Den Vektorraum V mit dem so definierten Produkt $\circ$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A} = (V, \circ)$. Da $\forall u, v, w \in \mathfrak{A}$ $\sigma(u \circ v, w) = \sigma(v \circ u, w)$ gilt, schließt man, daß die Algebra $\mathfrak{A}$ kommutativ ist. Mit $A(u)$ bezeichnet man für alle $u \in \mathfrak{A}$ die Linksmultiplikation in $\mathfrak{A}$. Es gelten die zu (2.2.α) und (2.2.β) analogen Bemerkungen. Weil $\sigma(u \circ v, w) = \sigma(A(u)v, w)$ gilt, folgt, daß $\forall u \in V$ $A(u)$ durch $A(u) := -\frac{1}{2}\Delta_x^u H(x)|_{x=e}$ definiert werden kann (s. auch (3.3.f)).
$\mathfrak{A}$ ist nicht notwendigerweise eine Jordan-Algebra!
Die Bilinearform σ ist ASSOZIATIV, d.h. es gilt für alle $u, v, w \in V$:

(3.1.h) $$\sigma(u \circ v, w) = \sigma(u, v \circ w).$$

Nützliche Formeln und Beispiele:

(3.1.F) Sei V ein Vektorraum, der einem Matrizenvektorraum $Mat(n, \mathbb{K})$ entspricht für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Viel Nützliches für die Betrachtung über dem Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ kann man [$\mathcal{KOE}$60] §10 entnehmen. Weiter seien $X, U \in V$, wobei X invertierbar ist. Dann gelten die nachfolgenden Identitäten, die wir für die sich anschließenden Beispiele (3.1.B1-B3) zur Berechnung von σ und $\mathfrak{A}$ benötigen werden:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} det(X + tU) \quad = \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} det(X(Id + tX^{-1}U)) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= det(X)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(t^n det(\frac{1}{t}Id + X^{-1}U)) \\ &= det(X)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} t^n \left(\frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}}Spur(X^{-1}U) + \frac{1}{t^{n-2}}...\right) \\ &= det(X)Spur(X^{-1}U). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((X+tV)(X+tV)^{-1}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Id = 0 \\ \Leftrightarrow\ VX^{-1} + X\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(X+tV)^{-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(X+tV)^{-1} &= -X^{-1}VX^{-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Spur((X+tV)^{-1}U) &= Spur(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(X+tV)^{-1}U) \\ &= -Spur(X^{-1}VX^{-1}U). \end{aligned} \tag{3}$$

(3.1.B1) *Der klassische Kegel* $\Omega = Pos(n, \mathbb{R})$

Sei also $\Omega = Pos(n, \mathbb{R})$ (s. (2.1.B1)) und $\eta(X) = (det(X))^{-p}$ mit $p > 0$. Wählt man $p = \frac{n+1}{2}$, dann ist η eine Kegelinvariante, denn bei dieser Wahl hat η das in (3.1.b) angegebene Transformationsverhalten von $\boldsymbol{\iota}$. Weil der Wert von p für die Berechnungen von σ und dem Produkt von $\mathfrak{A}$ für uns unwesentlich ist, wählen wir der Einfachheit halber $p = 1$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta_x^u ln(\eta(X)) &= -\Delta_x^u ln(det(X)) && (4) \\ &= -\frac{1}{det(X)}\Delta_x^u det(X) \\ &= -Spur(X^{-1}U) \text{ wegen (1).} \\ \Delta_x^v\Delta_x^u ln(\eta(X)) &= Spur(X^{-1}VX^{-1}U). && (5) \\ \Delta_x^w\Delta_x^v\Delta_x^u ln(\eta(X)) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Spur((X+tW)^{-1}V(X+tW)^{-1}U) && (6) \\ &= -Spur(X^{-1}WX^{-1}VX^{-1}U + X^{-1}VX^{-1}WX^{-1}U). \end{aligned}$$

Wegen (5) gilt somit $\sigma(V,U) = Spur(VU)$. Mit diesem σ gilt $\Omega^\sigma = \Omega$. Das Produkt ergibt sich mit der Definition (3.1.g) und (6) der Rechnung zu:

$$W \circ V = \tfrac{1}{2}(WV + VW).$$

(3.1.B2) *Der Vinberg-Kegel* Ω_V

Sei V wie in (2.1.B5) angegeben, dann folgt aus $Y \in V$, daß $Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & y_4 \\ 0 & y_2 & y_5 \\ y_4 & y_5 & y_3 \end{pmatrix}$ gilt. Weil die Elemente aus Ω_V positiv-definit sind, gilt $y_1, y_2 \neq 0$ und wir können deshalb jedes Element Y aus Ω_V wie folgt diagonalisieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{y_4}{y_1} & -\frac{y_5}{y_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & 0 & y_4 \\ 0 & y_2 & y_5 \\ y_4 & y_5 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{y_4}{y_1} \\ 0 & 1 & -\frac{y_5}{y_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{y_4^2}{y_1} - \frac{y_5^2}{y_2} + y_3 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrizen, die zur Diagonalisierung verwendet werden, für jedes Y die Determinante Eins haben, erhalten wir schließlich eine „relative Invariante"

$$\eta(Y) = y_1^{-p_1} y_2^{-p_2} \left(-\frac{y_4^2}{y_1} - \frac{y_5^2}{y_2} + y_3\right)^{-p_3},$$

mit $p_i \in \mathbb{R}^+, i = 1,2,3$. Auf relative Invarianten gehen wir in dieser Arbeit nicht weiter ein; wir verweisen dafür aber auf [$\mathcal{DOKO}$77]. Wir wählen η als eine Invariante des Kegels, indem wir $p_1 = p_2 = \frac{3}{2}$ und $p_3 = 2$ wählen. Dadurch hat η das Transformationsverhalten wie $\boldsymbol{\iota}$ in (3.1.b). Somit folgt

$$\eta(Y) = (y_1 y_2)^{\frac{1}{2}} (det(Y))^{-2}$$

und weiter erhalten wir daraus

$$\sigma(Z, Y) = -(3z_1 y_1 + 3z_2 y_2 + 4(z_4 y_4 + z_5 y_5)).$$

Das Produkt von $Z, Y \in V$ ergibt sich zu:

$$Z \circ Y =$$

$$\begin{pmatrix} z_1 y_1 + \frac{4}{3} z_4 y_4 & 0 & \frac{1}{2}(z_4 y_3 + z_3 y_4 + z_1 y_4 + z_4 y_1) \\ 0 & z_2 y_2 + \frac{4}{3} z_5 y_5 & \frac{1}{2}(z_3 y_5 + z_5 y_3 + z_2 y_5 + z_5 y_2) \\ \frac{1}{2}(z_4 y_3 + z_3 y_4 + z_1 y_4 + z_4 y_1) & \frac{1}{2}(z_3 y_5 + z_5 y_3 + z_2 y_5 + z_5 y_2) & z_4 y_4 + z_5 y_5 + z_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

(3.1.B3) *Der Dorfmeister-Kegel* Ω_D

Seien $V \subset Mat(n+m, \mathbb{C})$ und Ω_D wie in (2.1.B4) beschrieben (s. auch Abschnitt 5.1). Wir erhalten eine Invariante η von Ω_D

$$\eta(X) = (det(X_1 - \overline{X}^t_{\frac{1}{2}} X_0^{-1} X_{\frac{1}{2}}))^{-\alpha} (det(X_0))^{-\beta} \text{ mit } \alpha = m + n,\ \beta = \frac{m+1}{2} + n.$$

Daraus ergibt sich mit (3.1.F):

$$\sigma(X, Y) = \alpha Spur(X_1 Y_1 + \overline{X}^t_{\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2}} + \overline{Y}^t_{\frac{1}{2}} X_{\frac{1}{2}}) + \beta Spur(X_0 Y_0).$$

Das Produkt von $X, Y \in V$ entspricht dann:

$$2X \circ Y =$$

$$\begin{pmatrix} Y_{\frac{1}{2}} \overline{X}^t_{\frac{1}{2}} + X_{\frac{1}{2}} \overline{Y}^t_{\frac{1}{2}} + Y_1 X_1 + X_1 Y_1 & X_1 Y_{\frac{1}{2}} + Y_1 X_{\frac{1}{2}} + X_{\frac{1}{2}} Y_0 + Y_{\frac{1}{2}} X_0 \\ \overline{Y}^t_{\frac{1}{2}} X_1 + \overline{X}^t_{\frac{1}{2}} Y_1 + Y_0 \overline{X}^t_{\frac{1}{2}} + X_0 \overline{Y}^t_{\frac{1}{2}} & X_0 Y_0 + Y_0 X_0 + \frac{\alpha}{2\beta}(\overline{X}^t_{\frac{1}{2}} Y_{\frac{1}{2}} + \overline{Y}^t_{\frac{1}{2}} X_{\frac{1}{2}} + X^t_{\frac{1}{2}} \overline{Y}_{\frac{1}{2}} + Y^t_{\frac{1}{2}} \overline{X}_{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix}.$$

III. *Mutationen*

Zur Beschreibung von $LieAut(\Omega, \eta)$, der Lie-Algebra von $Aut(\Omega, \eta)$ (s. (3.1.c)), benutzt man Mutationen einer kommutativen Algebra (s. V., [$\mathcal{DO}$79c] 7. oder [$\mathcal{DO}$75] §3). Dies ist eine für uns wichtige Tatsache.

Definition 3.1.2 (Mutation) *Sei* $\mathfrak{A}$ *eine kommutative Algebra über* $\mathbb{R}$. *Für ein* $z \in \mathfrak{A}$ *wird auf dem* $\mathfrak{A}$ *zugrunde liegenden Vektorraum eine neue Algebra durch* *das Produkt* $(x, y) \mapsto x(yz) + y(zx) - z(xy)$ *definiert. Diese Algebra bezeichnen wir mit* $\mathfrak{A}_z$ *und nennen sie die* MUTATION *von* $\mathfrak{A}$ *nach* z.

Bemerkungen und Beispiele:

(3.1.α) Die Multiplikation zweier Elemente x, y aus $\mathfrak{A}_z$ schreiben wir auch als $A_z(x)y = (A(xz) + [A(x), A(z)])y$, oder auch als $x * y$, wenn aus dem jeweiligen Zusammenhang klar hervorgeht, für welches $z \in \mathfrak{A}$ die Mutation gebildet wurde.

(3.1.β) Jacobson (z.B. in $[\mathcal{JA}]$) bezeichnet Mutationen als „Homotope“ und Mutationen nach invertierbaren Elementen als „Isotope“.

(3.1.B4) Besitzt $\mathfrak{A}$ ein Einselement e, dann gilt $\mathfrak{A}_e = \mathfrak{A}$.

(3.1.B5) Sei $\mathfrak{A} = Sym(2, \mathbb{R})^+$ (s. dazu auch (2.2.B2)) und wir wählen ein Element $Z \in Sym(2, \mathbb{R})$ und beliebige Elemente $X, Y \in Sym(2, \mathbb{R})$, die den folgenden Matrizen entsprechen: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$. Dann ist in $\mathfrak{A}_Z$ die Multiplikation von X, Y gegeben durch:

$$X * Y = \begin{pmatrix} ax & \frac{1}{2}(az + xc) \\ \frac{1}{2}(az + xc) & cz \end{pmatrix}.$$

IV. *Die q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung*

Ein Element $f \neq 0$ einer beliebigen Algebra $\mathfrak{B}$ nennt man idempotent oder ein IDEMPOTENT, wenn gilt:

(3.1.i) $$f^2 = f.$$

EINFACHE oder PRIMITIVE Idempotente sind solche, die nicht die Summe von zwei verschiedenen nicht verschwindenden Idempotenten sind (s. $[\mathcal{BRKOE}]$ S.52).

Eine lineare Abbildung $D : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ wird DERIVATION genannt, wenn $\forall u, v \in \mathfrak{B}$

(3.1.j) $$D(uv) = (Du)v + u(Dv)$$

gilt. Sei $\mathfrak{B}$ nun eine kommutative POTENZ-ASSOZIATIVE Algebra, d.h. es gilt $\forall u \in \mathfrak{B}$ und $\forall r, s \in \mathbb{N}$

(3.1.k) $$u^{r+s} = u^r u^s.$$

Jordan-Algebren sind potenz-assoziative Algebren. Einen Beweis für diese Aussage findet man zum Beispiel in $[\mathcal{KOE}99]$ auf den Seiten 54-55. Sei weiter f ein Idempotent und mit $B(x)$ notieren wir wie üblich $\forall x \in \mathfrak{B}$ die Linksmultiplikation in $\mathfrak{B}$, dann gilt $2B^3(f) - 3B^2(f) + B(f) = 0$. Das Minimalpolynom (s.

dazu z.B. [$\mathcal{BRKOE}$] S.16) von $B(f)$ ist in diesem Fall ein Teiler des Polynoms $2x(x-\frac{1}{2})(x-1) = 2x^3 - 3x^2 + x$, das die einfachen Nullstellen $0, \frac{1}{2}, 1$ aufweist. $B(f)$ hat demnach höchstens die Eigenwerte $0, \frac{1}{2}, 1$. Es resultiert die Zerlegung von $\mathfrak{B}$ in eine direkte Vektorraumsumme

(3.1.l) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(0) \oplus \mathfrak{B}(\tfrac{1}{2}) \oplus \mathfrak{B}(1) = \mathfrak{B}_0(f) \oplus \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}(f) \oplus \mathfrak{B}_1(f)$$

nach den Eigenräumen $\mathfrak{B}(i) = \mathfrak{B}_i(f)$ mit Eigenwerten $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ von $B(f)$. Zerlegungen dieser Art werden für uns wichtig sein; dabei ist die zu betrachtende kommutative Algebra $\mathfrak{A}$, die wir via (3.1.g) erhalten, nicht notwendig potenzassoziativ!

Voraussetzung:

(3.1.γ) Von nun an sei $\mathfrak{A}$ immer eine kommutative (nicht notwendig potenzassoziative) Algebra mit Einselement e und es existiere eine assoziative, positivdefinite Bilinearform σ auf $\mathfrak{A}$. Man definiert (s. z.B. [$\mathcal{DO}$79c], [$\mathcal{DO}$75]):

Definition 3.1.3 (q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung) *Eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ von $\mathfrak{A}$ ist eine Familie $(\mathfrak{A}_{ij}; 1 \leq i,j \leq q)$ von Untervektorräumen von $\mathfrak{A}$, so daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(K.1) $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji}$ *für* $1 \leq i,j \leq q$ *(Symmetrie der Indizes).*

(K.2) $\mathfrak{A} = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq q} \mathfrak{A}_{ij}$ *(direkte Summe von Vektorräumen).*

(K.3) *Für* $1 \leq i \leq q$ *gilt:*
a.) $\{0\} \neq \mathfrak{A}_{ii}$,
b.) $\mathfrak{A}_{ii}$ *ist eine Unteralgebra von* $\mathfrak{A}$.
Es gibt also ein Einselement $c_{ii} \neq 0$ *von* $\mathfrak{A}_{ii}$.

(K.4) *Für* $1 \leq i \leq j \leq q$ *können die Räume* $\mathfrak{A}_{ij}$ *wie folgt beschrieben werden:*
$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ij} &= \{x \in \mathfrak{A} | c_{ii}x = \frac{1}{2}x \text{ und } c_{jj}x = \frac{1}{2}x\} \text{ für } i<j,\\ \mathfrak{A}_{ii} &= \{x \in \mathfrak{A} | c_{ii}x = x\}.\end{aligned}$$

(K.5) *Für alle* $1 \leq i,j,k,r \leq q$ *gelten die Kompositionsregeln:*
$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kr} &= \{0\} \text{ für } \{i,j\} \cap \{k,r\} = \emptyset,\\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jr} &\subset \mathfrak{A}_{ir} \text{ für } i \neq r,\\ \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ij} &\subset \mathfrak{A}_{ii} + \mathfrak{A}_{jj}.\end{aligned}$$

(K.6) *Für alle* k *mit* $1 \leq k \leq q$ *ist* $\mathfrak{A}^{(k)} := \bigoplus_{k\leq i\leq j\leq q} \mathfrak{A}_{ij}$ *eine Unteralgebra mit Einselement* $e_k := \sum_{i=k}^q c_{ii}$ *und*
$$\mathfrak{A}_1^{(k)} := \mathfrak{A}_{kk},\ \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}^{(k)} := \bigoplus_{k<i\leq q} \mathfrak{A}_{ki} \text{ und } \mathfrak{A}_0^{(k)} := \bigoplus_{k<i\leq j\leq q} \mathfrak{A}_{ij}.$$
Die Mutationen $\mathfrak{A}_{c_{kk}}^{(k)}$ *sind für alle* $1 \leq k \leq q$ *Jordan-Algebren.*

(K.7) $A_{c_{ll}}(x_{ls})|_{\mathfrak{A}^{(k)}}$ *ist für alle* $1 \leq k < l \leq s \leq q$ *eine Derivation (s. (3.1.j)) der Jordan-Algebra* $\mathfrak{A}^{(k)}_{c_{kk}}$.

Eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung entspricht größtenteils einer Peirce-Zerlegung (für eine Definition s. z.B. [$\mathcal{BRKOE}$] VIII §2), die man von der Jordan-Theorie her kennt (s. auch Definition 3.2.8). Deshalb nennt man die Räume $\mathfrak{A}_{ij}$ auch PEIRCE-RÄUME und man definiert:

Definition 3.1.4 (q-Peirce-Zerlegung) *Man spricht, wenn* $\mathcal{C}$ *einer Familie von Untervektorräumen* $\mathfrak{A}_{ij}$ *mit* $1 \leq i, j \leq q$ *entspricht, die* $(K.1), (K.2), (K.4)$ *und* $(K.5)$ *der Definition 3.1.3 erfüllt, von einer* q-PEIRCE-ZERLEGUNG *(kurz q-PZ) von* $\mathfrak{A}$.

V. *Die Lie-Gruppen* Γ *und* $\Gamma^{(l)}$

Um aus der Algebra $\mathfrak{A}$ den dazugehörigen Kegel rekonstruieren zu können, bedarf es einiger Vorbereitungen, die wir nun kurz darstellen. Außerdem benötigen wir diese Betrachtungen, um eine optimale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung definieren zu können.
Sei $\mathcal{C}$ eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$. Man definiert damit (s. [$\mathcal{DO}79a$] S.31 oder [$\mathcal{DO}75$] §3) folgende Mengen (s. auch (3.1.α), II.2):

(3.1.m) $$\mathfrak{g}_{ij} := \{A_{c_{ii}}(x_{ij}) | x_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}\} \text{ für } 1 \leq i < j \leq q \text{ und}$$

(3.1.n) $$\mathfrak{g}_{ii} := \text{ die von } \{A(x_{ii}) | x_{ii} \in \mathfrak{A}_{ii}\} \text{ erzeugte Lie-Algebra.}$$

Satz 3.1.5 *Die Summe* $\mathfrak{g} = \sum_{i,j}^{q} \mathfrak{g}_{ij}$ *ist eine Lie-Algebra (Lie-Unteralgebra von* $(End(\mathfrak{A}))^-$ *(s. (2.2.ϵ))). Es resultieren die folgenden Lie-Klammerprodukte:*

a.) $[\mathfrak{g}_{sn}, \mathfrak{g}_{kr}] = 0$, *falls* $k < s$, $r \neq s$ *oder* $k = s$, $s < n$, $k < r$,

b.) $[\mathfrak{g}_{sn}, \mathfrak{g}_{ks}] \subset \mathfrak{g}_{kn}$, *falls* $k < s \leq n$ *und*

c.) $[\mathfrak{g}_{sn}, \mathfrak{g}_{sr}] \subset \mathfrak{g}_{rn}$, *falls* $r \leq n$.

Zum Beweis:
Der Beweis des Satzes wird erbracht, indem man die Lie-Klammerprodukte für die definierenden Elemente $A_{e_{ii}}(x_{ij})$ und $A(x_{ii})$ berechnet; dies wird in Satz 3.2 [$\mathcal{DO}75$] ausgeführt. Daraus ergibt sich die Aussage des Satzes 3.1.5 (s. Satz 3.3 in [$\mathcal{DO}75$]). □

Analog zu der Definition 3.1.3 (K.6) von $\mathfrak{A}^{(l)} \subset \mathfrak{A}$ betrachtet man Teilmengen $\mathfrak{g}^{(l)} \subset \mathfrak{g}$, die den folgenden Summen entsprechen:

(3.1.o) $$\mathfrak{g}^{(l)} := \sum_{l \leq i \leq j \leq q} \mathfrak{g}_{ij}.$$

Die $\mathfrak{g}^{(l)}$ sind für alle $1 \leq l \leq q$ Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, wie man aus Satz 3.1.5 ersieht. Dabei gilt $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$. Mit $\Gamma^{(l)}$ bezeichnen wir die zu $\mathfrak{g}^{(l)}$ gehörige Lie-Gruppe ($\mathbb{I}$-Komponente) für jedes l, d.h. es gilt:

(3.1.p) $$exp(\mathfrak{g}^{(l)}) = \Gamma^{(l)}.$$

VI. *Der Kegel* $Y_{\mathcal{C}}$

Sei $\mathfrak{A}$ eine abelsche Algebra und $\mathcal{C}$ eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung. Wir können nun die Konstruktion des zu den Daten $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ zugehörigen Kegels angeben (s. [$\mathcal{DO}$75]).
Für alle $1 \leq l \leq q$ bezeichnet man mit Y_{ll} den positiven Kegel der formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_{ll}$ (s. dazu insbesondere Proposition 3.1.8), d.h. $Y_{ll} := \{X^2 | X \in \mathfrak{A}_{ll}$ und X ist invertierbar$\}$.
Nach der Definition 3.1.3 (K.6) ist $\mathfrak{A}^{(l)}_{c_{ll}}$ eine Jordan-Algebra und bzgl. des Idempotents c_{ll}, dem Einselement von $\mathfrak{A}_{ll}$, erhalten wir eine Zerlegung von $\mathfrak{A}^{(l)}$ in entsprechende Eigenräume von c_{ll}; diese bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^{(l)}_i$ und $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ (s. (K.6), (3.1.l)). Folglich zerfällt jedes $x^{(l)} \in \mathfrak{A}^{(l)}$ in seine Eigenraumanteile, d.h. $x^{(l)} = x^{(l)}_0 + x^{(l)}_{\frac{1}{2}} + x^{(l)}_0$, wobei $x^{(l)}_i \in \mathfrak{A}^{(l)}_i$ für $i = 1, \frac{1}{2}, 0$.
Für alle $y_{ll} \in Y_{ll}$ ist der Endomorphismus $A^{(l)}_{\frac{1}{2}}(y_{ll}) := A(y_{ll})|_{\mathfrak{A}^{(l)}_{\frac{1}{2}}}$ invertierbar in $End(\mathfrak{A}^{(l)}_{\frac{1}{2}})$ (s. [$\mathcal{DO}$75] 4.2). Man definiert nun induktiv $\forall l$ mit $1 \leq l \leq q$:

(3.1.q) $$\left\{ \begin{array}{rcl} Y^{(q)} & := & Y_{qq}, \\ Y^{(l)} & := & \{x^{(l)} \in \mathfrak{A}^{(l)} | x^{(l)}_1 \in Y_{ll}, k^{(l)}_0(x^{(l)}) \in Y^{(l+1)}\}, \\ k^{(l)}_0 & := & x^{(l)}_0 - \frac{1}{2} e_{l+1}(x^{(l)}(A^{(l)}_{\frac{1}{2}}(x^{(l)}_1))^{-1} x^{(l)}_{\frac{1}{2}}), \\ Y_{\mathcal{C}} & := & Y^{(1)}. \end{array} \right.$$

Aufgrund des Satzes 4.2 in [$\mathcal{DO}$75] S.90 ergibt sich folgende Aussage:

Satz 3.1.6 *Sei $\mathcal{C}$ eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ und $1 \leq l \leq q$. Dann gilt:*

a.) *$Y^{(l)}$ ist ein homogener Kegel in $\mathfrak{A}^{(l)}$ und $e_l \in Y^{(l)} \cap Y^{(l)^{\sigma}}$,*

b.) *$\Gamma^{(l)}$ operiert transitiv auf $Y^{(l)}$.*

VII. *Die optimale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung*

Unter Berücksichtigung von IV. und VI. kann man nun definieren:

Definition 3.1.7 (optimale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung) *Eine q-$\mathfrak{K}$-*ZERLEGUNG *heißt* OPTIMAL, *wenn:*

(oK.1) *durch $\tau(u, v) = Spur(A(u \circ v))$ eine assoziative und positiv-definite Bilinearform auf $\mathfrak{A}$ gegeben ist*

und die Menge der $x \in \mathfrak{A}^{(k)}$, $1 \leq k \leq q$, so daß:

(oK.2) *$A_x(u)$ eine Derivation von $\mathfrak{A}^{(l)}_{c_{ll}}$ für alle $u \in \mathfrak{A}^{(k)}$ und alle $1 \leq l < k \leq q$ ist und*

(oK.3) *$A_x(u) \in LieAut(Y^{(k)})$ für alle $u \in \mathfrak{A}^{(k)}$*

gleich der Menge $\mathfrak{A}_{kk}$ ist (für $Y^{(k)}$ s. (3.1.q)).

Proposition 3.1.8 *Die $\mathfrak{A}_{kk}$ einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung sind für alle $k \in \{1, ..., q\}$ formal reelle Jordan-Algebren (nicht notwendig einfach).*

Beweis:
Sei $i \in \{1, ..., q\}$ fest gewählt. Nach $(K.3)$ der Definition 3.1.3 ist $\mathfrak{A}_{ii}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}_{ii} = (\mathfrak{A}_{ii})_{c_{ii}} \subset \mathfrak{A}^{(i)}_{c_{ii}}$ (s. auch (3.1.B4)) gilt und aufgrund von $(K.6)$ der Definition 3.1.3 $\mathfrak{A}^{(i)}_{c_{ii}}$ eine Jordan-Algebra ist, folgt, daß $\mathfrak{A}_{ii}$ ebenfalls eine Jordan-Algebra ist.
Unter Anwendung von Satz 2.2.4 (s. auch (oK.1)) folgt dann sogar, daß $\mathfrak{A}_{ii}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra ist. □

Damit beschließen wir die Ausführungen zu Satz 3.1.1 mit einer Anmerkung.

Bemerkung:
(3.1.δ) Die in diesem Abschnitt beschriebene Algebra $\mathfrak{A}$ mit einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ wird den Zugang zu allen homogenen Siegelgebieten (s. Kapitel 6) ermöglichen. Dies ist für die vorliegende Arbeit essentiell.

3.2 η der Bergmannmetrik

Zu der Bergmannmetrik gehört eine Funktion η_B, deren Existenz und Eigenschaften in diesem Abschnitt, soweit es für die Arbeit nötig erscheint, erklärt werden.

I. *2-Peirce Zerlegung*
Sei $p \in \mathfrak{A}_{11}$ ein beliebiges Idempotent (s. (3.1.i)), dann bilden wir die Peirce-Zerlegung

(3.2.a) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1(p) + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(p) + \mathfrak{A}_0(p)$$

von $\mathfrak{A}$. Dabei ist $\mathfrak{A}_i(p) = \{x \in \mathfrak{A} | px = ix\}$ mit $i \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diese Zerlegung nennt man 2-Peirce-Zerlegung, kurz 2-*PZ*.
Für jedes $x_i \in \mathfrak{A}_i(p)$ definiert man die Abbildung:

(3.2.b) $$A_j(x_i) := A(x_i)|_{\mathfrak{A}_j(p)} \text{ mit } j = 0, \tfrac{1}{2}, 1,\ i = 1, 0.$$

II.1 *Darstellung von $\mathfrak{A}_{ii}$ in $(End(\mathfrak{A}_{ij}))^+$*
Aus [$\mathcal{DO}$75] zitieren wir Lemma 3.1, S.86:

Lemma 3.2.1 *Für eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ von $\mathfrak{A}$ und alle $1 \leq i, j \leq q$ mit $i \neq j$ ist die Abbildung $\varphi_{ij} : \mathfrak{A}_{ii} \to End(\mathfrak{A}_{ij})^+$, $x_{ii} \mapsto \varphi_{ij}(x_{ii}) = 2A(x_{ii})|_{\mathfrak{A}_{ij}}$ ein unitärer Homomorphismus der Jordan-Algebren, d.h. es gilt: $\frac{1}{2}(\varphi_{ij}(x)\varphi_{ij}(y) + \varphi_{ij}(y)\varphi_{ij}(x))|_{\mathfrak{A}_{ij}} = \varphi_{ij}(xy)|_{\mathfrak{A}_{ij}}$, $\forall x, y \in \mathfrak{A}_{ii}$ und $\varphi_{ij}(c_{ii}) = Id_{\mathfrak{A}_{ij}}$.*

Korollar 3.2.2 *Ist $\mathfrak{A}_{ii} = \bigoplus_{l=1}^{t} \mathfrak{A}_{ii}^{l}$ die Summe einfacher Jordan-Algebren $\mathfrak{A}_{ii}^{l}$, so spaltet die Darstellung φ_{ij} auf, d.h. $\varphi_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{t} \varphi_{ij}^{l}$, wobei $\varphi_{ij}^{l} : \mathfrak{A}_{ii}^{l} \to End(\mathfrak{A}_{ij}^{l})^+$ und $\mathfrak{A}_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{t} \mathfrak{A}_{ij}^{l}$.*

Beweis:
Ein Beweis der Aussage folgt direkt aus Lemma 3.2.1 und den Kompositionsregeln für Peirce-Zerlegungen (s. z.B. $(K.5)$ der Definition 3.1.3). □

III. *η_B der Bergmannmetrik und Eigenschaften*

Im nachfolgenden Satz (s. [$\mathcal{DO}$79e] 2.1 u. Proposition 5.1 in [$\mathcal{GI}$63]) wird der Begriff des Siegelgebietes $\mathcal{S}(\Omega, F)$ benutzt. Siegelgebiete stehen im Mittelpunkt der Betrachtungen des 6. Kapitels, insbesondere ist nun für das Verständnis die Definition 6.2.3. von Bedeutung.

Satz 3.2.3 *Es bezeichne $B(v_1, u_1; v_2, u_2)$, $(v_k, u_k) \in \mathcal{S}(\Omega, F)$, $k = 1, 2$ den Bergmannkern (s. Definition 1.2.4) des Siegelgebiets $\mathcal{S}(\Omega, F)$, dann existiert eine Abbildung $\eta_B : \Omega \to \mathbb{R}^+$ (kurz $B \sim \eta_B$), so daß:*

a.) *η_B holomorph fortsetzbar auf $\Omega + iV$ ist,*

b.) $B(v_1, u_1; v_2, u_2) = \eta_B((2i)^{-1}(v_1 - \overline{v_2} - F(u_1, u_2)))$.

Bemerkung:
(3.2.α) Sei $W \in \Gamma$, wobei gilt, daß (Γ, F) zulässig ist (s. (6.2.c)), dann existiert ein $\hat{W} \in GL_{\mathbb{C}}(U)$ mit $(W, \hat{W}) \in GL(\mathcal{S}(\Omega, F))$ und

$$\eta_B(Wx) = det(W)^{-2}|det(\hat{W})|^{-2}\eta_B(x)$$

(s. Korollar 2.3 in [$\mathcal{DO}$79a]). Dabei werden die Determinanten in $GL_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}})$ bzw. in $GL_{\mathbb{C}}(U)$ berechnet.

Wir weisen insbesondere darauf hin, daß die meisten der nachfolgenden Aussagen für den Fall

$$\boldsymbol{\eta = \eta_B}$$

gemacht werden. Im allgemeinen sind die Aussagen sonst nicht richtig! Alle abgeleiteten Größen gehören dann zu der Funktion η_B der Bergmannmetrik, was wir auch ggf. durch den Index B kennzeichnen.

II.2 *... weiter mit der Darstellung von* $\mathfrak{A}_{ii}$ *in* $(End(\mathfrak{A}_{ij}))^+$

Wir betrachten nun im wesentlichen den q=2-Fall, da dieser für uns wichtig sein wird. Für diesen gilt:

$$\mathfrak{A} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}$$

und in der später verwendeten Notation

$$\mathfrak{A} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{1} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^{0} \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist wegen Lemma 3.2.1 sowohl ein Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$ als auch von $\mathfrak{A}^1$. Diese Darstellungen sind sogar in gewissen Fällen treu (injektiv), was nun erläutert werden soll. Dazu definiert man für ein beliebiges q:

(3.2.c) $$\mathfrak{X} := \{x \in \mathfrak{A} | A(x) \in LieAut(\Omega, \eta)\},$$

(3.2.d) $$\mathfrak{S} := \{x \in \mathfrak{A} | A_x(u) \in LieAut(\Omega, \eta), \forall u \in \mathfrak{A}\}.$$

Es gilt $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{X}$ (s. [$\mathcal{DO}$79*b*], Bemerkung 1.3). $\mathfrak{X}$ wird Vinberg-Kern genannt (s. [$\mathcal{DO}$79*d*] §2) und es folgt mit [$\mathcal{DO}$79*c*] Lemma 6.1, Theorem 6.3 und 7.3 (vgl. [$\mathcal{DO}$79*e*] Theorem 3.3)

Satz 3.2.4 *Es gelten die Gleichheiten:*

a.) $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{A}_{ii} = \{x \in \mathfrak{A} | A(x) \in LieAut(\Omega, \eta_B)\}$,

b.) $\mathfrak{A}_{kk} = \{a \in \mathfrak{A}^{(k)} | A_a(v) \in LieAut(\Omega, \eta_B), \forall v \in \mathfrak{A}^{(k)}\}$.

Da $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A} \cong V$ gilt, folgt $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_{11}$. Wir erhalten nun den nachfolgenden Satz 3.2.5 als Zusammenfassung der Theoreme 1.1 und 7.1 und Korollar 7.6 aus [$\mathcal{DO}$79*b*]. Dafür nutzen wir die Tatsache aus, daß $\mathfrak{A}_{11} = \mathfrak{A}^1 = \mathfrak{S} = \mathfrak{A}_1(c_{11})$ gilt (s. auch (3.2.a)).

Satz 3.2.5 **a.)** $\mathfrak{A}_{11} \neq 0$.

b.) *Wenn der Kegel irreduzibel ist (s. Abschnitt 6.6), gilt für alle Idempotente* $p \in \mathfrak{A}_{11}$, *daß die Abbildung (s. (3.2.b))*

$$A_{\frac{1}{2}} : \mathfrak{A}_1(p) \to End(\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(p))$$

injektiv ist. Dabei sind $\mathfrak{A}_1(p)$ *und* $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(p)$ *Peirce-Räume der 2-PZ von* $\mathfrak{A}$ *nach dem Idempotent* p *(s. (3.2.a)).*

c.) *Für* $c_{11} = Id_{\mathfrak{A}_{11}}$ *ist die Abbildung* $A_{\frac{1}{2}} : \mathfrak{A}_0(c_{11}) \to End(\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(c_{11}))$ *injektiv.*

Zum Beweis der Krümmungsvermutung ist es notwendig, verschiedene Zerlegungen für die Algebra $\mathfrak{A}$ zu verwenden. Dies soll nun präzisiert werden; dazu definiert man (s. [$\mathcal{DO}79d$] §3 2.):

Definition 3.2.6 (VOS) *Ein Tupel $c_1, ..., c_l$ von Elementen aus $\mathfrak{X}$ nennt man ein* VOLLSTÄNDIGES ORTHOGONALSYSTEM *von Idempotenten (kurz VOS), wenn $\forall 1 \leq i, j \leq l$ gilt:*

$$c_i c_j = \delta_{ij} c_i \text{ und } \sum_{i=1}^{l} c_i = e.$$

Beispiele:

(3.2.B1) Sei $(\mathfrak{A}, \mathcal{C})$ eine q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung, dann bildet die Menge der Einselemente $\{c_{ii}\}_{i=1}^{q}$ der Räume $\mathfrak{A}_{ii}$ von $\mathfrak{A}$ ein *VOS* (s. auch Definition 3.1.3).

(3.2.B2) Sei $\mathfrak{A} = Sym(n, \mathbb{R})^+$ (s. (2.2.B2)) und mit E_{ij} für $1 \leq i \leq j \leq n$ notieren wir die Elementarmatrizen, d.h. diejenigen $n \times n$ Matrizen, die nur in der *i-ten* Zeile und *j-ten* Spalte einen von Null verschiedenen Eintrag haben, der gleich Eins ist. Dann bildet $\{c_i = E_{ii}\}_{i=1}^{n}$ ein *VOS*.
Aber z.B. ist auch $\{p_1, p_2\}$ mit $p_1 = \sum_{i=1}^{m} c_i$, $p_2 = \sum_{j=m+1}^{n} c_j$ für ein beliebiges m mit $1 \leq m < n$ ein *VOS*.

Bilden $c_1, ..., c_l \in \mathfrak{X}$ ein *VOS*, dann definiert man (s. Abschnitt 3.2. I. und $(K.4)$ der Definition 3.1.3) $\forall j$ mit $1 \leq j \leq l$:

(3.2.e) $$\mathfrak{A}_s(c_j) := \{x \in \mathfrak{A} | c_j x = sx\} \text{ für } s = 0, \tfrac{1}{2}, 1,$$

(3.2.f) $$\mathfrak{A}_{jj} := \mathfrak{A}_1(c_j) \text{ und}$$

(3.2.g) $$\mathfrak{A}_{ij} := \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(c_i) \cap \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(c_j) \text{ für } 1 \leq i, j \leq l \text{ mit } i \neq j.$$

Für die in (3.2.e), (3.2.f) und (3.2.g) definierten Räume erhält man (vgl. [$\mathcal{DO}79d$] Satz 3.3, S.187):

Satz 3.2.7 *Für jedes VOS $c_1, ..., c_l \in \mathfrak{X}$ und die dazu nach (3.2.f) und (3.2.g) definierten Vektorräume $\mathfrak{A}_{ij}$ gelten die Kompositionsregeln (K.5) der Definition 3.1.3 (ersetze dort q durch l). Bezüglich σ, definiert in (3.1.d), sind die Räume $\mathfrak{A}_{ij}$ paarweise zueinander orthogonal und es gilt:*

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq l} \mathfrak{A}_{ij}.$$

Wir beschließen das Kapitel mit einer Definition.

Definition 3.2.8 (Peirce-Zerlegung) *Eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$, wie in Satz 3.2.7 beschrieben, nennen wir* PEIRCE-ZERLEGUNG *(kurz PZ) und die Räume $\mathfrak{A}_{ij}$ dieser Zerlegung nennen wir dementsprechend* PEIRCE-RÄUME.

4 Jordan-Algebren und Struktursätze

Die Struktursätze für formal-reelle Jordan-Algebren sind wichtige Wekzeuge für den Beweis der Krümmungsvermutung und sie werden in diesem Kapitel dargestellt.

4.1 Der erste Struktursatz

Die Koordinationssätze bzw. Struktursätze (s. [$\mathcal{BRKOE}$], [$\mathcal{JA}$] S.132 ff.) sind das Ergebnis der Analyse von Jordan-Algebren (von allgemeineren Algebren s. [$\mathcal{BRKOE}$] S.40). Wir geben den ersten Struktursatz für einfache formal-reelle Jordan-Algebren an.

Definition 4.1.1 (Rang einer Jordan-Algebra) *Der* RANG *einer Jordan-Algebra entspricht ihrem* PRIMITIV-GRAD. *Dabei entspricht der Primitiv-Grad einer Jordan-Algebra genau derjenigen natürlichen Zahl r, für die jedes VOS der Länge r nur aus primitiven Idempotenten besteht (s. auch (3.1.i)).*

Für den Primitiv-Grad siehe auch [$\mathcal{BRKOE}$] II. §4 6. Eine formal-reelle Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ besitzt nach Satz 2.2.3 ein Einselement e und es gilt der folgende fundamentale Satz aus der Jordan Theorie (s. [$\mathcal{BRKOE}$] S.331):

Satz 4.1.2 (erster Struktursatz) *Sei $\mathfrak{A}$ eine einfache, formal-reelle Jordan-Algebra vom Rang r. Dann ist $\mathfrak{A}$ isomorph zu einer der Algebren*

(A) $\mathbb{R}e$, *falls* $r = 1$.

(B) $[\mathcal{X}, \mu, e]$, *falls* $r = 2$. *Hierbei ist $\mathcal{X}$ ein Vektorraum der reellen Dimension $n \geq 3$ über $\mathbb{R}$ und μ eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathcal{X}$ der Signatur* $(1, n-1)$.

(II$\boldsymbol{\alpha}$) $\mathcal{H}(r, \mathbb{R})$, *falls* $r \geq 3$.

(II$\boldsymbol{\beta}$) $\mathcal{H}(r, \mathbb{C})$. *falls* $r \geq 3$.

(II$\boldsymbol{\gamma}$) $\mathcal{H}(r, \mathbb{H})$, *falls* $r \geq 3$.

(III) $\mathcal{H}(r, \mathbb{O})$, *falls* $r = 3$.

Bemerkung:
(4.1.$\boldsymbol{\alpha}$) (B), $(II\alpha, \beta, \gamma)$, (III) sind die Beispiele des Abschnitts 2.2. Für die verwendeten Begriffe siehe (2.2.δ) und Definition 2.2.1.
Die Nummerierungen haben wir aus [$\mathcal{BRKOE}$] übernommen. Sie sind historisch bedingt.

4.2 Der zweite Struktursatz

Der zweite Struktursatz klärt die Struktur einer beliebigen formal-reellen Jordan-Algebra auf, wobei der erste Struktursatz mit einfließt.

Um den zweiten Struktursatz formulieren zu können sind ein paar Vereinbarungen und Vorbereitungen vorzunehmen. Sei $\mathfrak{A}$ die direkte Summe von n einfachen, formal-reellen Jordan-Algebren $\mathfrak{A}^i$, das heißt

(4.2.a) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^1 \oplus ... \oplus \mathfrak{A}^n.$$

Dabei hat $\mathfrak{A}^i$ den Rang r_i und $\mathfrak{A}$ hat demzufolge den Rang $r = \sum_{i=1}^n r_i$. Wir klären nun den Zusammenhang zwischen den Peirce-Räumen von $\mathfrak{A}$ nach einem *VOS* $\mathcal{E} = \{e_1, ..., e_r\}$ primitiver Idempotenter und den Peirce-Räumen von $\mathfrak{A}$ bzgl. eines *VOS* $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_l\}$, bei dem jedes f_i die Summe von primitiven Idempotenten aus $\mathcal{E}$ ist, die alle genau zu einem einfachen Summanden von $\mathfrak{A}$ (s. (4.2.a)) gehören.
Dabei stellt man fest, daß jeder Peirce-Raum von $\mathfrak{A}$ bzgl. $\mathcal{E}$ genau in einem Peirce-Raum der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{F}$ enthalten ist, was wir nun auch zeigen. Bzgl. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ existieren die wie folgt bezeichneten Peirce-Zerlegungen von $\mathfrak{A}$:

(4.2.b) $$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{l} \mathfrak{A}^f_{ij} \text{ und } \mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{k,t=1\\ k\le t}}^{r} \mathfrak{A}^e_{kt}.$$

Dabei markiert e bzw. f die Zugehörigkeit des Peirce-Raumes zu der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ durch das *VOS* der e_j's bzw. der f_i's.
Weil die f_i's Summen der e_j's entsprechen, kann man offensichtlich jedes $e_i \in \mathcal{E}$ eindeutig einem Peirce-Raum $\mathfrak{A}^f_{i_f i_f}$ zuordnen. Daraus und weil $\mathfrak{A}^e_{ii} = \mathbb{R}e_i$ gilt, folgt $\mathfrak{A}^e_{ii} \subset \mathfrak{A}^f_{i_f i_f}$ für genau einen Index i_f. Mit i_f bezeichnen wir den Index, der i, betrachtet als Index von $\mathcal{E}$, dabei zugeordnet wird.
Sei zuerst $e_{j_1}, e_{j_2} \in \mathfrak{A}^f_{j_f j_f}$ mit $j_1 \neq j_2$ beliebig, aber fest aus dem gleichen Peirce Raum von $\mathfrak{A}$ bzgl. $\mathcal{F}$ gewählt. Folglich gilt $f_{j_f} e_{j_t} = e_{j_t}$ für $t = 1, 2$ und $\forall s \neq j_f$ gilt $f_s e_{j_t} = 0$. Wir zeigen, daß dann $\mathfrak{A}^e_{j_1 j_2} \subset \mathfrak{A}^f_{j_f j_f}$ gilt. Dazu wählen wir $0 \neq x \in \mathfrak{A}^e_{j_1 j_2}$ beliebig, aber fest. Es gilt $e_{j_t} x = \frac{1}{2}x$ mit $t = 1, 2$ und die Menge $\mathcal{N} = \{f_k, f_{j_f} - e_{j_1} - e_{j_2}, e_{j_1}, e_{j_2}\}$ ist ein *VOS* von $\mathfrak{A}$, dabei steht f_k stellvertretend für alle $f_i \in \mathcal{F}$ mit $i \neq j_f$. Die Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{N}$ enthält $\mathfrak{A}^e_{j_1 j_2}$ als direkten Summanden. Für jedes Idempotent aus $g \in \mathcal{N} \backslash \{e_{j_1}, e_{j_2}\}$ gilt deshalb $gx = 0$. Insbesondere gilt also $(f_{j_f} - e_{j_1} - e_{j_2})x = 0$, woraus folgt, daß $x \in \mathfrak{A}^f_{j_f j_f}$ gilt und somit folgt $\mathfrak{A}^e_{j_1 j_2} \subset \mathfrak{A}^f_{j_f j_f}$ für genau einen Index j_f.
Abschließend betrachten wir die Situation in der $e_j \in \mathfrak{A}^f_{j_f j_f}$ und $e_i \in \mathfrak{A}^f_{i_f i_f}$ beliebig, aber fest gewählt sind mit $i_f \neq j_f$. Dafür werden wir zeigen, daß auch $\mathfrak{A}^e_{ij} \subset \mathfrak{A}^f_{i_f j_f}$ für genau ein Indexpaar (i_f, j_f) gilt.
Sei dazu wieder $0 \neq x \in \mathfrak{A}^e_{ij}$ beliebig, aber fest gewählt, dann gilt $e_j x = e_i x = \frac{1}{2}x$

und die Menge $\mathcal{M} = \{f_t, f_{j_f} - e_j, e_j, f_{i_f} - e_i, e_i\}$ bildet ein *VOS* von $\mathfrak{A}$. Dabei steht f_t stellvertretend für alle Idempotente $f_s \in \mathcal{F}$ mit $s \neq j_f, i_f$ und die Behauptung $\mathfrak{A}^e_{ij} \subset \mathfrak{A}^f_{i_f j_f}$ für genau ein Indexpaar (i_f, j_f) folgt analog, wie in der zuvor diskutierten Situation.
Da $\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{l} \mathfrak{A}^f_{ij}$, $\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{t,l=1 \\ k \leq t}}^{r} \mathfrak{A}^e_{kt}$ gilt und jedes $\mathfrak{A}^e_{kt}$ in genau einem $\mathfrak{A}^f_{k_f t_f}$ enthalten ist, folgt leicht, daß jeder Peirce-Raum $\mathfrak{A}^f_{ij}$ die direkte Summe von Peirce-Räumen $\mathfrak{A}^e_{kt}$ ist und damit ist die am Anfang gemachte Behauptung gezeigt.

Mit den getroffenen Vereinbarungen können wir nun den zweiten Struktursatz formulieren. Insbesondere benutzen wir die Peirce-Zerlegungen von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{F}$ und $\mathcal{E}$ (s. (4.2.b)).

Satz 4.2.1 (zweiter Struktursatz)

1. *Jede formal-reelle Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ ist die Summe einfacher, formal-reeller Jordan-Algebren.*

2. *Sei $\mathfrak{A}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra*

2.1. *vom Rang $r \leq 2$, dann folgt:*
$\mathfrak{A} = \mathbb{R}$, *falls $r = 1$ gilt, bzw.*
$\mathfrak{A} = [\mathcal{X}, \nu, e]$ *oder* $\mathfrak{A} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, *falls $r = 2$ gilt.*

2.2. *vom Rang $r \geq 3$ mit folgender Zerlegung (s. (4.2.a))*

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{A}^i.$$

Die $\mathfrak{A}^i$ sind einfache formal-reelle Jordan-Algebren und diese Zerlegung entspricht der Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ nach den Einselementen $b_i \in \mathfrak{A}^i$. Alle Peirce-Räume $\mathfrak{A}^e_{kt}$ mit $k \neq t$ des VOS $\mathcal{E}$ primitiver Idempotenter (s. (4.2.b)), die einem $\mathfrak{A}^i$ mit i beliebig, aber fest zugeordnet werden, haben die gleiche von Null verschiedene Dimension.
Sei weiter $\mathcal{F} = \{f_1, ..., f_l\}$ ein wie zuvor beschriebenes VOS von $\mathfrak{A}$ mit $l \leq r$. Die zu den f_i's gehörende Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ (s. auch Definition 3.2.8 und Satz 3.2.7) ist

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{l} \mathfrak{A}^f_{ij}.$$

Wie einleitend erläutert ist dabei jeder Peirce-Raum $\mathfrak{A}^f_{ij}$ die direkte Summe von Peirce-Räumen $\mathfrak{A}^e_{st}$.
Behauptung: Gilt für zwei Peirce-Räume $\mathfrak{A}^f_{ij}, \mathfrak{A}^f_{jk}$ dieser Zerlegung mit $i \neq j \neq k$

$$\mathfrak{A}^f_{ij} \circ \mathfrak{A}^f_{jk} = 0,$$

dann folgt $\mathfrak{A}^f_{ij} = 0$ oder $\mathfrak{A}^f_{jk} = 0$.

Beweis:
Die erste Aussage folgt aus [$\mathcal{BRKOE}$] I §8. 3., da jede formal-reelle Jordan Algebra halbeinfach und jede einfache, formal-reelle Jordan-Algebra zentral einfach ist (s. (2.2.a-e) und Satz 2.2.3).
Die Behauptung in 2.1 folgt sofort aus dem ersten Struktursatz 4.1.2 und der ersten Aussage.
Wir zeigen nun die Aussage 2.2. Es gilt $\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i\leq j}}^{r} \mathfrak{A}_{ij}^{e}$ und wir nehmen an, daß es zwei Peirce-Räume $\mathfrak{A}_{ij}^{f} \neq 0$ und $\mathfrak{A}_{jk}^{f} \neq 0$ gibt mit $\mathfrak{A}_{ij}^{f} \circ \mathfrak{A}_{jk}^{f} = 0$, was zu einem Widerspruch geführt wird.
Sowohl $\mathfrak{A}_{ij}^{f}$ als auch $\mathfrak{A}_{jk}^{f}$ ist die direkte Summe von Peirce-Räumen $\mathfrak{A}_{qp}^{e}$. Weil die Idempotenten f_i die Summen primitiver Idempotenter aus $\mathcal{E}$ sind, die einem bestimmten $\mathfrak{A}^{t}$ zugeordnet werden können, ist jeder Peirce-Raum $\mathfrak{A}_{ij}^{f}$ in genau einer einfachen formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}^{t}$ enthalten. Daraus folgt aber, daß jeder Peirce-Raum $\mathfrak{A}_{qp}^{e}$ mit $q \neq p$, der $\mathfrak{A}_{ij}^{f}$ oder $\mathfrak{A}_{jk}^{f}$ zugeordnet wird, jeweils die gleiche von Null verschiedene Dimension hat.
Aus diesem Grund, weil $r \geq 3$ gilt und wegen Theorem 5 in [$\mathcal{JA}$] S.133 können wir ein $0 \neq x_{st} \in \mathfrak{A}_{st}^{e} \subset \mathfrak{A}_{ij}^{f}$ bzw. $0 \neq x_{tp} \in \mathfrak{A}_{tp}^{e} \subset \mathfrak{A}_{jk}^{f}$ mit $x_{st}^2 \in \mathbb{R}(e_s + e_t)$ und $x_{tp}^2 \in \mathbb{R}(e_t + e_p)$ wählen. Dabei sind e_s, e_t, e_p paarweise verschiedene primitive Idempotente aus $\mathcal{E}$, d.h. $s \neq t \neq p$ (hier geht die Voraussetzung $r \geq 3$ ein).
Die Erzeugnisse der Mengen $J_1 = \mathbb{R}\text{-}Span\{e_s, e_t, x_{st}\}$ und $J_2 = \mathbb{R}\text{-}Span\{e_t, e_p, x_{tp}\}$ sind Jordan-Algebren, denn $(JA.1)$ und $(JA.2)$ der Definition 2.2.1 sind erfüllt.
Da $x_{st} \neq 0$, $x_{tp} \neq 0$ und weil nach Voraussetzung $x_{st} \circ x_{tp} = 0$ gilt, folgt, daß auch $J_3 = \mathbb{R}\text{-}Span\{e_s, e_t, e_p, x_{st}, x_{tp}\}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{A}$ ist und somit sogar eine Jordan-Algebra (Bem.: J_3 setzt sich aus J_1 und J_2 zusammen).
Weil J_3 also eine Jordan-Algebra ist, muß $(JA.2)$ erfüllt sein. Wir zeigen nun, daß dies nicht stimmt. Wählen wir nämlich in J_3 die Elemente $u = x_{st} + x_{tp}$ und $v = x_{st}$ und setzen diese in die Bedingung $(JA.2)$ ein, wobei wir weiter $x_{st}^2 = \mu(e_s + e_t)$ und $x_{tp}^2 = \lambda(e_t + e_p)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ setzen, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
u \circ (u^2 \circ v) &= u^2 \circ (u \circ v) \\
(x_{st} + x_{tp})((\mu(e_s + e_t) + \lambda(e_t + e_p))x_{st}) &= (x_{st}^2 + x_{tp}^2) \circ (x_{st}^2) \\
(x_{st} + x_{tp})(\mu x_{st} + \lambda \frac{1}{2} x_{st}) &= (\mu(e_s + e_t) + \lambda(e_t + e_p)) \circ (\mu(e_s + e_t)) \\
(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\mu)(e_s + e_t) &= \mu^2(e_s + e_t) + \lambda\mu e_t \\
e_s &= e_t.
\end{aligned}
$$

Da $e_s \neq e_t$ gilt, ist die Bedingung $(JA.2)$ für J_3 offensichtlich nicht erfüllt, also ist J_3 keine Jordan-Algebra und somit gilt nicht $\mathfrak{A}_{ij}^{f} \neq 0$ und $\mathfrak{A}_{jk}^{f} \neq 0$, sondern $\mathfrak{A}_{ij}^{f} = 0$ oder $\mathfrak{A}_{jk}^{f} = 0$, was zu zeigen war. $\square$

5 Beispiele für Kegel

In Abschnitt 3.1 wurde jedem homogenen regulären Kegel eine Algebra $\mathfrak{A}$ und somit auch eine natürliche Zahl q zugeordnet. Falls q=1 gilt, so ist die Algebra $\mathfrak{A}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra. Es werden in diesem Kapitel zwei interessante Beispiele für Kegel mit q=2 und q=3 angegeben.

5.1 Der Dorfmeister-Kegel für den q=2 Fall

Dieser Kegel war zur Gewinnung der Ideen besonders wichtig, deshalb ist ihm dieser Abschnitt gewidmet (s. insbesondere (3.1.B3)).

Lemma 5.1.1 *Auf den reellen $n \times n$-Matrizen $Mat(n, \mathbb{R})$ ist*

$$<X, Y>_{\mathbb{R}} := Spur(XY^t)$$

mit $X, Y \in Mat(n, \mathbb{R})$ eine positiv-definite symmetrische Bilinearform.
Auf den komplexen $n \times n$-Matrizen $Mat(n, \mathbb{C})$ ist

$$<X, Y>_{\mathbb{C}} := Spur(X\overline{Y}^t)$$

mit $X, Y \in Mat(n, \mathbb{C})$ eine positiv-definite hermitesche Bilinearform.

Beweis:
Wir zeigen die zweite Aussage. Die Linearitätseigenschaften, welche $<.,.>_{\mathbb{C}}$ erfüllen muß, um eine Bilinearform zu sein, folgen direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Spur. Die Hermitezität der Bilinearform $<.,.>_{\mathbb{C}}$ zeigt man wie folgt: Es gilt $\forall X, Y \in Mat(n, \mathbb{C})$

$$< X, Y >_{\mathbb{C}} = Spur(X\overline{Y}^t) = \overline{Spur(\overline{X}Y^t)} = \overline{Spur((Y\overline{X}^t)^t)} = \overline{Spur(Y\overline{X}^t)} = \overline{< Y, X >_{\mathbb{C}}}.$$

Bleibt noch zu zeigen, daß $<.,.>_{\mathbb{C}}$ positiv-definit ist. Dazu betrachten wir die Elementarmatrizen E_{ij} (s. (3.2.B2)), die eine $\mathbb{C}$-Basis von $Mat(n, \mathbb{C})$ bilden. Da $<xE_{ij}, xE_{ij}>_{\mathbb{C}} = |x|^2 > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{C}$ gilt, folgt mit der Linearität der Spur und der Eigenschaft, daß $<E_{ij}, E_{kt}> \neq 0$ gilt, genau dann falls $j = t$ und $k = i$ gilt, daß für alle $0 \neq X \in Mat(n, \mathbb{C})$ $<X, X>_{\mathbb{C}} > 0$ gilt.
Für die reellen Matrizen und $<.,.>_{\mathbb{R}}$ funktioniert der Beweis analog. □.

Bemerkung:
(5.1.$\boldsymbol{\alpha}$) Wenn man die Zeilenvektoren der Matrizen $Mat(n, \mathbb{K})$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ der Reihe nach als Komponenten eines Vektors verwendet, so erhält man eine kanonische Identifizierung von $Mat(n, \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}^{n^2}$. Bei dieser Identifizierung entspricht offensichtlich die in Lemma 5.1.1 angegebene Bilinearform von $Mat(n, \mathbb{K})$ dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{K}^{n^2}$.

Beschreibung des Kegels $\Omega_D \subset V$

Wir betrachten den Untervektorraum $V \subset Mat(n+m, \mathbb{C})$ (vgl. (2.1.B4)), in dem jedes Element $A \in V$ einer speziellen 2×2 Blockmatrix entspricht, d.h. es gilt:

$$V \ni A = \begin{pmatrix} A_1 & A_{\frac{1}{2}} \\ \overline{A}_{\frac{1}{2}}^t & A_0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist A_1 eine $n \times n$ hermitesche Matrix, d.h. $\overline{A}_1^t = A_1$, A_0 ist eine reelle $m \times m$ symmetrische Matrix, also $A_0^t = A_0$ und $A_{\frac{1}{2}}$ ist eine komplexe $n \times m$-Matrix. Jedes Element aus V ist selbstadjungiert bzgl. des Standardskalarproduktes des Vektorraumes $\mathbb{C}^{n+m}$. In V betrachten wir den Kegel Ω_D, der bzgl. des Standardskalarproduktes von $\mathbb{C}^{n+m}$ positiv-definiten Matrizen. Für alle $X \in V$ gilt also $X = \overline{X}^t$, was wir bei einer analogen Beweisführung, wie beim Beweis des Lemmas 5.1.1, ausnutzen können, um zu zeigen, daß

(5.1.a) $$<X, Y>_{\mathbb{C}} = Spur(X\overline{Y}^t)$$

eine positiv-definite hermitesche Bilinearform von V ist. Für alle $A, B \in V$ gilt:

$$Spur(AB) = Spur(A_0B_0 + A_{\frac{1}{2}}\overline{B}_{\frac{1}{2}}^t) + Spur(\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t B_{\frac{1}{2}} + A_1B_1).$$

Eine auf Ω_D einfach transitiv operierende Gruppe

Im folgenden zeigen wir etwas ausführlicher, daß eine Untergruppe der komplexen oberen Dreiecksmatrizen, die in $GL(n+m, \mathbb{C})$ enthalten ist und die wir mit G_D bezeichnen, transitiv auf Ω_D operiert; die sich anschließenden Betrachtungen waren insbesondere für die Berechnung der Algebra $\mathfrak{A}$ in Abschnitt 3.1 hilfreich (s. (3.1.B3)).

Wir beschreiben nun die Elemente aus G_D. Sei Q eine 2×2 Blockmatrix mit

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

wobei $Q_0 \in GL(m, \mathbb{R})$, $Q_1 \in GL(n, \mathbb{C})$ und $Q_2 \in Mat(n \times m, \mathbb{C})$ gilt. Q_0 und Q_1 sollen sogar die folgende Gestalt haben:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11}^0 & q_{12}^0 & \cdots & q_{1m}^0 \\ 0 & q_{22}^0 & \cdots & q_{2m}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{mm}^0 \end{pmatrix}, \; Q_1 = \begin{pmatrix} q_{m+1,m+1}^1 & q_{m+1,m+2}^1 & \cdots & q_{m+1,m+n}^1 \\ 0 & q_{m+2,m+2}^1 & \cdots & q_{m+2,m+n}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_{m+n,m+n}^1 \end{pmatrix}.$$

Die Menge der Matrizen mit der analogen Gestalt zu oben beschriebenen Q bildet bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Untergruppe G_D in der Gruppe der in $GL(n+m, \mathbb{C})$ enthaltenen komplexen oberen Dreiecksmatrizen. Von dieser Gruppe G_D soll nun gezeigt werden, daß sie transitiv auf Ω_D operiert.

Dazu zeigen wir zuerst, daß die Operation von G_D auf Ω_D via

(5.1.b) $$(A, Q) \in G_D \times \Omega_D \mapsto QA\overline{Q}^t$$

Ω_D invariant läßt. Für alle $Q \in G_D$ und $\forall A \in \Omega_D$ sollte demnach ebenfalls $QA\overline{Q}^t$ in Ω_D enthalten sein. Da A positiv-definit ist, folgt offensichtlich, daß $QA\overline{Q}^t$ auch

wieder positiv-definit ist. Durch einfaches Ausmultiplizieren sieht man zum einen, daß $QA\overline{Q}^t$ hermitesch ist und zum anderen, daß die Komponenten des Produkts die entsprechenden Eigenschaften eines Elements aus Ω_D besitzen. Demzufolge gilt $QA\overline{Q}^t \in \Omega_D$.
Für den Beweis der Transitivität genügt es zu zeigen, daß sich jedes Element $A \in \Omega_D$ als $Q\overline{Q}^t$ für ein geeignetes $Q \in G_D$ schreiben läßt, denn dann ist die Identität auf jedes Element von Ω_D transformierbar, ergo operiert die Gruppe G_D transitiv.
Bekanntlich operieren die oberen Dreiecksmatrizen, die in $GL(l,\mathbb{K})$ enthalten sind, via $(Z,X) \in GL(l,\mathbb{K}) \times Pos(l,\mathbb{K}) \mapsto ZX\overline{Z}^t$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ transitiv auf den positiv-definiten Matrizen $Pos(l,\mathbb{K})$ (s. z.B. [$\mathcal{DO}79a$]), was wir anschließend verwenden werden. Die Multiplikation von Q mit $\overline{Q}^t$ ergibt:

$$\textbf{(5.1.c)} \qquad \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{Q}_1^t & 0 \\ \overline{Q}_2^t & \overline{Q}_0^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_2\overline{Q}_2^t + Q_1\overline{Q}_1^t & Q_2\overline{Q}_0^t \\ Q_0\overline{Q}_2^t & Q_0\overline{Q}_0^t \end{pmatrix}.$$

Sei A ein beliebiges Element aus Ω_D. Damit A einem Produkt $Q\overline{Q}^t$ entsprechen kann, muß $A_0 = Q_0\overline{Q}_0^t$ gelten, was aufgrund obiger Ausführungen möglich ist. Dadurch ist Q_0 im wesentlichen festgelegt. $A_{\frac{1}{2}}$ entspricht $Q_2\overline{Q}_0^t$, somit ist $\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t$ gleich $Q_0\overline{Q}_2^t$ und $Q_2 = A_{\frac{1}{2}}(\overline{Q}_0^t)^{-1}$, wodurch Q_2 und somit auch $\overline{Q}_2^t$ in Abhängigkeit von der Komponente $A_{\frac{1}{2}}$ von A und Q_0 vollkommen bestimmt sind. Weitere Identitäten, die sich direkt ableiten, sind:

$$\overline{Q}_2^t = Q_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t \text{ und } A_0^{-1} = (\overline{Q}_0^t)^{-1}Q_0^{-1}.$$

Somit ergibt sich, daß

$$A_1 = Q_1\overline{Q}_1^t + Q_2\overline{Q}_2^t = Q_1\overline{Q}_1^t + A_{\frac{1}{2}}(\overline{Q}_0^t)^{-1}(Q_0)^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t = Q_1\overline{Q}_1^t + A_{\frac{1}{2}}A_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t$$

gilt. Den letzten Summanden der Gleichungskette können wir schon durch die Komponenten von Q ausdrücken; also müssen wir Q_1 so wählen können, daß die Gleichungskette erfüllt wird. Dazu zeigen wir, daß $A_1 - A_{\frac{1}{2}}A_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t$ hermitesch und positiv-definit ist. Ersteres ist klar und letzteres ist aufgrund folgender Gleichung richtig, denn es gilt

$$\textbf{(5.1.d)} \begin{pmatrix} Id & -A_{\frac{1}{2}}A_0^{-1} \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_{\frac{1}{2}} \\ \overline{A}_{\frac{1}{2}}^t & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -A_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t & Id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 - A_{\frac{1}{2}}A_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix},$$

woraus folgt, daß $A_1 - A_{\frac{1}{2}}A_0^{-1}\overline{A}_{\frac{1}{2}}^t$ positiv-definit ist. Wir können aber, mit der gleichen Argumentation wie für A_0 und Q_0, ein Element Q_1 wählen, so daß

$$Q_1\overline{Q}_1^t = A_1 - \overline{A}_{\frac{1}{2}}^t A_0^{-1} A_{\frac{1}{2}}$$

gilt. Somit folgt, daß die Gruppe G_D in der angegebenen Art und Weise (s. (5.1.b)) transitiv auf Ω_D operiert.

Die Automorphismengruppe von Ω_D

Dorfmeister berechnete in [$\mathcal{DO}79a$] die Automorphismengruppe von Ω_D^σ, die wir in (2.1.e) definierten. Wir erhalten unter Ausnutzung von [$\mathcal{DO}79a$] (für σ, α, β s. (3.1.B3)):

$$\begin{aligned} Aut(\Omega_D) \;=\; & \{A \to B \mid B_0 = Q_0 A_0 \overline{Q}_0^t, B_{\frac{1}{2}} = \frac{\beta}{\alpha} Q_2 A_0 \overline{Q}_0^t + Q_1 A_{\frac{1}{2}} \overline{Q}_0^t \\ & B_1 = \frac{\beta}{\alpha} Q_2 A_0 \overline{Q}_2^t + Q_1 A_{\frac{1}{2}} \overline{Q}_2^t + Q_2 \overline{A}_{\frac{1}{2}}^t \overline{Q}_1^t + Q_1 A_1 \overline{Q}_1^t, \ mit \\ & Q_0 \in GL(m, \mathbb{R}), Q_2 \in Mat(m \times n, \mathbb{C}), Q_1 \in GL(n, \mathbb{C})\} \\ & \cdot \{Id, A \to \overline{A}\}. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

(5.1.β) Sei $A = Q\overline{Q}^t$ für ein beliebiges Element $A \in \Omega_D$ mit entsprechendem $Q \in G_D$. Dann kann man erzwingen, daß für die Diagonalelemente q_{ii} von Q $0 \neq q_{ii} \in \mathbb{R}^+$ gilt. Eine solche obere Dreiecksmatrix Q ist für jedes A aus Ω_D eindeutig bestimmt, und diese Matrizen bilden eine Untergruppe von G_D, die wir mit G_D^+ bezeichnen wollen. G_D^+ operiert einfach transitiv auf Ω_D, und die Lie-Algebra von G_D^+ ist $\mathbb{R}$-spaltend.

(5.1.γ) Der σ-duale Kegel Ω_D^σ und alle dazugehörigen Daten werden in [$\mathcal{DO}79a$] als Beispiel B.3 beschrieben (s. für σ usw. auch (3.1.B3)). Es gilt $\Omega_D^\sigma \neq \Omega_D$, d.h. der Kegel ist nicht selbstdual und folglich sind die darüber erzeugten homogenen Siegelgebiete nicht quasisymmetrisch (s. Satz 7.1.4 (2)).
q der abgeleiteten Algebra $\mathfrak{A}$ ist nicht Eins; tatsächlich gilt q=2 (s. Definition 3.1.3 und insbesondere [$\mathcal{DO}79a$] S.41).

(5.1.δ) Sei $\mathcal{S}$ ein über Ω_D konstruiertes homogenes Siegelgebiet (s. Kapitel 6), dann existieren immer Richtungen auf $\mathcal{S}$ mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik. Wie man solche Richtungen finden kann, diskutieren wir an einer geeigneten Stelle der Arbeit (s. (9.2.α)).

Abschließend geben wir für Ω_D die Komponenten von $\mathfrak{A}$ an, die einer q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ zugrunde liegen. Dies entnehmen wir aus [$\mathcal{DO}79a$] S.41 (wir betrachten hier den σ-dualen Kegel!). Es gilt q=2 und

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{22}$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{11} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} | A_0 \in \mathcal{H}(m, \mathbb{R}) \right\}, \\ \mathfrak{A}_{22} &= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | A_1 \in \mathcal{H}(n, \mathbb{C}) \right\}, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{\frac{1}{2}} \\ \overline{A}^t_{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} | A_{\frac{1}{2}} \in Mat(n \times m, \mathbb{C}) \right\}.$$

5.2 Ein Beispiel für q=3

Jedem homogenen regulären Kegel kann aufgrund des Satzes 3.1.1 eindeutig eine natürliche Zahl q zugeordnet werden. In diesem Abschnitt wird ein mögliches Beispiel für q=3 diskutiert.

Bevor wir ein Beispiel für q=3 angeben, treffen wir ein paar Vereinbarungen. Jedes Element $x \in \mathbb{H}$ läßt sich bekanntlich durch $x_l \in \mathbb{R}$ mit $l = 1, 2, 3, 4$ und den imaginären Einheiten $i, j, k \in \mathbb{H}$ mit $ij = k$ usw. darstellen (s. z.B. [$\mathcal{KOE}$60] §10):

$$\begin{aligned} x &= x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 \\ &= x_1 + ix_2 + j(x_3 - ix_4). \end{aligned}$$

Das heißt $\mathbb{H} \cong \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C}$, und für jedes $x \in \mathbb{H}$ existiert eine Darstellung der Form $x = z_1 + jz_2$ mit $z_i \in \mathbb{C}$. Demnach kann die folgende Konjugation in $\mathbb{H}$ definiert werden:

(5.2.a)
$$\begin{aligned} \hat{} : \mathbb{H} &\to \mathbb{H}, \\ x = z_1 + jz_2 &\mapsto \hat{x} = z_1 - jz_2. \end{aligned}$$

Außerdem definiert man mit Hilfe von (5.2.a) eine Projektion von $\mathbb{H}$ auf die Standardeinbettung von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{H}$ durch

(5.2.b)
$$\mathbb{H} \ni x = z_1 + jz_2 \mapsto \tfrac{1}{2}(x + \hat{x}) = z_1 \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

Diese Projektion kann in kanonischer Weise auf beliebigen quaternionischen Vektorräumen definiert werden, indem jede Komponente projiziert wird. Wir erhalten z.B. für $Mat(n \times m, \mathbb{H})$:

(5.2.c)
$$Mat(n \times m, \mathbb{H}) \ni A \mapsto \tfrac{1}{2}(A + \hat{A}) \in Mat(n \times m, \mathbb{C}) \subset Mat(n \times m, \mathbb{H}),$$

was wir im folgenden verwenden werden.

Beschreibung des Kegels $\Omega_3 \subset V$

Analog zu den Definitionen in Abschnitt 5.1 betrachten wir nun einen Untervektorraum V von $Mat(m + n + s, \mathbb{H})$, der wie folgt gegeben ist:

(5.2.d)
$$V := \{X \in Mat(m+n+s,\mathbb{H}) | X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix},$$
$$\text{mit } X_{21} = \overline{X}^t_{12}, X_{31} = \overline{X}^t_{13}, X_{32} = \overline{X}^t_{23}, X_{11} \in \mathcal{H}(m,\mathbb{R}),$$
$$X_{22} \in \mathcal{H}(n,\mathbb{C}), X_{33} \in \mathcal{H}(s,\mathbb{H}), X_{12} \in Mat(m \times n,\mathbb{C}),$$
$$X_{13} \in Mat(m \times s,\mathbb{H}), X_{23} \in Mat(n \times s,\mathbb{H}) \ \}.$$

Die reellen Dimensionen der Räume, in denen die Diagonalelemente X_{ii} mit $i = 1, 2, 3$ liegen, sind:

(5.2.e)
$$dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}(m,\mathbb{R}) = \tfrac{m(m+1)}{2},\ dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}(n,\mathbb{C}) = n^2,\ dim_{\mathbb{R}}\mathcal{H}(s,\mathbb{H}) = 2s^2 - s.$$

Wir betrachten nun die Menge:

(5.2.f)
$$\Omega_3 := \{X \in V | X > 0\} = V \cap Pos(m+n+s,\mathbb{H}).$$

Die Menge Ω_3 der positiv-definiten Matrizen in V ist ein regulärer Kegel.

Homogenität von Ω_3

Ω_3 ist sogar homogen, wie nun gezeigt wird. Dazu geben wir eine Untergruppe $G_3 \subset GL(m+n+s,\mathbb{H})$ an, von der wir zeigen, daß sie via

(5.2.g)
$$G_3 \times \Omega_3 \to \Omega_3,$$
$$(Q, A) \mapsto QA\overline{Q}^t$$

transitiv auf Ω_3 operiert. G_3 besteht aus speziellen unteren Dreiecksmatrizen aus $GL(m+n+s,\mathbb{H})$, d.h. genauer für jedes $Q \in G_3$ gilt

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ Q_4 & Q_2 & 0 \\ Q_5 & Q_6 & Q_3 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $Q_1 \in GL(m,\mathbb{R})$, $Q_2 \in GL(n,\mathbb{C})$ und $Q_3 \in GL(s,\mathbb{H})$. Außerdem gilt $Q_4 \in Mat(n \times m,\mathbb{C})$, $Q_5 \in Mat(s \times m,\mathbb{H})$ und $Q_6 \in Mat(s \times n,\mathbb{H})$. Man zeigt hier für Ω_3, wie zuvor für Ω_D in Abschnitt 5.1, daß die angegebene Operation (5.2.g) von G_3 auf Ω_3 den Kegel invariant läßt.
G_3 operiert transitiv. Um dies zu sehen, zeigen wir, daß es für jedes $A \in \Omega_3$ eine Matrix $Q \in G_3$ gibt, so daß $A = Q\overline{Q}^t$ gilt. Die Vorgehensweise entspricht der in Abschnitt 5.1, weshalb wir hier nur die wichtigsten Gleichungen angeben. Die Komponenten Q_i von Q müssen die folgenden Identitäten erfüllen:

$$A_{11} = Q_1\overline{Q}^t_1\ ,\ A_{22} = Q_4\overline{Q}^t_4 + Q_2\overline{Q}^t_2\ ,\ A_{33} = Q_5\overline{Q}^t_5 + Q_6\overline{Q}^t_6 + Q_3\overline{Q}^t_3,$$
$$A_{12} = Q_1\overline{Q}^t_4\ ,\ A_{13} = Q_1\overline{Q}^t_5\ ,\ A_{23} = Q_4\overline{Q}^t_5 + Q_2\overline{Q}^t_6.$$

Daraus ergibt sich, daß die Q_i wie folgt gewählt werden müssen: Q_1 ist durch die Gleichung $A_{11} = Q_1\overline{Q}_1^t$ festgelegt und wir wissen, daß ein solches Q_1 existiert. Daraus ergibt sich $A_{11}^{-1} = (\overline{Q}_1^t)^{-1}Q_1^{-1}$. Des weiteren erhält man durch einfaches Umformen die folgenden Identitäten:

$\overline{Q}_4^t = Q_1^{-1}A_{12}$, $Q_4 = \overline{A}_{12}^t(\overline{Q}_1^t)^{-1}$, wodurch Q_4 bestimmt ist.

$\overline{Q}_5^t = Q_1^{-1}A_{13}$, $Q_5 = \overline{A}_{13}^t(\overline{Q}_1^t)^{-1}$, wodurch Q_5 bestimmt ist.

$Q_2\overline{Q}_2^t = A_{22} - \overline{A}_{12}^t A_{11}^{-1}A_{12}$, wobei die rechte Seite, wie man aus Abschnitt 5.1 entnehmen kann, positiv-definit ist; folglich ist Q_2 dadurch bestimmt. Schließlich erhalten wir

(5.2.h) $$\begin{aligned} Q_3\overline{Q}_3^t = {} & A_{33} - \overline{A}_{13}^t A_{11}^{-1}A_{13} \\ & -(\overline{A}_{23}^t - \overline{A}_{13}^t(\overline{A}_{11}^t)^{-1}A_{12})(A_{22} - \overline{A}_{12}^t A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}(A_{23} - \overline{A}_{12}^t A_{11}^{-1}A_{13}). \end{aligned}$$

Die rechte Seite von (5.2.h) ist eine positiv-definite Matrix, was man in (5.2.i) sofort erkennt. Da die Gruppe $GL(s,\mathbb{H})$ transitiv auf den entsprechenden positiv-definiten quaternionischen Matrizen operiert, existiert tatsächlich ein solches Q_3, so daß die Gleichung (5.2.h) erfüllt wird. Somit haben wir gezeigt, daß G_3 in der in (5.2.g) erklärten Art und Weise auf Ω_3 transitiv operiert.

Die Kegelinvariante von Ω_3 und weitere Größen

Wir geben nun sowohl eine Kegelinvariante η, als auch die daraus abgeleitete assoziative positiv-definite Bilinearform σ und das Algebrenprodukt $\circ$ an. Dazu diagonalisieren wir zuerst ein beliebiges $X \in \Omega_3$ via:

(5.2.i) $$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Id & 0 & 0 \\ \overline{A}^t & Id & 0 \\ \overline{B}^t & \overline{C}^t & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \overline{X}_{12}^t & X_{22} & X_{23} \\ \overline{X}_{13}^t & \overline{X}_{23}^t & X_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & Id & \mathrm{C} \\ 0 & 0 & Id \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} - \overline{X}_{12}^t X_{11}^{-1}X_{12} & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} - \overline{X}_{13}^t X_{11}^{-1}X_{13} - D \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei wir die folgenden Festlegungen getroffen haben:

$$\begin{aligned} A &= -X_{11}^{-1}X_{12}, \\ B &= -X_{11}^{-1}(X_{12}C + X_{13}), \\ C &= (X_{22} - \overline{X}_{12}^t X_{11}^{-1}X_{12})^{-1}(\overline{X}_{12}^t X_{11}^{-1}X_{13} - X_{23}), \\ D &= (\overline{X}_{13}^t X_{11}^{-1}X_{12} - \overline{X}_{23}^t)C. \end{aligned}$$

Wir erhalten nun bis auf eine positive Konstante die Kegelinvariante η von Ω_3 durch:

(5.2.j) $$\begin{aligned} & \eta(X) = \\ & (det(X_{11}))^{-\alpha}(det(X_{22} - \overline{X}_{12}^t X_{11}^{-1}X_{12}))^{-\beta}(det(X_{33} - \overline{X}_{13}^t X_{11}^{-1}X_{13} - D))^{-\gamma}, \end{aligned}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{m+1}{2} + n + 2s, \beta = n + m + 2s, \gamma = 2(s+n+m) - 1.$$

Daraus berechnet man die folgende positiv-definite Bilinearform σ (s. auch (3.1.d)):

(5.2.k)
$$\begin{aligned}\sigma(X,Y) = {} & \alpha Spur(X_{11}Y_{11}) + \beta Spur(X_{22}Y_{22} + \overline{Y}^t_{12}X_{12} + \overline{X}^t_{12}Y_{12}) \\ & + \gamma Spur(X_{33}Y_{33} + \overline{Y}^t_{13}X_{13} + \overline{X}^t_{13}Y_{13} + \overline{Y}^t_{23}X_{23} + \overline{X}^t_{23}Y_{23})\end{aligned}$$

und das Produkt ergibt sich zu:

(5.2.l)
$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ \overline{X}^t_{12} & X_{22} & X_{23} \\ \overline{X}^t_{13} & \overline{X}^t_{23} & X_{33} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ \overline{Y}^t_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ \overline{Y}^t_{13} & \overline{Y}^t_{23} & Y_{33} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \overline{Z}^t_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ \overline{Z}^t_{13} & \overline{Z}^t_{23} & Z_{33} \end{pmatrix}.$$

Dabei gilt:

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= X_{11}Y_{11} + Y_{11}X_{11} + \frac{\alpha}{2\beta}(Y_{12}\overline{X}^t_{12} + X_{12}\overline{Y}^t_{12} + \overline{Y}_{12}X^t_{12} + \overline{X}_{12}Y^t_{12}) \\
&\quad + \frac{\alpha}{2\gamma}(Y_{13}\overline{X}^t_{13} + X_{13}\overline{Y}^t_{13} + \overline{Y}_{13}X^t_{13} + \overline{X}_{13}Y^t_{13}), \\
Z_{22} &= X_{22}Y_{22} + Y_{22}X_{22} + \overline{X}^t_{12}Y_{12} + \overline{Y}^t_{12}X_{12} \\
&\quad + \frac{\beta}{2\gamma}(X_{23}\overline{Y}^t_{23} + Y_{23}\overline{X}^t_{23} + \hat{X}_{23}\overline{\hat{Y}}^t_{23} + \hat{Y}_{23}\overline{\hat{X}}^t_{23}), \\
Z_{33} &= X_{33}Y_{33} + Y_{33}X_{33} + \overline{X}^t_{13}Y_{13} + \overline{Y}^t_{13}X_{13} + \overline{X}^t_{23}Y_{23} + \overline{Y}^t_{23}X_{23}, \\
Z_{12} &= Y_{12}X_{22} + X_{12}Y_{22} + Y_{11}X_{12} + X_{11}Y_{12} \\
&\quad + \frac{1}{2}(Y_{13}\overline{X}^t_{23} + X_{13}\overline{Y}^t_{23} + \hat{Y}_{13}\overline{\hat{X}}^t_{23} + \hat{X}_{13}\overline{\hat{Y}}^t_{23}), \\
Z_{13} &= Y_{13}X_{33} + X_{13}Y_{33} + Y_{11}X_{13} + X_{11}Y_{13} + X_{12}Y_{23} + Y_{12}X_{23}, \\
Z_{23} &= Y_{23}X_{33} + X_{23}Y_{33} + Y_{22}X_{23} + X_{22}Y_{23} + \overline{X}^t_{12}Y_{13} + \overline{Y}^t_{12}X_{13}.
\end{aligned}$$

Bezüglich des Produktes (5.2.l) ist σ assoziativ.

Die Algebra $\mathfrak{A}$ von Ω_3

Die zu Ω_3 assoziierte Algebra $\mathfrak{A} = (V, \circ)$ ist vom q=3-Typ, was wir nun zeigen werden. Dazu wählen wir e_1, e_2 und e_3 gleich den natürlichen Einselementen von $\mathcal{H}(m,\mathbb{R}), \mathcal{H}(n,\mathbb{C})$ und $\mathcal{H}(s,\mathbb{H})$ in V und betrachten die von diesen Idempotenten definierte Zerlegung von V in Eigenräume. Wir erhalten:

(5.2.m)
$$\begin{aligned} V = {} & V_1(e_1) \oplus V_1(e_2) \oplus V_1(e_3) \oplus V_{\frac{1}{2}}(e_1 \cap e_2) \\ & \oplus V_{\frac{1}{2}}(e_1 \cap e_3) \oplus V_{\frac{1}{2}}(e_2 \cap e_3).\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $V_1(e_i)$ den 1-Eigenraum von e_i für $i = 1, 2, 3$ und $V_{\frac{1}{2}}(e_i \cap e_j)$ bezeichnet den $\frac{1}{2}$-Eigenraum von e_i und e_j mit $1 \leq i < j \leq 3$.

Nun definieren wir die folgende Familie $\mathfrak{A}_{ij}$ mit $1 \leq i \leq j \leq 3$ von Räumen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{ii} &:= V_1(e_i),\\ \mathfrak{A}_{ij} &:= V_{\frac{1}{2}}(e_i \cap e_j),\ i < j.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt aufgrund der Definition der Räume $\mathfrak{A}_{ij}$:

- $\mathfrak{A}_{ij} = \mathfrak{A}_{ji}$.
- $\mathfrak{A}$ ist die σ direkte Vektorraumsumme der $\mathfrak{A}_{ij}$.
- $\mathfrak{A}_{ii}$ ist nach Konstruktion eine formal-reelle Jordan-Algebra mit Einselement e_i. Das Produkt von $\mathfrak{A}$ eingeschränkt auf $\mathfrak{A}_{ii}$ liefert das Standardprodukt, d.h. $\forall X, Y \in \mathfrak{A}_{ii}$ gilt $X \circ Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$.

Damit sind aber die Bedingungen (K.1)-(K.3) der Definition 3.1.3 erfüllt. Die Bedingung (K.4) der Definition 3.1.3 entspricht der Definition der Räume $\mathfrak{A}_{ij}$, und (K.5) ist eine einfache Folgerung unter Anwendung von (5.2.l). Da (K.1)-(K.5) der Definiton 3.1.3 erfüllt sind, bildet demzufolge die Familie der Räume $\mathfrak{A}_{ij}$ eine Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{A}$.
Um (K.6) der Definition 3.1.3 zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß bestimmte Mutationen Jordan-Algebren sind, d.h. die Bedingungen (JA.1-2) der Definition 2.2.1 müssen erfüllt sein. Zuerst zeigen wir, daß $\mathfrak{A}_{e_1}^{(1)} = \mathfrak{A}_{e_1}$ eine Jordan-Algebra ist. Mit $x * y := A_{e_1}(x)y = x(y \circ e_1) + y(e_1 \circ x) - e_1(x \circ y)$ bezeichnen wir die Multiplikation in $\mathfrak{A}_{e_1}$, und die Kommutativitätseigenschaft (JA.1) für $(\mathfrak{A}_{e_1}, *)$ folgt leicht aus der von $(\mathfrak{A}, \circ)$. Gezeigt werden muß noch, daß (JA.2) gilt; also $\forall u \in \mathfrak{A}$ gilt:

(5.2.n) $$[A_{e_1}(u * u), A_{e_1}(u)] = 0.$$

Sei weiter e die Identität der Algebra $\mathfrak{A}$, so besteht die Menge $\{e_0 := e - e_1, e_1\}$ aus zwei natürlichen Idempotenten. Die Eigenräume in V bzgl. e_1 ergeben eine direkte Summenzerlegung von V, d.h. $V = V_1(e_1) \oplus V_{\frac{1}{2}}(e_1) \oplus V_0(e_1)$, wobei $V_1(e_1) = \mathfrak{A}_{11}$, $V_{\frac{1}{2}}(e_1) = \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{13}$ und $V_0(e_1) = \mathfrak{A}_{22} \oplus \mathfrak{A}_{23} \oplus \mathfrak{A}_{33}$ gilt. Jedes $x \in \mathfrak{A}$ hat eine entsprechende Zerlegung $x = x_1 + x_{\frac{1}{2}} + x_0$ mit $x_i \in V_i(e_1)$, $i = 1, \frac{1}{2}, 0$. Für so zerlegte $x, y \in \mathfrak{A}$ erhalten wir:

$$x * y = x_1 * y_1 + x_1 * y_{\frac{1}{2}} + x_{\frac{1}{2}} * y_1 + x_{\frac{1}{2}} * y_{\frac{1}{2}}.$$

Aus der Definition des Produkts $*$ folgt die Äquivalenz zu:

(5.2.o) $$\begin{aligned} x * y &= \underbrace{x_1 \circ y_1}_{\in \mathfrak{A}_{11}} + \underbrace{x_1 \circ y_{\frac{1}{2}} + y_1 \circ x_{\frac{1}{2}}}_{\in \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{13}} + \underbrace{e_0(x_{\frac{1}{2}} \circ y_{\frac{1}{2}})}_{\in \mathfrak{A}_{22} \oplus \mathfrak{A}_{23} \oplus \mathfrak{A}_{33}} \\ \Leftrightarrow A_{e_1}(x)(y) &= A_{e_1}(x_1 + x_{\frac{1}{2}})(y_1 + y_{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Somit gilt $u * u = u_1 \circ u_1 + 2u_1 \circ u_{\frac{1}{2}} + e_0(u_{\frac{1}{2}} \circ u_{\frac{1}{2}})$. Wenden wir diese Gleichheit für $u*u$ und (5.2.o) an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
[A_{e_1}(u), A_{e_1}(u*u)] &= [A_{e_1}(u_1+u_{\frac{1}{2}}), A_{e_1}(u_1\circ u_1+2u_1\circ u_{\frac{1}{2}})] \\
&= [A(u_1), A(u_1\circ u_1)] + 2[A(u_1), A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})] \\
&\quad +[A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A_{e_1}(u_1\circ u_1+2u_1\circ u_{\frac{1}{2}})].
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Bedingung (5.2.n) ein, so ergeben die Summanden, die am Ende der obigen Gleichheitskette stehen, in jedem Eigenraum von V bzgl. e_1 eine separate Bedingung. Deshalb ist (5.2.n) äquivalent zu den folgenden drei Gleichungen:

(5.2.p)
$$[A(u_1), A(u_1\circ u_1)] = 0,$$

(5.2.q)
$$2[A(u_1), A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})] + [A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A(u_1\circ u_1)] = 0,$$

(5.2.r)
$$[A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})] = 0.$$

Um (5.2.p-r) zu zeigen, wendet man die linken Seiten auf ein beliebiges $0 \neq v = v_1 + v_{\frac{1}{2}} + v_0 \in \mathfrak{A}$ an. $[A(u_1), A(u_1)^2]$ verschwindet auf v_1, weil $(\mathfrak{A}_{11}, \circ) = Sym(m,\mathbb{R})^+$ gilt; $\mathfrak{A}_{11}$ ist eine Jordan-Algebra. Das Verschwinden auf dem Anteil v_0 folgt z.B. aus (K.4), da $V_0(e_1) = \mathfrak{A}_{22}\oplus\mathfrak{A}_{33}\oplus\mathfrak{A}_{23}$ gilt. Es folgt direkt aus (5.2.l), daß $[A(u_1), A(u_1)^2]$ auf dem Anteil $v_{\frac{1}{2}}$ von v verschwindet.
Mit (5.2.l) und (5.2.o) sieht man leicht, daß die beiden linken Seiten von (5.2.q,r) auf allen $v_0 \in V_0(e_1)$ verschwinden.
Wir zeigen nun, daß $\forall v_1 \in V_1(e_1)$ gilt:

$$2[A(u_1), A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})]v_1 + [A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A(u_1\circ u_1)]v_1 = 0.$$

Unter Verwendung von (5.2.l,o) erhalten wir (man beachte, daß man zwischen der „normalen“ Matrizenmultiplikation und der Multiplikation $\circ$ von $\mathfrak{A}$ unterscheiden muß!):

$$\begin{aligned}
& (2[A(u_1), A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})] + [A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A(u_1\circ u_1)])v_1 \\
= \;& 2(A(u_1)A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})v_1 - A_{e_1}(u_1\circ u_{\frac{1}{2}})A(u_1)v_1) \\
& +A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}})A(u_1\circ u_1)v_1 - A(u_1\circ u_1)A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}})v_1 \\
= \;& 2(u_1((u_1\circ u_{\frac{1}{2}})v_1) - (u_1\circ u_{\frac{1}{2}})(u_1\circ v_1)) + u_{\frac{1}{2}}((u_1\circ u_1)v_1) - (u_1\circ u_1)(u_{\frac{1}{2}}\circ v_1) \\
= \;& \frac{1}{4}(u_1v_1u_1u_{\frac{1}{2}} - u_1v_1u_1u_{\frac{1}{2}} - v_1u_1^2u_{\frac{1}{2}} + v_1u_1^2u_{\frac{1}{2}} + u_1^2v_1u_{\frac{1}{2}} - u_1^2v_1u_{\frac{1}{2}}) \\
= \;& 0.
\end{aligned}$$

Man kann natürlich $u_{\frac{1}{2}}$ in die Anteile aufsplitten, die zu $\mathfrak{A}_{12}$ und $\mathfrak{A}_{13}$ gehören. Dies ist aber für die obige Rechnung nicht erforderlich; der Grund dafür liegt in der

Art und Weise, wie die Elemente aus $\mathfrak{A}_{11}$ auf $V_{\frac{1}{2}}(e_1)$ via $\circ$ operieren. Allerdings ist die Aufspaltung von $u_{\frac{1}{2}}$ für die nachfolgende Rechnung von Bedeutung. Wenden wir nämlich nun die linke Seite von (5.2.q) auf ein beliebiges Element $v_{\frac{1}{2}} \in V_{\frac{1}{2}}(e_1)$ an, so erhalten wir:

$$\underbrace{u_1(e_0((u_1u_{\frac{1}{2}})v_{\frac{1}{2}}))}_{=0} - \tfrac{1}{2}e_0((u_1u_{\frac{1}{2}})(u_1v_{\frac{1}{2}})) + e_0(u_{\frac{1}{2}}(u_1^2 \circ v_{\frac{1}{2}})) - \underbrace{u_1^2(e_0(u_{\frac{1}{2}} \circ v_{\frac{1}{2}}))}_{=0}.$$

Weiter setzt man nun $u_{\frac{1}{2}} = u_{12} + u_{13}$, $v_{\frac{1}{2}} = v_{12} + v_{13}$ und zeigt unter Verwendung von (5.2.l), daß obige Summe für jedes mögliche Paar (u_{ij}, v_{kl}) verschwindet. Somit ist (5.2.q) gezeigt.

Um die Gleichung (5.2.r) zu beweisen, überlegt man sich zuerst mit der Hilfe von (5.2.o), daß es genügt, dies für Elemente aus $V_1(e_1)$ zu zeigen. Sei nun $v_1 \in V_1(e_1)$ beliebig, aber fest gewählt, so folgt:

$$[A_{e_1}(u_{\frac{1}{2}}), A_{e_1}(u_1 \circ u_{\frac{1}{2}})]v_1 = \tfrac{1}{4}e_0(u_{\frac{1}{2}}(v_1u_1u_{\frac{1}{2}}) - (u_1u_{\frac{1}{2}}) \circ (v_1u_{\frac{1}{2}})).$$

Diese Summe verschwindet aber identisch, was z.B. wie folgt gezeigt werden kann: Man ersetzt $u_{\frac{1}{2}}$ durch $u_{12} + u_{13}$ und prüft das Verschwinden für jede mögliche Paarung der u_{ij} nach. Somit ist insgesamt gezeigt, daß $\mathfrak{A}_{e_1}$ eine Jordan-Algebra ist.

Weiter muß man zeigen, daß auch $\mathfrak{A}^{(2)}_{e_2}$ und $\mathfrak{A}^{(3)}_{e_3}$ ebenfalls Jordan-Algebren sind. Nun gilt aber $\mathfrak{A}^{(2)} = V_0(e_1)$ und dies ist eine Algebra vom q=2-Typ; folglich können wir induktiv argumentieren, daß $\mathfrak{A}^{(2)}_{e_2}$ eine Jordan-Algebra ist. Da $(\mathfrak{A}^{(3)}_{e_3}, \circ) = Herm(s, \mathbb{H})^+$ gilt, ist $(\mathfrak{A}^{(3)}_{e_3}, \circ)$ eine Jordan-Algebra. Insgesamt zeigt dies, daß die Räume $\mathfrak{A}_{ij}$ die Bedingung (K.6) erfüllen.

Weiterhin muß gezeigt werden, daß auch (K.7) erfüllt wird, d.h. $\forall\ x_{2s} \in \mathfrak{A}_{2s}$ mit $s = 2, 3$ ist $A_{e_2}(x_{2s})|_{\mathfrak{A}^{(1)}}$ eine Derivation (s. (3.1.j)) von $\mathfrak{A}^{(1)}_{e_1}$, $\forall\ y_{33} \in \mathfrak{A}_{33}$ ist $A_{e_3}(x_{33})|_{\mathfrak{A}^{(1)}}$ eine Derivation von $\mathfrak{A}^{(1)}_{e_1}$ und $A_{e_3}(x_{33})|_{\mathfrak{A}^{(2)}}$ ist eine Derivation von $\mathfrak{A}^{(2)}_{e_2}$.

Dazu machen wir die folgenden Anmerkungen und zeigen exemplarisch eine der Bedingungen. Es gilt $\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{A}_{22} \oplus \mathfrak{A}_{23} \oplus \mathfrak{A}_{33}$ und $\mathfrak{A}^{(3)} = \mathfrak{A}_{33}$. Des weiteren setzen wir $e_0^1 := e - e_1$, $e_0^2 := e - e_2$ und $e_0^3 := e - e_3$. Für jedes e_i existiert eine direkte Vektorraumsummenzerlegung von V in die $0, \frac{1}{2}, 1$-Eigenräume bzgl. e_i. Jedes $x \in \mathfrak{A}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$x = x_{11} + x_{22} + x_{33} + +x_{12} + x_{13} + x_{23},$$

mit $x_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$ für $1 \leq i \leq j \leq 3$. Für die Multiplikation in der Mutation $\mathfrak{A}_{e_i}$ zeigt man, daß $\forall x, y \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} A_{e_i}(x)(y) &= A_{e_i}(x_{ii} + x_{ij} + x_{ik})(y_{ii} + y_{ij} + y_{ik}) \\ &= x_{ii} \circ y_{ii} + x_{ii} \circ (y_{ij} + y_{ik}) + y_{ii} \circ (x_{ij} + x_{ik}) \\ &\quad + e_0^i((x_{ij} + x_{ik}) \circ (y_{ij} + y_{ik})), \end{aligned}$$

mit $i \neq j \neq k \in \{1,2,3\}$ und $x_{ij}, y_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$ gilt. Dies machen wir uns zunutze und zeigen nun beispielhaft $\forall b_{33} \in \mathfrak{A}_{33}$ und $\forall x, y \in \mathfrak{A}^{(2)}$ folgendes:

$$\textbf{(5.2.s)} \qquad A_{e_3}(b_{33})A_{e_2}(x)(y) = A_{e_2}(A_{e_3}(b_{33})(x))(y) + A_{e_2}(x)(A_{e_3}(b_{33})(y)),$$

d.h. $\forall\, b_{33} \in \mathfrak{A}_{33}$ ist $A_{e_3}(b_{33})|_{A^{(2)}}$ eine Derivation von $A^{(2)}_{e_2}$.
Für alle $x, y \in \mathfrak{A}^{(2)}$ und $b_{33} \in \mathfrak{A}_{33}$ gilt:

$$\begin{aligned} A_{e_2}(x)(y) &= A_{e_2}(x_{22}+x_{23})(y_{22}+y_{23}) \\ &= x_{22} \circ y_{22} + x_{22} \circ y_{23} + y_{22} \circ x_{23} + e_3(x_{23} \circ y_{23}), \end{aligned}$$

$$A_{e_3}(b_{33})A_{e_2}(x)(y) = b_{33} \circ e_3(x_{23} \circ y_{23}) + b_{33} \circ (x_{22} \circ y_{23} + y_{22} \circ x_{23}),$$

$$A_{e_3}(b_{33})(x) = b_{33} \circ x_{33} + b_{33} \circ x_{23}.$$

Nun folgt durch Einsetzen dieser Identitäten und Verwendung des Produktes (5.2.l) die Behauptung (5.2.s). Die weiteren einfachen Berechnungen dazu führen wir hier nicht aus.
Um die noch verbleibenden Identitäten zu zeigen, geht man analog vor. Somit ist (K.7) für die Familie der Räume $\mathfrak{A}_{ij} \subset \mathfrak{A} = (V, \circ)$ mit $1 \leq i \leq j \leq 3$ gezeigt.

Insgesamt ist damit der Beweis erbracht, daß die Algebra $\mathfrak{A} = (V, \circ)$ vom $q = 3$-Typ ist.

Die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ bzgl. der Räume $\mathfrak{A}_{ij}$
Es gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{11} \oplus \mathfrak{A}_{22} \oplus \mathfrak{A}_{33} \oplus \mathfrak{A}_{12} \oplus \mathfrak{A}_{13} \oplus \mathfrak{A}_{23}$ und q=3, wobei nun:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}_{11} &= \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | X_{11} \in \mathcal{H}(m, \mathbb{R}) \right\}, \\
\mathfrak{A}_{22} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | X_{22} \in \mathcal{H}(n, \mathbb{C}) \right\}, \\
\mathfrak{A}_{33} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix} | X_{33} \in \mathcal{H}(s, \mathbb{H}) \right\}, \\
\mathfrak{A}_{12} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} & 0 \\ \overline{X}^t_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | X_{12} \in Mat(m \times n, \mathbb{C}) \right\}, \\
\mathfrak{A}_{13} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{X}^t_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} | X_{13} \in Mat(m \times s, \mathbb{H}) \right\},
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{A}_{23} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{23} \\ 0 & \overline{X}_{23}^t & 0 \end{pmatrix} | X_{23} \in Mat(n \times s, \mathbb{H}) \right\}.$$

Bemerkung:
(5.2.α) Benutzt man eine s-Zerlegung (s. Definition 8.3.2) von $\mathfrak{A}$ und die Struktursätze 4.1.2/4.2.1, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{A}$ nicht vom q=1-Typ sein kann.

Die Automorphismen von Ω_3
Abschließend geben wir nun die Automorphismengruppe von Ω_3 an. Dabei machten wir uns die verschiedenen Arbeiten Dorfmeisters zunutze, insbesondere [$\mathcal{DO}$74]:

$$\begin{aligned} Aut(\Omega_3) = \{ & A \to B | \; B_{11} = Q_1 A_{11} \overline{Q}_1^t, \\ & B_{12} = \frac{\alpha}{\beta} Q_1 A_{11} \overline{Q}_4^t + Q_1 A_{12} \overline{Q}_2^t, \\ & B_{13} = \frac{\alpha}{\gamma} Q_1 A_{11} \overline{Q}_5^t + \frac{\beta}{\gamma} Q_1 A_{12} \overline{Q}_6^t + Q_1 A_{13} \overline{Q}_3^t, \\ & B_{22} = \frac{\alpha}{\beta} Q_4 A_{11} \overline{Q}_4^t + Q_4 A_{12} \overline{Q}_2^t + Q_2 A_{21} \overline{Q}_4^t + Q_2 A_{22} \overline{Q}_2^t, \\ & B_{23} = \frac{\alpha}{\gamma} Q_4 A_{11} \overline{Q}_5^t + \frac{\beta}{\gamma} (Q_4 A_{12} \overline{Q}_0^t + Q_2 A_{21} \overline{Q}_5^t + Q_2 A_{22} \overline{Q}_6^t) \\ & \quad + Q_4 A_{13} \overline{Q}_3^t + Q_2 A_{23} \overline{Q}_3^t, \\ & B_{33} = \frac{\alpha}{\gamma} Q_5 A_{11} \overline{Q}_5^t + \frac{\beta}{\gamma} (Q_5 A_{12} \overline{Q}_6^t + Q_6 A_{21} \overline{Q}_5^t + Q_6 A_{22} \overline{Q}_6^t) \\ & \quad + Q_5 A_{13} \overline{Q}_3^t + Q_6 A_{23} \overline{Q}_3^t + Q_3 A_{31} \overline{Q}_5^t + Q_3 A_{32} \overline{Q}_6^t + Q_3 A_{33} \overline{Q}_3^t, \\ & mit\; Q_1 \in GL(m, \mathbb{R}), Q_2 \in GL(n, \mathbb{C}), Q_3 \in GL(s, \mathbb{H}), \\ & Q_4 \in Mat(n \times m, \mathbb{C}), Q_5 \in Mat(s \times m, \mathbb{H}), \\ & Q_6 \in Mat(s \times n, \mathbb{H}) \} \cdot \{ Id, A \to \overline{A}, A \to \hat{A} \}. \end{aligned}$$

6 Siegelgebiete und h.b.G.

Zuerst beschreiben wir ausführlicher den Zusammenhang zwischen den affin homogenen Siegelgebieten und den homogenen beschränkten Gebieten (s. Definition 1.2.7). Dadurch erlangt man eine bessere Übersicht über die dafür notwendigen Werkzeuge, die anschließend erschlossen werden. Zudem präzisieren wir die erforderlichen Begriffe und illustrieren diese ggf. durch Beispiele.

6.1 „Philosophie“

Für eine homogene Mannigfaltigkeit M mit Riemannscher Metrik g existieren im allgemeinen in der Isometriegruppe $I(M,g)$ mehrere, nicht zueinander isomorphe, transitiv operierende Untergruppen mit nicht trivialen Stabilisatoren.
Existiert darunter eine, deren Stabilisator K nur aus der Identität besteht, so ist dies eine auf M einfach transitiv operierende Gruppe, d.h. für je zwei Elemente $x, y \in M$ gibt es genau ein Element φ aus dieser Gruppe, so daß $\varphi(x) = y$ gilt.
Auch hier ist die generelle Situation die, daß sehr viele, nicht zueinander isomorphe, einfach transitiv operierende Gruppen in $I(M,g)$ existieren können (Näheres dazu findet man z.B. für Solvmannigfaltigkeiten, d.h. homogene Mannigfaltigkeiten, die in ihrer Isometriegruppe eine auflösbare transitive Untergruppe besitzen, in [$\mathcal{GOWI}$88]).
Unter diesen einfach transitiv operierenden Gruppen gibt es evtl. einige mit „besonders schönen Eigenschaften“, was natürlich von der jeweiligen Fragestellung und der daraus resultierenden Betrachtungsweise abhängt.
Sei S eine einfach transitiv auf M operierende Gruppe von Isometrien. Nach der Wahl eines Basispunktes $p \in M$ kann der p-Orbit $S \cdot p$ mit M identifiziert werden, folglich kann $(S, g) = (M, g)$ gesetzt werden.

Im Falle der homogenen beschränkten Gebiete gibt es mindestens eine einfach transitiv operierende Gruppe in der Gruppe der holomorphen Isometrien des Gebietes, die auflösbar und $\mathbb{R}$-spaltend (s. Definition 6.3.1 (nj1)) ist (s. Morzow-Borel Theorem für maximal triangulierbare, zusammenhängende Untergruppen von linearen Gruppen, in [$\mathcal{VI}$61] Theorem 2). Alle transitiven, $\mathbb{R}$-spaltenden und auflösbaren Gruppen sind in der Gruppe der holomorphen Isometrien via Elementen aus der Isotropiegruppe K zueinander konjugiert (s. [$\mathcal{GVP}$67] Proposition 3, S.46). Die Lie-Algebren solcher Gruppen sind folglich alle isomorph zueinander (s. auch [$\mathcal{GVP}$67] Korollar 1).
Die Lie-Algebra einer auflösbaren einfach transitiven und $\mathbb{R}$-spaltenden Gruppe ist eine normale J-Algebra (s. Definition 6.3.1). Die ausgezeichnete Struktur einer solchen Lie-Algebra erlaubt es, das zugehörige Siegelgebiet zu rekonstruieren (s. Abschnitt 6.5). Der zur Kegelalgebra, sowie der zum Tubengebiet gehörende Anteil (s. Definition 6.5.2) ist direkt erkennbar. Eine normale J-Algebra führt zu einer affinen, auf dem rekonstruierten Siegelgebiet einfach transitiv operierenden Gruppe.

Es existiert folglich eine eineindeutige Beziehung zwischen homogenen beschränkten Gebieten und affin homogenen Siegelgebieten. In der holomorphen Kategorie braucht man nicht mehr zwischen diesen beiden Objekten zu unterscheiden, denn es gilt (s. [$\mathcal{GVP}$67] Theorem 1, S.57):

Satz 6.1.1 (Vinberg, Gindikin and Piatetsky-Shapiro) *Sei D ein homogenes beschränktes Gebiet, dann existiert ein affin homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$, erster oder zweiter Art, das biholomorph zu D ist.*

6.2 Siegelgebiete, Aufbau und affine Automorphismen

Wir sind an bestimmten Siegelgebieten, nämlich den quasisymmetrischen Siegelgebieten (s. Definition 7.1.3) interessiert. Für das Verständnis dieser Siegelgebiete und für spätere Untersuchungen ist es notwendig, „allgemeine“ Siegelgebiete zu betrachten, die wir deswegen hier einführen.
Es gibt drei Arten von Siegelgebieten, für die in der Literatur zwei unterschiedliche Bezeichnungen gebräuchlich sind. Entweder spricht man von einem Siegelgebiet der I.,II.,III. Art oder, in der obsoleten Notation, von Siegelgebieten vom Geschlecht I,II,III.

Siegel-I-Gebiete

Wie einleitend schon erwähnt, existieren drei Arten von Siegelgebieten. Darunter sind die Siegel-I-Gebiete diejenigen, die in ihrem Aufbau die einfachsten sind.

Definition 6.2.1 (Siegelgebiet der ersten Art) *Sei Ω ein regulärer Kegel in V und $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von V. Dann nennt man die Menge*

$$\mathcal{S}_I = \{z \in V^{\mathbb{C}} | z = x + iy \text{ mit } y \in \Omega, x \in V \text{ beliebig}\}$$

ein SIEGEL-I-GEBIET.

Beispiele und Bemerkung:

(6.2.B1) Sei (V, Ω) ein Paar, wie in (2.1.B1)-(2.1.B5), dann ist jeweils $V + i\Omega \subset V^{\mathbb{C}}$ ein Siegelgebiet der ersten Art. Dazu gehört auch *Siegel's obere Halbebene*

$$H_S(n) = Sym(n, \mathbb{R}) + iPos(n, \mathbb{R}) = \{Z \in Sym(n, \mathbb{C}) | Im(Z) > 0\}.$$

H_S ist insbesondere in der algebraischen Geometrie von Bedeutung (s. die Bücher von D. Mumford über die Theta-Funktion). Die obere Halbebene $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ in $\mathbb{C}$ ist ein Siegel-I-Gebiet und entspricht $H_S(1)$.

(6.2.α) Siegel-I-Gebiete werden auch TUBENGEBIETE genannt.

Für bestimmte analytische Automorphismen von $\mathcal{S}_I$ weiß man (s. [$\mathcal{PS}$] S.16 ff.):

Satz 6.2.2 *Jeder analytische Automorphismus von $\mathcal{S}_I$, der stetig auf dem Abschluß $\overline{\mathcal{S}_I}$ von $\mathcal{S}_I$ in $V^{\mathbb{C}}$ ist, hat die Form*

$$z \mapsto Az + b,$$

wobei A eine lineare Transformation von Ω auf sich ist und $b \in V$.

Siegel-II-Gebiete

Sei $\Omega \subset V$ ein regulärer Kegel (s. (2.1.a)), $V^{\mathbb{C}}$ sei V komplexifiziert und weiter sei $F : U \times U \to V^{\mathbb{C}}$ eine Abbildung, wobei U ein endlichdimensionaler komplexer Vektorraum ist. Die Abbildung F nennt man eine Ω-HERMITESCHE FORM, wenn gilt:

(6.2.h1) $F(u,v) = \overline{F(v,u)}$,

(6.2.h2) F ist $\mathbb{C}$-linear im ersten Argument,

(6.2.h3) $F(u,u) \in \overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega}$ ist der Abschluß von Ω in V), $\forall u \in U$,

(6.2.h4) $F(u,u) = 0$ genau dann, wenn $u = 0$ gilt.

Definition 6.2.3 (Siegelgebiet der zweiten Art) *Sei Ω ein regulärer Kegel in V, U ein komplexer Vektorraum endlicher Dimension und F eine Ω-hermitesche Form auf U. Dann heißt die Menge*

$$\mathcal{S}_{II} = \{(z,u) \in V^{\mathbb{C}} \times U | Im(z) - F(u,u) \in \Omega\}$$

SIEGEL-II-GEBIET.

Bemerkungen und Beispiele:

(6.2.β) Siegel-I-Gebiete sind Siegel-II-Gebiete, für die U der Nullraum ist bzw. $F = 0$ gilt. In der Menge der Siegel-II-Gebiete sind folglich die Siegel-I-Gebiete enthalten.
Wir benutzen für ein Siegel-II-Gebiet auch die Notation $\mathcal{S}_{II}(\Omega, F)$, was die Abhängigkeit von Ω und F verdeutlicht, oder einfach nur $\mathcal{S}$.

(6.2.γ) Sprechen wir im folgenden einfach von einem Siegelgebiet, so handelt es sich immer um ein Siegelgebiet erster oder zweiter Art.

(6.2.δ) *Siegel-II-Gebiete sind konvex*

Seien $(z_1,u_1),(z_2,u_2) \in \mathcal{S}_{II}$, dann müssen wir zeigen, daß:

$$\alpha(z_1,u_1) + \beta(z_2,u_2) \in \mathcal{S}_{II}$$

mit $\alpha + \beta = 1$ und $0 < \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ gilt. Indem man ggf. $\alpha = 1 - \beta$ bzw. $\beta = 1 - \alpha$ setzt, folgt dies so:

$$\begin{aligned} & Im(\alpha z_1 + \beta z_2) - F(\underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{\beta = 1-\alpha}, \underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{\alpha = 1-\beta}) \\ = \; & \underbrace{\alpha(Im z_1 - F(u_1,u_1))}_{\in \Omega} + \underbrace{\beta(Im z_2 - F(u_2,u_2))}_{\in \Omega} + \underbrace{\alpha\beta \, \underbrace{F(u_1 - u_2, u_1 - u_2)}_{\in \overline{\Omega}}}_{\in \Omega, \text{ da } \alpha\beta < 1}. \end{aligned}$$

Dabei gilt offensichtlich $-F(u_2, u_1) + \beta F(u_2, u_1) + \alpha F(u_2, u_1) = 0$, was wir in der obigen Gleichung benutzt haben. Somit gilt $\alpha(z_1, u_1) + \beta(z_2, u_2) \in \mathcal{S}_{II}$ und die Konvexität von $\mathcal{S}_{II}$ ist gezeigt.

(6.2.B2) Wir wählen $V = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{C}^m$, $\Omega = \mathbb{R}^+$ und F als das natürliche Skalarprodukt von $\mathbb{C}^m$. Dann ist

$$S_{II}(\mathbb{R}^+, F) = \{(a, z) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^m) | Im(a) - F(z, z) = Im(a) - \textstyle\sum_{i=1}^m z_i \overline{z_i} > 0\}$$

ein Siegel-II-Gebiet, das sich biholomorph auf die offene Einheitskugel in $\mathbb{C}^{m+1}$ abbilden läßt (s. [$\mathcal{MU}$] S.5 ff.).

(6.2.B3) Sei $V \cong \mathbb{R}^n = \mathcal{H}(m+q, \mathbb{R})$ (s. (2.1.B1)) mit $m \geq 0$, $q \geq 0$ und $n = \frac{(m+q)(m+q+1)}{2}$, $U = \mathbb{C}^m$, $\Omega = Pos(m+q, \mathbb{R})$ und $F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u\overline{v}^t + \overline{v}u^t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann erhält man das Siegel-II-Gebiet (s. [$\mathcal{MU}$] S.76)

$$\mathcal{S}_{II}(\Omega, F) = \{(z, u) \in (V^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}^m) | Im(z) - F(u, u) \in Pos(m+q, \mathbb{R})\}.$$

(6.2.B4) Wählt man $V = \mathcal{H}(r, \mathbb{C})$ und $\Omega = Pos(r, \mathbb{C})$ so folgt, da $\mathcal{H}(r, \mathbb{C}) + i\mathcal{H}(r, \mathbb{C}) = Mat(r \times r, \mathbb{C})$ gilt, $V^{\mathbb{C}} = Mat(r \times r, \mathbb{C})$. Die Konjugation in $V^{\mathbb{C}}$ ist durch $Z \mapsto \overline{Z}^t$ gegeben. Weiter sei U gleich der Menge $Mat(r \times s, \mathbb{C})$ der $r \times s$ Matrizen mit Werten in $\mathbb{C}$ und $F(X, Y) = X\overline{Y}^t$. Dann erhält man (s. [$\mathcal{DO}79a$] S.3)

$$\mathcal{S}_{II}(\Omega, F) =$$
$$\{(Z, X) \in (Mat(r \times r, \mathbb{C}) \times Mat(r \times s, \mathbb{C})) | Im(Z) - F(X, X) \in Pos(r, \mathbb{C})\}.$$

(6.2.a) Analog zu (1.2.f) bezeichnet $Aut(\mathcal{S})$ die Gruppe der biholomorphen Abbildungen des Siegelgebiets $\mathcal{S}$ auf sich.

(6.2.b) Mit $Aff(\mathcal{S})$ notieren wir die Gruppe derjenigen invertierbaren affinen Abbildungen von $V^{\mathbb{C}} \times U$, die $\mathcal{S} \subset V^{\mathbb{C}} \times U$ auf sich abbilden.

Es gilt $Aff(\mathcal{S}) \subset Aut(\mathcal{S})$. Die affinen Automorphismen eines Siegel-II-Gebietes sind wie folgt explizit beschreibbar (s. z.B. [$\mathcal{GVP}67$] S.20, [$\mathcal{PS}$] S.25):

Proposition 6.2.4 (affine Automorphismen von $\mathcal{S}_{II}$) *Jedes Element aus $Aff(\mathcal{S}_{II})$ hat die folgende Gestalt:*

$$(z, u) \in \mathcal{S}_{II} \mapsto (Az + a + 2iF(Bu, b) + iF(b, b), Bu + b).$$

Dabei ist $a \in V$, $b \in U$, $A \in Aut(\Omega)$ (s. (2.1.e)) und B eine komplex lineare Abbildung von U, so daß $\forall u, v \in U$ $AF(u, v) = F(Bu, Bv)$ gilt.

Erfüllen $A \in Aut(\Omega)$ und $B \in GL_{\mathbb{C}}(U)$ $\forall u, v \in U$ die Gleichung $AF(u, v) = F(Bu, Bv)$, so ist B nur eindeutig bis auf unitäre Transformationen von F bestimmt.

Ein Siegel-II-Gebiet ist homogen genau dann, wenn es affin homogen ist, denn es gilt (s. [$\mathcal{DO}$79a] Satz 1.10):

Satz 6.2.5 *Für ein Siegel-II-Gebiet $\mathcal{S}_{II}$ sind äquivalent:*

(1) *$Aut(\mathcal{S}_{II})$, definiert in (6.2.a), operiert transitiv auf $\mathcal{S}_{II}$.*

(2) *$Aff(\mathcal{S}_{II})$, definiert in (6.2.b), operiert transitiv auf $\mathcal{S}_{II}$.*

(3) *Es gibt eine abgeschlossene Untergruppe $\Gamma \subset Aut(\Omega)$ derart, daß (Γ, F) zulässig ist.*

(6.2.c) (Γ, F) heißt ZULÄSSIG,

wenn Γ transitiv auf Ω operiert und es für alle $A \in \Gamma$ ein $B \in GL_{\mathbb{C}}(U)$ gibt, so daß $(A, B) \in GL(\mathcal{S}_{II})$, wobei

(6.2.d)
$$GL(\mathcal{S}_{II}) := \{(A, B) \in GL_{\mathbb{R}}(V) \times GL_{\mathbb{C}}(U) | A \in Aut(\Omega) \text{ und } AF(u, v) = F(Bu, Bv),\ \forall u, v \in U\}.$$

Siegel-III-Gebiete

Siegel-III-Gebiete werden für den Zusammenhang zwischen homogenen beschränkten Gebieten und Siegelgebieten nicht benötigt (s. Satz 6.1.1). Dies ist wahrscheinlich der wichtigste Grund dafür, warum diese Gebiete bedeutend weniger in der Literatur in Erscheinung treten.
Für den Beweis der Krümmungsvermutung spielen sie eine bedeutende Rolle als Realisierungen von Siegel-II-Gebieten (s. Abschnitt 10.1 und auch [$\mathcal{NA}$76]).

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ der reellen Dimension n, $V^{\mathbb{C}}$ seine Komplexifizierung und U bzw. W seien komplexe Vektorräume der komplexen Dimension m bzw. k, mit $m, k < \infty$. Weiter sei $\mathcal{D} \subset W$ ein beschränktes Gebiet (s. Definition 1.2.1) und $\Omega \subset V$ ein regulärer Kegel (s. (2.1.a)).

Definition 6.2.6 (semihermitesche Form) *Eine Abbildung $L : U \times U \to V^{\mathbb{C}}$ heißt* SEMIHERMITESCHE FORM, *wenn $L = L^1 + L^2$ gilt, wobei L^1 und L^2 Abbildungen von $U \times U$ nach $V^{\mathbb{C}}$ sind, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(sh.1) *$L^1(u, v)$ ist komplex linear in der ersten Variablen.*

(sh.2) $\overline{L^1(u, v)} = L^1(v, u)$.

(sh.3) *L^2 ist eine symmetrische $\mathbb{C}$-Bilinearform.*

Eine semihermitesche Form L heißt NICHT-AUSGEARTET, *falls $L(u, v) = 0$, für alle $u \in U$, schon $v = 0$ impliziert.*

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun Siegel-III-Gebiete definieren.

Definition 6.2.7 (Siegelgebiet der dritten Art) *Seien $U, V, W, \mathcal{D}$ wie oben vereinbart. Weiter sei $\forall t \in \mathcal{D}$ L_t eine nicht-degenerierte semihermitesche Form mit Werten in $V^{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^n$, wobei die L_t differenzierbar von $t \in \mathcal{D} \subset W$ abhängen. Dann heißt die offene Menge*

$$\mathcal{S}_{III} = \{(z,u,t) \in (V^{\mathbb{C}} \times U \times W) \cong \mathbb{C}^N | Im(z) - ReL_t(u,u) \in \Omega, \forall t \in \mathcal{D}\}$$

SIEGEL-III-GEBIET, *mit $N = n + m + k$.*

Bemerkungen:

(6.2.ϵ) $\mathcal{S}_{III} = \mathcal{S}_{III}(\Omega, L_t, \mathcal{D})$ ist ein Siegel-III-Gebiet über $\mathcal{D}$, dem entspricht, daß S_{III} ein Faserraum über $\mathcal{D}$ (s. [$\mathcal{SA}$] S.133) bzgl. der natürlichen Projektion von $\mathcal{S}_{III}$ auf $\mathcal{D}$ ist.

(6.2.ζ) Siegel-III-Gebiete werden für den Beweis (s. [$\mathcal{DADO}$90] Theorem S.87) benutzt, daß jedes quasisymmetrische Siegelgebiet nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung (s. Satz 7.2.5) bzgl. der Bergmannmetrik hat.

(6.2.η) Im folgenden werden ausschließlich HOMOGENE SIEGELGEBIETE $\mathcal{S}$ betrachtet, d.h. solche, für die $Aut(\mathcal{S})$ (s. (6.2.a)) transitiv auf $\mathcal{S}$ operiert.
Falls $\mathcal{D}$ der Definition 6.2.7 ein homogenes beschränktes Gebiet ist, kann aufgrund des Satzes 6.1.1 $\mathcal{D}$ auch als affin homogenes Siegelgebiet angesehen werden.
Sei g eine Kählermetrik (s. Definition 1.1.2) auf $\mathcal{S}$, dann bezeichnen wir mit $Aut(\mathcal{S}, g)$ die Gruppe der biholomorphen Isometrien von $(\mathcal{S}, g)$.

6.3 Normale J-Algebren und h.b.G.

Normale J-Algebren sind bei der Untersuchung h.b.G. von Bedeutung. Sie bilden oft den Ausgangspunkt für Untersuchungen des zugrunde liegenden Gebietes. Dies wird durch zahlreiche Arbeiten z.B. in [$\mathcal{DR}$96],[$\mathcal{DA}$80], [$\mathcal{TS}$91] usw. dokumentiert.

Definition 6.3.1 (Normale J-Algebra) *Eine auflösbare Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ mit den folgenden Eigenschaften nennt man eine* NORMALE J-ALGEBRA*:*

(nj.1) BEDINGUNG $\mathbb{R}$-SPALTEND

Der Operator $ad(g_0) : g \mapsto [g_0, g]$ hat nur reelle charakteristische Wurzeln für alle $g_0 \in \mathfrak{s}$.

(nj.2) INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG FÜR J

Es gibt einen Endomorphismus J auf $\mathfrak{s}$, so daß $J^2 = -Id$ und

$$[x,y] + J([J(x),y]) + J([x,J(y)]) - [J(x),J(y)] = 0$$

für alle $x, y \in \mathfrak{s}$ gilt.

(nj.3) RIEMANNSCHE METRIK

Es existiert eine Linearform ω *auf* $\mathfrak{s}$*, so daß* $\forall x, y \in \mathfrak{s}$ *gilt:*

$$\omega([J(x), J(y)]) = \omega([x,y]) \text{ und } \omega([J(x), x]) > 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Bemerkungen und Beispiel:

(6.3.α) Es soll nicht unerwähnt bleiben, daß der Begriff der J-ALGEBRA dem der normalen J-Algebra eigentlich vorangeht. Die wesentlichen Unterschiede zwischen diesen beiden Objekten sind: Eine J-Algebra hat nicht notwendigerweise keine Isotropiealgebra und ist auch nicht immer $\mathbb{R}$-spaltend (s. z.B. Abschnitt 2, S.46 ff. in [$\mathcal{PS}$] für eine Definition und weitere Eigenschaften von J-Algebren).

(6.3.β) Zwei normale J-Algebren $\{\mathfrak{s}, J\}$ und $\{\mathfrak{s}', J'\}$ sind isomorph, wenn es einen Isomorphismus $\psi : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}'$ der Lie-Algebren gibt, so daß $\forall x \in \mathfrak{s}$ gilt

$$\psi(Jx) \equiv J'\psi(x).$$

Dadurch ist eine Äquivalenzrelation auf den normalen J-Algebren gegeben und wir erhalten Isomorphismenklassen von normalen J-Algebren.

(6.3.γ) $(nj.2)$ ist gerade die Integrabilitätsbedingung für J (s. [$\mathcal{KON}\mathcal{O}II$] S.217, Theorem 6.4), J ist eine komplexe Struktur (s. auch (1.1.c-d)).

(6.3.δ) Die Linearform ω auf $\mathfrak{s}$ kommt von der Symplektischen- oder Riemannschen-Struktur einer Kählermetrik g.
Der Tangentialraum T_zD eines homogenen beschränkten Gebietes D in z ist für alle $z \in D$ isomorph zu $\mathfrak{s}$. Sei h die hermitesche Form, die durch die Metrik g auf $\mathfrak{s}$ induziert wird. Dann gilt $\forall X, Y \in \mathfrak{s}$

$$Im(h(X,Y)) = \omega([X,Y]),$$

wobei ω dann eine Linearform auf $\mathfrak{s}$ ist.

(6.3.B1) *Elementares Beispiel*

Sei $\mathfrak{s}$ eine reell zweidimensionale normale J-Algebra, dann ist die Lie-Algebrenstruktur von $\mathfrak{s}$ vollkommen festgelegt, was wie folgt gesehen werden kann:
Sei $0 \neq x_0 \in \mathfrak{s}$ ein beliebiges Element, so gilt aufgrund von $(nj.3)$ der Definition 6.3.1 $\omega([Jx_0, x_0]) > 0$. Dies impliziert $[Jx_0, x_0] \neq 0$ und wir können deshalb $[Jx_0, x_0] = x_1 \neq 0$ setzen, wobei im allgemeinen $x_1 \neq x_0$ gilt.
Da x_0 und Jx_0 linear unabhängige Elemente aus $\mathfrak{s}$ sind und die Dimension von $\mathfrak{s}$ Zwei ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$ mit $x_1 = ax_0 + Jbx_0$ und $Jx_1 = Jax_0 - bx_0$. Daraus ergibt sich $[Jx_1, x_1] = (a^2 + b^2)x_1$. Wir setzen $z = \frac{1}{\lambda}x_1$ mit $\lambda = \sqrt{a^2+b^2}$, dann gilt $[Jz, z] = z$ und $\mathfrak{s} = \mathbb{R}z + \mathbb{R}Jz$.
Daraus folgt, daß jede normale J-Algebra der reellen Dimension Zwei ein Element z mit der Eigenschaft $[Jz, z] = z$ enthält. Dies läßt den Schluß zu, daß alle reell zweidimensionalen normalen J-Algebren isomorph zueinander sind.

(6.3.ϵ) Es ist eine wohlbekannte Tatsache, daß jeder biholomorphen Äquivalenzklasse homogener beschränkter Gebiete in $\mathbb{C}^n$ bijektiv eine Isomorphismenklasse normaler J-Algebren (s. (6.3.β)) der reellen Dimension $2n$ entspricht (s. [$\mathcal{GVP}$67] §4 und Abschnitt 6.1).

6.4 Zerlegungen normaler J-Algebren

In diesem Abschnitt werden Zerlegungen einer normalen J-Algebra angegeben. Eine Diskussion bzw. eine Erläuterung darüber, wie diese Zerlegungen evtl. miteinander zusammenhängen, schließt sich an.
Für die verschiedenen Zerlegungen weisen wir insbesondere auf die Arbeiten von [$\mathcal{PA}$96], [$\mathcal{KA}$], [$\mathcal{MU}$], [$\mathcal{KA}$67] und [$\mathcal{PS}$] hin.

Für eine normale J-Algebra $\mathfrak{s}$ gibt es mehrere Zerlegungen:

(6.4.Z1) Die erste Zerlegung resultiert aus der Definition von $\mathfrak{s}$, da $\mathfrak{s}$ eine auflösbare Lie-Algebra ist. Es gilt folglich

$$\begin{aligned} \mathfrak{s} &= \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \\ &= \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{a}$ ist eine abelsche Unteralgebra von $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{n}$ ist die erste Derivierte, also die erste abgeleitete Algebra von $\mathfrak{s}$ (s. [$\mathcal{VA}$] S.200), ein nilpotentes Ideal.

(6.4.a) Die reelle Dimension von $\mathfrak{a}$ wird RANG der normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ genannt.

(6.4.Z2) Eine genauere Untersuchung von $\mathfrak{s}$ ergibt, daß $\mathfrak{s}$ die orthogonale, semidirekte Summe elementarer J-Algebren ist (vgl. [$\mathcal{PS}$] S.55-56), d.h.:

$$\mathfrak{s} = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{s}_i.$$

Die $\mathfrak{s}_i$ sind elementare J-Algebren.

Definition 6.4.1 (elementare J-Algebra) *Sei $\mathfrak{s}_i$ eine normale J-Algebra mit Skalarprodukt $< \, , >$ und $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{n}_i \oplus J\mathfrak{n}_i \oplus \mathfrak{z}_i$, so daß gilt:*
(eJ.1) $dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_i = 1$. Daher gilt auch $dim_{\mathbb{R}} J\mathfrak{n}_i = 1$.
(eJ.2) $\exists \; E_i \in \mathfrak{n}_i$ mit $[JE_i, E_i] = E_i$.
(eJ.3) $\forall \; Z \in \mathfrak{z}_i$ gilt: $[JE_i, Z] = \frac{1}{2} Z$.
(eJ.4) $\forall \; Z, Z' \in \mathfrak{z}_i$ gilt: $[Z, Z'] = < Z, JZ' > E_i$.
Dann nennt man $\mathfrak{s}_i$ eine ELEMENTARE J-ALGEBRA.

Für die Lie-Klammerprodukte der Elemente aus einem $\mathfrak{s}_i$ gilt offensichtlich:

$[\,,\,]$	$\mathfrak{n}_i$	$J\mathfrak{n}_i$	$\mathfrak{z}_i$
$\mathfrak{n}_i$	0	$\subset \mathfrak{n}_i$	0
$J\mathfrak{n}_i$	$\subset \mathfrak{n}_i$	0	$\subset \mathfrak{z}_i$
$\mathfrak{z}_i$	0	$\subset \mathfrak{z}_i$	$\subset \mathfrak{n}_i$

.

Elementare Folgerungen:

i.) $\mathfrak{z}_k$ ist J invariant.
ii.) Statt „enthalten in $\mathfrak{n}_i$“, können wir auch immer wegen Definition 6.4.1 (eJ.1) und (eJ.2) „ein Vielfaches von E_i“ schreiben.

Für die möglichen Lie-Klammerprodukte zwischen zwei verschiedenen elementaren J-Algebren $\mathfrak{s}_k$ und $\mathfrak{s}_l$ mit $k < l$ ergibt sich:

[,]	$\mathfrak{n}_k$	$J\mathfrak{n}_k$	$\mathfrak{z}_k$	$\mathfrak{n}_l$	$J\mathfrak{n}_l$	$\mathfrak{z}_l$
$\mathfrak{n}_k$	0	$\mathbb{R}E_k$	0	0	0	0
$J\mathfrak{n}_k$	$\mathbb{R}E_k$	0	$\subset \mathfrak{z}_k$	0	0	0
$\mathfrak{z}_k$	0	$\subset \mathfrak{z}_k$	$\mathbb{R}E_k$	$\subset \mathfrak{z}_k$	$\subset \mathfrak{z}_k$	$\subset \mathfrak{z}_k$
$\mathfrak{n}_l$	0	0	$\subset \mathfrak{z}_k$	0	$\mathbb{R}E_l$	0
$J\mathfrak{n}_l$	0	0	$\subset \mathfrak{z}_k$	$\mathbb{R}E_l$	0	$\subset \mathfrak{z}_l$
$\mathfrak{z}_l$	0	0	$\subset \mathfrak{z}_k$	0	$\subset \mathfrak{z}_l$	$\mathbb{R}E_l$

.

Einfache Eigenschaften (s. [$\mathcal{PA}$96] S.14):

i.) Für $k < l$ ist $[J\mathfrak{n}_k + \mathfrak{n}_k, \mathfrak{s}_l] = 0$.
ii.) $[\mathfrak{s}_l, \mathfrak{z}_k] \subset \mathfrak{z}_k \ \forall\ k < l$.

(6.4.Z3) Wurzelraumzerlegung für normale J-Algebren vom Rang r:

(6.4.b) $$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i} + \sum_{i<j}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i \pm \alpha_j)}.$$

Für die Existenz einer solchen Zerlegung siehe [$\mathcal{PS}$] Theorem 2, S.61, dabei sind die α_i Einsformen auf $\mathfrak{n}$ und es gilt für alle Wurzelräume

$$\mathfrak{n}_* := \{X \in \mathfrak{n} | [A, X] = *(A)X,\ \forall A \in \mathfrak{a}\}.$$

Dabei steht $*$ stellvertretend für eine der möglichen Wurzeln.

Eigenschaften der Wurzelräume:

(W.1) $J\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_m+\alpha_n}{2}} = \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_m-\alpha_n}{2}}$, $\forall\ m, n$ mit $m < n$.
(W.2) $\forall i$ gilt $J\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i}{2}} = \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i}{2}}$, J-Invarianz.
(W.3) Jedes $\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ hat die reelle Dimension 1 und es gilt $J\mathfrak{n}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{a}$.
(W.4) Es gibt $\forall i$ ein $X_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ mit $\alpha_j(JX_i) = \delta_{ij}$.
(W.5) Für zwei beliebige Wurzelräume $\mathfrak{n}_*$, $\mathfrak{n}_\diamond$ gilt:
$$[\mathfrak{n}_*, \mathfrak{n}_\diamond] \subset \mathfrak{n}_{*+\diamond}.$$
Falls $\mathfrak{n}_{*+\diamond} = \emptyset$ gilt, dann verschwindet die Lie-Klammer.
(W.6) Es gilt $[\mathfrak{n}_{\alpha_j}, \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_k-\alpha_j}{2}}] = \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_k+\alpha_j}{2}}$.
(W.7) $0 = < \mathfrak{n}_*, \mathfrak{n}_\diamond > = \omega([J\mathfrak{n}_*, \mathfrak{n}_\diamond])$ für $* \neq \diamond$ mit $*, \diamond \in \{\frac{1}{2}\alpha_i, \frac{\alpha_i \pm \alpha_j}{2}, \alpha_i\}$.
(W.8) Zusammenhang mit der Zerlegung in (6.4.Z2):
$$\mathfrak{s}_i = \mathfrak{n}_{\alpha_i} + J\mathfrak{n}_{\alpha_i} + \textstyle\sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i \pm \alpha_j}{2}} + \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}.$$

(6.4.Z4) Graduierung

Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von $Aut(\mathcal{S})$ (s. (6.2.a)), dann besitzt $\mathfrak{g}$ eine Graduierung; es gilt (s. z.B. [$\mathcal{MU}$] Theorem 6.2, S.48):

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{g}_1$$

und $[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] \subset \mathfrak{g}_{a+b}$, $\forall a, b \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Diese Graduierung wird von D'Atri auch Murakami-Index (s. [$\mathcal{DA}$80] S.67) genannt.

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{\mathit{aff}}$ von $\mathit{Aff}(\mathcal{S})$ (s. (6.2.b)) ist natürlich in $\mathfrak{g}$ enthalten, dadurch erhält $\mathfrak{g}_{\mathit{aff}}$ eine entsprechende von der Graduierung von $\mathfrak{g}$ induzierte Graduierung (s. z.B. auch [$\mathcal{SA}$] S.211). Es gilt:

$$\mathfrak{g}_{\mathit{aff}} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{g}_0.$$

Eine normale J-Algebra $\mathfrak{s}$, die in $\mathfrak{g}_{\mathit{aff}}$ enthalten ist (vgl. [$\mathcal{KA}$] S.32 oben), besitzt deshalb ebenfalls eine induzierte Graduierung:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{-1} \oplus \mathfrak{s}_{-\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{s}_0.$$

Dabei gilt $\mathfrak{g}_{-1} = \mathfrak{s}_{-1}$, $\mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{s}_{-\frac{1}{2}}$, aber $\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{g}_0$.

Zusammenhang mit der Zerlegung in (6.4.Z3):

$$\mathfrak{g}_{-1} \cong \sum_{i \leq j} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i + \alpha_j}{2}}, \ \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} \cong \sum_i \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i}{2}}, \ \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{a} + \textstyle\sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}}.$$

$\mathfrak{g}_0$ ist die Lie-Algebra der rein linearen Transformationen $GL(\mathcal{S})$ (s. (6.2.d)).

Matrizenrealisierung:

Wenn das Siegelgebiet $\mathcal{S}(\Omega, F)$ in $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ liegt, besitzen die Anteile der Graduierung von $\mathfrak{g}_{\mathit{aff}}$ die folgende Matrizenrealisierung (s. z.B. [$\mathcal{MU}$] S.19 ff., Proposition 6.2.4 und insbesondere das Beispiel im Anhang A.1):

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} \times & \mathrm{n} & \mathrm{m} & 1 \\ \hline \mathrm{n} & 0 & 0 & \mathrm{a} \\ \mathrm{m} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) | a \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

$$\mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} \times & \mathrm{n} & \mathrm{m} & 1 \\ \hline \mathrm{n} & 0 & \mathrm{F}_b & 0 \\ \mathrm{m} & 0 & 0 & \mathrm{b} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) | b \in \mathbb{C}^m \right\}.$$

F_b ist eine $n \times m$ Matrix mit $F_b(w) := 2iF(w, b)$, $\forall w \in \mathbb{C}^m$.

$$\mathfrak{g}_0 = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} \times & \mathrm{n} & \mathrm{m} & 1 \\ \hline \mathrm{n} & \mathrm{A} & 0 & 0 \\ \mathrm{m} & 0 & \mathrm{B} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) | A \in \mathrm{Mat(n,}\mathbb{R}\mathrm{)}, B \in \mathrm{Mat(m,}\mathbb{C}\mathrm{)}, \text{ mit} \right.$$

$A \in LieAut(\Omega)$ $(s.(2.1.e))$ und $AF(u,v) = F(Bu,v) + F(u,Bv)$, $\forall u,v \in \mathbb{C}^m\}$.

Es existieren kanonische Einparametergruppen (s. z.B. [$\mathcal{MU}$] S.18-19):

$$\begin{aligned} \{p_{ta}\}_{t\in\mathbb{R}} \text{ mit } a \in \mathbb{R}^n, \text{ wobei } p_{ta}(z,w) &= (z+ta, w), \\ \{q_{tb}\}_{t\in\mathbb{R}} \text{ mit } b \in \mathbb{C}^m, \text{ wobei } q_{tb}(z,w) &= (z + 2iF(w,tb) + iF(tb,tb), w+tb), \\ \text{und } \{c_t\}_{t\in\mathbb{R}}, \text{ wobei } c_t(z,w) &= (e^t z, e^{\frac{1}{2}t} w). \end{aligned}$$

Dabei ist $(z,w) \in \mathcal{S}(\Omega, F)$. c_t definiert ein besonderes Element $E := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} c_t$, für das gilt:

$$E = \left(\begin{array}{c|ccc} \times & \mathrm{n} & \mathrm{m} & 1 \\ \hline \mathrm{n} & \mathrm{Id}_n & 0 & 0 \\ \mathrm{m} & 0 & \frac{1}{2}\mathrm{Id}_m & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und $-E$ hat folgende Kommutatoren:

$$[-E, X] = XE - EX = \begin{cases} \text{-X} & \text{für } \mathrm{X} \in \mathfrak{g}_{-1} \\ \text{-}\frac{1}{2}\mathrm{X} & \text{für } \mathrm{X} \in \mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}} \\ 0 & \text{für } \mathrm{X} \in \mathfrak{g}_0. \end{cases}$$

Die Eigenräume von $ad(-E)$ erzeugen die Graduierung von $\mathfrak{g}_{aff}$.

Definition 6.4.2 (Räume 1. und 2. Art) *Die Wurzelräume vom Typ $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$ einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ mit Rang r nennen wir* RÄUME 1. ART, *die vom Typ $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}$ $(i \neq j)$ nennen wir* RÄUME 2. ART.
Wir setzen $\forall i,j \in \{1,...,r\}$ $m_i = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$ und $n_{ij} = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}$ für die rellen Dimensionen der Räume 1. Art und 2. Art.

6.5 Rekonstruktion des Siegelgebietes aus einer normalen J-Algebra

Wir erinnern in diesem Abschnitt an das wohlbekannte Verfahren, wie man aus einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ das Siegelgebiet $\mathcal{S}$ rekonstruieren kann. Dieses Rekonstruktionsverfahren wird „skizziert". In Kapitel 8 wird dieses Verfahren benötigt werden.

Rekonstruktionsverfahren:

Als Grundlage dient dazu [$\mathcal{PS}$] S.66 ff. Abschnitt 5. Wir fassen zusammen:
Sei $(\mathfrak{s}, \omega)$ eine normale J-Algebra vom Rang r (s. (6.4.a)) mit dazugehöriger Lie-Gruppe S. Dann gilt (s. (6.4.Z3)):

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \textstyle\sum_{i=1}^r \mathfrak{n}_{\alpha_i} \oplus \sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i \pm \alpha_j)} \oplus \sum_{i=1}^r \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}.$$

Wir betrachten $J\mathfrak{L} = \mathfrak{a} \oplus \sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}$ den Kegelanteil (s. Definition 6.5.2) und setzen $\mathfrak{u} = \sum_{i=1}^r \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$. $\mathfrak{L}$ ist ein kommutatives Ideal und $J\mathfrak{L}$ eine Lie-Unteralgebra

von $\mathfrak{s} = \mathfrak{L} \oplus J\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}$. Es gilt $[J\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \subset \mathfrak{L}$. Die adjungierte Abbildung $ad : J\mathfrak{L} \to End(\mathfrak{L})$ ist eine treue lineare Darstellung von $J\mathfrak{L}$. In eindeutiger Weise ist dadurch eine lineare Darstellung $exp\{(adJX)|_{\mathfrak{L}} : X \in \mathfrak{L}\}$ des exponentiellen Bildes von $J\mathfrak{L}$, also von $exp(J\mathfrak{L}) = G^0$ gegeben.
Da $[J\mathfrak{n}_{\alpha_k}, \mathfrak{n}_{\alpha_k}] \subset \mathfrak{n}_{\alpha_k}$ und $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}_{\alpha_k} = 1$ (s. (W.3) in (6.4.Z3)) gilt, existieren $E_k \neq 0$ in $\mathfrak{n}_{\alpha_k}$ mit $[JE_k, E_k] = E_k$, $\forall k \in \{1, ..., r\}$. Man setzt $E = \sum_{k=1}^r E_k$, dann folgt $[JE, X] = X$, $\forall X \in \mathfrak{L}$. JE ist das Urbild der Identität der Darstellung ad. Sei Ω der Orbit von E unter der Gruppenoperation G^0. Dann ist Ω ein homogener regulärer Kegel in $\mathfrak{L}$ (für einen Beweis s. [$\mathcal{PS}$] S.69).
Der Raum $W := \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u}$ ist ein komplexer Vektorraum, wobei $iU = JU$ für alle $U \in \mathfrak{u}$ gilt. Als Mannigfaltigkeit hat W eine komplexe Struktur und auf jedem reellen Tangentialraum eine komplexe Strukturabbildung j.
Jedes $Y \in W$ bestimmt ein reelles Vektorfeld Y^0 auf W durch Translation und es gilt $(iY)^0 = j(Y^0)$. Durch $F(U, V) = \frac{1}{4}([JU, V] + i[U, V])$ ist eine Ω-hermitesche Form $F : \mathfrak{u} \times \mathfrak{u} \to \mathfrak{L}^{\mathbb{C}}$ definiert und dadurch ist das Siegelgebiet

$$\mathcal{S} = \{(z, u) \in \mathfrak{L}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{u} | Imz - F(u, u) \in \Omega\}$$

gegeben. Die Lie-Gruppe S operiert durch affine Transformationen einfach transitiv auf $\mathcal{S}$. Somit ist das zu $\mathfrak{s}$ assoziierte Siegelgebiet $\mathcal{S}$ vollständig rekonstruiert.

Zuerst geben wir nun eine direkte Konsequenz aus dem Rekonstruktionsverfahren an, die es ermöglicht, eine normale J-Algebra eindeutig den Siegel-I- oder II-Gebieten zuzuordnen (s. auch (6.2.β)).

Korollar 6.5.1 *Jede normale J-Algebra $\mathfrak{s}$, die keine Räume 1. Art besitzt, gehört zu einem Siegel-I-Gebiet.*

Das Rekonstruktionsverfahren motiviert folgende Definition:

Definition 6.5.2 (Kegelanteil/Tubenanteil) *Sei $\mathfrak{s}$ eine normale J-Algebra vom Rang r mit der Wurzelraumzerlegung (6.4.b),*

$$\mathfrak{L} := \sum_{k=1}^r n_{\alpha_k} + \sum_{k<l} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_k+\alpha_l)}$$

(s. (6.4.Z3) (W.1) und (W.2)), dann nennen wir $J\mathfrak{L}$ den Kegelanteil *von $\mathfrak{s}$. $\mathfrak{s} - \bigoplus_{i=1}^r \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$ nennen wir den* Tubenanteil *von $\mathfrak{s}$.*

Der den Abschnitt abschließende Satz (s. [$\mathcal{DO}$85a] S.297) gibt eine mögliche Antwort auf den am Anfang des Kapitels beschrittenen „philosophischen Exkurs“. Unter allen auflösbaren, einfach transitiv operierenden Gruppen eines Siegelgebietes werden diejenigen, deren Lie-Algebren normale J-Algebren sind, ausgezeichnet.

Satz 6.5.3 *Sei g eine Kählermetrik auf einem Siegelgebiet $\mathcal{S}$ und $Aut(\mathcal{S}, g)$ (s. (6.2.η)) operiere transitiv auf $\mathcal{S}$, dann gilt:*

(a) *Es existiert eine einfach transitive auflösbare Untergruppe* $\tilde{S} \subset Aut(\mathcal{S}, g)$.

(b) *Sei* $\tilde{S} \subset Aut(\mathcal{S}, g)$ *eine beliebige, auflösbare, einfach transitiv auf* $\mathcal{S}$ *operierende Lie-Gruppe und* $(\tilde{\mathfrak{s}}, (.,.), J)$ *die korrespondierende Kähler Algebra, wobei* $\tilde{\mathfrak{s}} = Lie(\tilde{S})$ *und* $(.,.)$ *das von* g *induzierte Skalarprodukt ist.*
Dann ist $(\tilde{\mathfrak{s}}, (.,.), J)$ *eine Modifikation einer normalen* J*-Algebra* $(\mathfrak{s}, (.,.), J)$, *wobei* $S = exp(\mathfrak{s}) \subset Aut(\mathcal{S}, g)$ *ist.*

(c) *Es existiert eine einfach transitive* $\mathbb{R}$*-spaltende auflösbare Untergruppe* $S \subset Aut(\mathcal{S}, g)$.

Für die Definition einer Kähler Algebra siehe [$\mathcal{GVP}$67] S.34 ff.. Mit einer Modifikation/Deformation D_e verändert man die Lie-Klammerprodukte zwischen Elementen aus $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ und somit die Struktur einer auflösbaren Lie-Algebra $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ (s. (6.4.Z1)). Dadurch gelangt man zu einer, zu der Ausgangsalgebra $\mathfrak{s}$ nicht isomorphen Algebra $D_e(\mathfrak{s}) = \tilde{\mathfrak{s}}$. Eine präzise Definition kann z.B. [$\mathcal{DO}$85b] S.149 ff., [$\mathcal{AZWII}$] S.44 ff., oder [$\mathcal{GOWI}$88] S.252 ff. entnommen werden.
Für $exp(\mathfrak{s}) = S \subset Aut(\mathcal{S}, g)$ (s. (6.2.η)) gilt, daß auch $exp(\tilde{\mathfrak{s}}) = \tilde{S} \subset Aut(\mathcal{S}, g)$, mit $\tilde{S} \not\cong S$, aber (S, g) ist wegen Lemma [$\mathcal{PA}$96] S.23 isometrisch zu $(\tilde{S}, g)$.

6.6 Irreduzible Siegelgebiete

Die Reduzibilitäts-/Irreduzibilitätseigenschaft eines Siegelgebietes $\mathcal{S}$ entspricht eindeutig der Reduzibilitäts-/Irreduzibilitätseigenschaft des dazugehörigen Kegels. Dieser Sachverhalt erfährt hier eine Klärung.

Definition 6.6.1 (irreduzibler Kegel) *Einen regulären Kegel* $\Omega \subset V$ *nennt man* IRREDUZIBEL *genau dann, wenn* V *sich nicht in ein Produkt* $V_1 \times V_2$ *von nicht trivialen Vektorräumen zerlegen läßt, so daß:*

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,\ \textit{mit}\ \Omega_i = V_i \cap \Omega\ \textit{für}\ i = 1, 2\ \textit{gilt.}$$

Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet, das durch die Daten (V, U, Ω, F) (vgl. Definition 6.2.3) gegeben ist. Nehmen wir an, daß wir folgende direkte Summenzerlegungen haben: $U = U_1 \oplus U_2$, $V = V_1 \oplus V_2$, so daß $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ ist, mit $\Omega_1 \subset V_1$, $\Omega_2 \subset V_2$ und $F_i := F|_{U_i \times U_i} \subset V_i^{\mathbb{C}}$ für $i \in \{1, 2\}$, $F|_{U_1 \times U_2} = 0$. Dann ist $\mathcal{S}$ das direkte Produkt von zwei Siegelgebieten $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$, die durch die Daten $\mathcal{S}_i = (V_i, U_i, \Omega_i, F_i)$, $i \in \{1, 2\}$ gegeben sind.

(6.6.a) Ein soches $\mathcal{S}$ wird REDUZIBEL, sonst IRREDUZIBEL genannt.

Jede direkte Summenzerlegung eines Siegelgebietes als Kählermannigfaltigkeit wird auf diese Weise erhalten, denn es gelten die folgenden Aussagen, die wir aus [$\mathcal{NA}$75] S.72-74 zitieren:

Proposition 6.6.2 *Sei* $\mathcal{S} = (V, U, \Omega, F)$ *ein Siegelgebiet in* $V^{\mathbb{C}} \times U$ *und sei* $\mathfrak{g}$ *die Lie-Algebra aller infinitesimalen Automorphismen von* $\mathcal{S}$. *Wenn* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ *erfüllt ist, wobei* $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ *nicht triviale Ideale von* $\mathfrak{g}$ *sind, dann folgt* $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$, *wobei jeweils* $\mathcal{S}_i$ *das Siegelgebiet ist, das zu* $(V_i, U_i, \Omega_i, F_i)$, $i = 1, 2$ *gehört, so daß:*

1. $V = V_1 + V_2$, $U = U_1 + U_2$ *und* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ *ist.*

2. $F(u, u') = F_1(u_1, u_1') + F_2(u_2, u_2')$ *mit* $u = u_1 + u_2$, $u' = u_1' + u_2'$, *wobei* $u_i, u_i' \in U_i$ *für* $i = 1, 2$.

3. $\mathfrak{g}_i$ *wird mit der Lie-Algebra aller infinitesimaler Automorphismen von* $\mathcal{S}_i$ *für* $i = 1, 2$ *identifiziert* .

Sei (M, g) eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die HOLONOMIEGRUPPE $Hol_p(M)$ im Punkt $p \in M$ ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(T_pM, g_p)$. Sie wird durch diejenigen Endomorphimsmen erzeugt, die man durch Parallelverschiebung entlang differenzierbarer Schleifen in p erhält. Weil M zusammenhängend ist, sind die Holonomiegruppen in verschiedenen Punkten von M zueinander isomorph. Wir können deshalb auch von der Holonomiegruppe $Hol(M)$ von M sprechen. Die Zusammenhangskomponente der Eins $Hol^0(M)$ ist gleich $Hol(M)$, da M einfach zusammenhängend ist.
Operiert $Hol(M)$ reduzibel auf TM, dann ist M isometrisch zu einer Produktmannigfaltigkeit. Dabei wird jedem Faktor des Mannigfaltigkeitsproduktes von M in eindeutiger Weise ein entsprechender irreduzibler Faktor von TM zugeordnet. Diese Zerlegung der Mannigfaltigkeit nennt man die DE RHAM ZERLEGUNG von M und man erhält folgende Aussage (s. Theorem 4.7 in [$\mathcal{NA}$75]):

Satz 6.6.3 *Sei* $\mathcal{S}$ *ein Siegelgebiet mit Bergmannmetrik* g *und* $\mathcal{S} = \mathsf{S}_1 \times ... \times \mathsf{S}_m$ *sei die de Rham Zerlegung von* $\mathcal{S}$. *Dann ist für jedes* $i = 1, ..., m$ S_i *holomorph äquivalent zu einem irreduziblen Siegelgebiet* $\mathcal{S}_i$.

Beweis:
Sei $\mathfrak{g}_i$ die Lie-Algebra aller infinitesimalen Automorphismen von S_i. Jedes $\mathfrak{g}_i$ ist ein Ideal in $\mathfrak{g} = LieAut(\mathcal{S})$ und es gilt $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{g}_i$, da nach Lemma 4.5 in [$\mathcal{NA}$75] $Aut(\mathcal{S}) = G_1 \times ... \times G_m$ ist, wobei $G_i = Aut(\mathsf{S}_i)$ gilt. Aufgrund des Lemmas 4.6 in [$\mathcal{NA}$75] ist jedes $\mathfrak{g}_i$ nicht trivial.
Unter Anwendung von Proposition 6.6.2 folgt, daß es Siegelgebiete $\mathcal{S}_i$ gibt, mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times ... \times \mathcal{S}_m$. Die Bergmannmetrik von $\mathcal{S}$ ist die Produktmetrik der Bergmannmetriken der Faktoren $\mathcal{S}_i$ bzw. S_i (s. [$\mathcal{KO}$59] Theorem 3.2 bzw. 2.5).
Da die de Rham Zerlegung bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist, gilt nun demzufolge, daß jedes $\mathcal{S}_i$ irreduzibel und holomorph äquivalent zu einem S_j ist. □

Korollar 6.6.4 *Sei durch* (U, V, Ω, F) *ein Siegelgebiet* $\mathcal{S}$ *gegeben. Dann gilt:*

(1) Ω *ist irreduzibel* $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}$ *ist irreduzibel.*

(2) $\mathcal{S}$ *ist genau dann irreduzibel, wenn sich die Lie-Algebra* $Aut(\mathcal{S})$ *nicht in eine direkte Summe von Idealen zerlegen läßt.*

Beweis:
In der ersten Aussage ist „$\Rightarrow$" eine direkte Folge aus dem Satz 6.6.3 und „$\Leftarrow$" wird z.B. in [$\mathcal{KA}$67] Theorem 6.3, S.125 bewiesen.
Die zweite Aussage folgt direkt unter Anwendung von Proposition 6.6.2. $\square$

7 Quasisymmetrische Siegelgebiete

Ausgehend von der Definition der quasisymmetrischen Siegelgebiete stellen wir das Klassifikationsergebnis der irreduziblen quasisymmetrischen Siegelgebiete (*IQS*) in einer Tabelle dar. Zudem geben wir Eigenschaften der quasisymmetrischen und symmetrischen Gebiete an, die wir zum Teil immer wieder benötigen werden.

7.1 Definitionen und Klassifikation

Zuerst wird die ursprüngliche, auf Satake (s. [$\mathcal{SA}$] S.226) zurückgehende Definition der quasisymmetrischen Siegelgebiete in unserem Kontext angegeben. Dafür sind einige Festlegungen und Vorbereitungen nötig, mit denen wir beginnen.

Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet, und $U, V, \Omega, F, \eta_B, \sigma_B$... seien die zu $\mathcal{S}$ gehörenden Größen (vgl. Definition 6.2.3, Abschnitt 3.2, insbesondere Satz 3.2.3). Wir lassen im folgenden die Indizierung von η, σ, ρ durch B weg, wobei B für die Bergmannmetrik stand.
Nun definiert man über σ, abgeleitet von η in (3.1.d), eine positiv-definite hermitesche Form ρ auf U mit Werten in $\mathbb{C}$ via (s. [$\mathcal{DO}$79e] Lemma 2.8, S.48)

(7.1.a) $$\rho(u,w) := \sigma(F(u,w),e), \forall u,w \in U.$$

Zudem definiert man eine Abbildung $\varphi : V^{\mathbb{C}} \to End_{\mathbb{C}}(U,\rho)$ (s. [$\mathcal{DO}$79e] (2.6)) durch

(7.1.b) $$\rho(\varphi(x)u,w) := \sigma(F(u,w),x), \forall x \in V^{\mathbb{C}} \text{ und } \forall u,w \in U.$$

Die Abbildung φ besitzt folgende Eigenschaften (s. [$\mathcal{DO}$79e] Lemma 2.9, S.49):

(7.1.E1) $$\forall v \in V^{\mathbb{C}} \text{ gilt } \varphi(v)^{\rho} = \varphi(\overline{v}).$$

(7.1.E2) $$\forall x \in V \text{ gilt } \varphi(x) \in Sym(U,\rho) = \{X \in End_{\mathbb{C}}(U,\rho) | X^{\rho} = X\}.$$

(7.1.E3) $$\forall x \in \Omega^{\sigma} \text{ gilt } \varphi(x) \in Pos(U,\rho) = \{X \in Sym(U,\rho) | X > 0 \text{ bzgl. } \rho\}.$$

(7.1.E4) $$\varphi(e) = Id.$$

Definition 7.1.1 (symmetrisches Siegelgebiet) *Ein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ heißt* SYMMETRISCH *genau dann, wenn $LieAut(\mathcal{S})$ halbeinfach ist.*

Nun können wir Theorem 3.5 [$\mathcal{SA}$] formulieren:

Satz 7.1.2 *Ein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ ist symmetrisch genau dann, wenn gilt:*

(S.1) *Ω ist homogen und σ-selbstdual (s. (2.1.d)).*

(S.2) *Die Abbildung* $\varphi : V \to End_{\mathbb{C}}(U, \rho)$ *ist eine Jordan-Algebra Darstellung von* $(\mathfrak{A}, e)$ *in* $Sym(U, \rho)^+$, *d.h.* $\forall x, y \in V$ *gilt* $\varphi(xy) = \frac{1}{2}(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x))$.

(S.3) $F(\varphi(F(w, v))u, w) = F(v, \varphi(F(u, w))w)$, *für alle* $u, v, w \in U$.

Aus Satz 7.1.2 resultiert die Definition der quasisymmetrischen Siegelgebiete, wobei wir an dieser Stelle für den Irreduzibilitätsbegriff auf den Abschnitt 6.6 hinweisen möchten.

Definition 7.1.3 (quasisymmetrisches Siegelgebiet) *Ein Siegelgebiet* $\mathcal{S}$ *bezeichnet man als* QUASISYMMETRISCHES SIEGELGEBIET *genau dann, wenn (S.1) und (S.2) des Satzes 7.1.2 erfüllt sind.*
Ein quasisymmetrisches Siegelgebiet $\mathcal{S}$ *heißt* IRREDUZIBLES QUASISYMMETRISCHES SIEGELGEBIET *(kurz IQS), wenn* $\mathcal{S}$ *nicht das Produkt quasisymmetrischer Räume ist.*

Ein quasisymmetrisches Siegelgebiet ist homogen (vgl. [$\mathcal{ZE}$79a] S.632, oder auch [$\mathcal{SA}$] S.226 ff.). Für homogene Siegelgebiete ergeben sich äquivalente Kennzeichnungen für den Fall, daß sie quasisymmetrisch sind (s. [$\mathcal{DO}$80] Theorem 2.1, S.540).

Satz 7.1.4 *Für ein homogenes Siegelgebiet* $\mathcal{S}$ *sind äquivalent:*

(1) $\mathcal{S}$ *ist quasisymmetrisch.*

(2) $\Omega = \Omega^\sigma$.

(3) $\mathfrak{A}$ *ist eine Jordan-Algebra, also* q=1 *(s. Proposition 3.1.8).*

Bemerkungen:

(7.1.α) Die dritte Bedingung (S.3) des Satzes 7.1.2 wurde unter der Voraussetzung, daß das Gebiet quasisymmetrisch ist, von Dorfmeister und Satake unabhängig gefunden. Diese Bedingung ist äquivalent zu der von Satake benutzten ursprünglichen Bedingung. Für weitere zu (S.3) äquivalente Bedingungen s. [$\mathcal{SA}$] Lemma 4.6, S.228 und [$\mathcal{DO}$80] Theorem 3.3, S.545.

(7.1.β) Wenn $\mathcal{S}$ ein irreduzibles homogenes Siegelgebiet ist, gilt q=1 und wegen Lemma 4.6 [$\mathcal{DO}$79a] folgt $\forall x, y \in V$

$$\varphi(xy) = \frac{1}{2}(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)).$$

Weil im q=1 Fall auch $\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \cong V$ gilt, folgt somit automatisch (S.2) des Satzes 7.1.2.

(7.1.γ) Aufgrund der Definition 7.1.3 und des Satzes 7.1.2 ist klar, daß jedes symmetrische Siegelgebiet quasisymmetrisch ist (s. auch [$\mathcal{DO}$80] Lemma 3.2, S.545).

(7.1.δ) In dieser Arbeit verwenden wir von allen Charakterisierungen der quasisymmetrischen Siegelgebiete, innerhalb der homogenen Siegelgebiete, hauptsächlich (3) von Satz 7.1.4.

(7.1.ϵ) Es genügt in Satz 7.1.4 (2) nicht, die Selbstdualität für eine geeignete positiv-definite Bilinearform zu fordern. Man vergleiche dafür insbesondere mit der Bemerkung 1.2 b) in [$\mathcal{DO}79a$] S.77.

Jedem quasisymmetrischen Siegelgebiet $\mathcal{S}$ kann aufgrund des Theorems 2.5 in [$\mathcal{DO}80$] S.542 bijektiv ein Tripel $(\mathfrak{A}, \varphi, \rho)$ zugeordnet werden. $\mathfrak{A}$ ist dabei eine formal-reelle Jordan-Algebra auf V mit Einselement e, ρ eine $\mathbb{C}$-wertige positiv-definite hermitesche Form von U (s. (7.1.a)) und $\varphi : \mathfrak{A} \to Sym(U, \rho)^+$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren mit $\varphi(e) = Id$ (s. (7.1.b) und (7.1.E1-E4)).
Die einfachen formal-reellen Jordan-Algebren sind durch den ersten Struktursatz 4.1.2 vollständig bestimmt. Für ein beliebiges quasisymmetrisches Gebiet bilden die zu den einfach formal-reellen Jordan-Algebren gehörenden Räume die irreduziblen Faktoren (vgl. die erste Aussage des zweiten Struktursatzes 4.2.1 und Abschnitt 6.6 oder auch [$\mathcal{DO}80$] Lemma 2.3, S.541).
Es genügt folglich, zur Klassifikation der quasisymmetrischen Siegelgebiete, die irreduziblen Komponenten, ergo die einfachen formal-reellen Jordan-Algebren zu betrachten. Für jede solche Algebra erhält man bestimmte Paare (φ, ρ) und somit eine Klassifikation der irreduziblen quasisymmetrischen Gebiete (s. [$\mathcal{DO}79a$] II §2 oder auch [$\mathcal{SA}$] §5, S.233).
Jedes irreduzible quasisymmetrische Siegelgebiet entspricht einem Typ der Tabelle 1 (vgl. [$\mathcal{SA}$] S.240). Die darin enthaltenen symmetrischen Räume werden in der darauffolgenden Tabelle 2 dargestellt (s. [$\mathcal{DADO}88$] Kapitel 3, S.329).

Tabelle 1: **Irreduzible quasisymmetrische Gebiete IQS**

Typ von $\mathcal{S}$	*Kegel* Ω	$dim_{\mathbb{R}}\Omega$	*Rang*	$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}$
$\mathrm{I}_{r;s_1,s_2}$ $r \geq 2,\ s_1 \geq s_2 \geq 0$	$Pos(r, \mathbb{C})$	r^2	r	$r^2 + (s_1 + s_2)r$
II_{r,s_1} $r \geq 3,\ s_1 \geq 0$	$Pos(r, \mathbb{H})$	$r(2r-1)$	r	$2r^2 - r + 2s_1 r$
III_{r,s_1} $r \geq 1\ s_1 \geq 0$	$Pos(r, \mathbb{R})$	$\frac{1}{2}r(r+1)$	r	$\frac{1}{2}r(r+1) + s_1 r$
$\mathrm{IV}_{r;s_1,s_2}$ $r \geq 6$ *gerade* $s_1 \geq s_2 \geq 0$	$P(1, r-1)$	r	2	$r + (s_1 + s_2)2^{\frac{r}{2}-1}$
$\mathrm{V}_{r;s_1}$ $r \geq 5$ *ungerade* $s_1 \geq 0$	$P(1, r-1)$	r	2	$r + s_1 2^{\frac{r-1}{2}}$
VI_0	$Pos(3, \mathbb{O})$	27	3	27

Tabelle 2: **Irreduzible symmetrische Siegelgebiete**

Typ von $\mathcal{S}$	$dim_{\mathbb{C}}\mathcal{S}$	*Rang*	*Gruppe*	*Isotropiegruppe*
$\mathrm{I}_{r,s_1,0} = \mathrm{I}_{r+s_1,r}$ $r \geq 2,\ s_1 \geq 0$	$r^2 + s_1 r$	r	$SU(r+s_1, r)$	$S(U(r+s_1) \times U(r))$
$\mathrm{II}_{r,s_1} = \mathrm{II}_{2r+s_1}$ $r \geq 3,\ s_1 = 0$ oder 1	$2r^2 - r + 2s_1 r$	r	$SO^*(4r+2s_1, \mathbb{H}) =$ $SO(n = 2r + s_1, \mathbb{H})$	$U(n)$
$\mathrm{III}_{1,s_1} = \mathrm{I}_{s_1+1,1}$ $s_1 \geq 0$ $\mathrm{III}_{r,0} = \mathrm{III}_r$ $r \geq 1$	$s_1 + 1$ $\frac{1}{2}r(r+1)$	1 r	$SU(s_1+1, 1)$ $Sp(r, \mathbb{R})$	$S(U(s_1+1) \times U(1))$ $U(r)$
$\mathrm{IV}_{r;0,0} = \mathrm{IV}_r$ $\mathrm{IV}_{6;1,0} = \mathrm{II}_5$ $\mathrm{IV}_{8;1,0} = \mathrm{V}$	r 10 16	2 2 2	$SO(r,2)$ $SO(5,\mathbb{H})$ E^{-14}	$SO(r) \times SO(2)$ $U(5)$ $SO(10) \times SO(2)$
$\mathrm{V}_{r;0} = \mathrm{V}_r$ $r \geq 5$ *ungerade*	r	2	$SO(r,2)$	$SO(r) \times SO(2)$
VI_0	27	3	$E_{7,3}$	$E_6 \times SO(2)$

Die irreduziblen quasisymmetrischen Siegelgebiete der Tabelle 1 wurden auf verschiedene Weisen von Satake in [$\mathcal{SA}$76], Dorfmeister in [$\mathcal{DO}$79a] und Takeuchi in [$\mathcal{TA}$75] klassifiziert.

7.2 Eigenschaften und weitere Charakterisierungen

In diesem Abschnitt geben wir Eigenschaften von quasisymmetrischen Siegelgebieten an, die diese unter allen homogenen Siegelgebieten auszeichnen.

Für quasisymmetrische Siegelgebiete stellten D'Atri und Miatello fest, daß die Dimensionen der Wurzelräume (s. (6.4.Z3)) einer zugeordneten normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ (s. Definition 6.3.1) gewisse Regelhaftigkeiten aufweisen, genauer zeigten sie (s. Proposition 3 in [$\mathcal{DAMI}$83], S.539):

Satz 7.2.1 *Sei* $\mathcal{S}$ *ein irreduzibles homogenes Siegelgebiet mit dazugehöriger normaler* J*-Algebra* $\mathfrak{s}$ *vom Rang* r.
Es gibt Konstanten $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, *so daß* $\forall k, l$ *mit* $1 \leq k < l \leq r$ *gilt:*

$$d_1 = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_k}{2}} \ \text{und}\ d_2 = dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_k \pm \alpha_l}{2}}$$

dann und nur dann, wenn $\mathcal{S}$ *quasisymmetrisch ist.*

Bemerkung:

(7.2.α) Dieses Kriterium der Konstanz der Dimensionen der Räume 1. und 2. Art bei einer normalen J-Algebra, die zu einem irreduziblen quasisymmetrischen

Siegelgebiet gehört, wird von entscheidender Bedeutung für uns sein (s. (9.1.β)).

Die Definition 7.1.3 der quasisymmetrischen Siegelgebiete ist von algebraischer Natur. Eine erste geometrische Kennzeichnung wird in [$\mathcal{DADO}$88] durch das Theorem, S.323 erlangt, das wir nun wiedergeben:

Satz 7.2.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles homogenes Siegelgebiet und $\mathcal{S}'$ sei das korrespondierende Tubengebiet, d.h. $\mathcal{S}' = \{(z,0) \in V^{\mathbb{C}} \times U | Im z \in \Omega\}$ (s. auch Definition 6.5.2).*
Dann ist $\mathcal{S}$ quasisymmetrisch genau dann, wenn die Bergmannmetrik von $\mathcal{S}$ eine symmetrische Metrik auf $\mathcal{S}'$ induziert.

Bemerkungen zum Beweis:
Die Charakterisierungen der Bergmannmetrik durch die Sätze 8.2.1 und 7.2.1 gehen wesentlich in den Beweis des Satzes 7.2.2 ein. Ebenfalls von Bedeutung ist die Tatsache, daß quasisymmetrische Tubengebiete schon symmetrisch sind, d.h. es gibt keine $\mathcal{S}_I$ Siegelgebiete, die echt quasisymmetrisch sind. Für einen vollständigen Beweis siehe Abschnitt 1 in [$\mathcal{DADO}$88].

Mit der Klassifikationstabelle für irreduzible quasisymmetrische Gebiete und Satz 7.2.1 erhalten wir die folgende Aussage:

Satz 7.2.3 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles quasisymmetrisches Siegelgebiet der reellen Dimension s und $\mathfrak{s}$ eine dazugehörige, normale J-Algebra vom Rang r. Außerdem sei die reelle Dimension des zu $\mathcal{S}$ gehörenden, irreduziblen selbstdualen Kegels Ω gleich k.*
Dann erfüllen die Konstanten d_1 und d_2 der Dimensionen der Räume 1. und 2. Art in $\mathfrak{s}$ des Satzes 7.2.1 folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{lccl} (a) & s & = & 2r + d_1 r + 2d_2\binom{r}{2}, \\ (b) & k & = & r + d_2\binom{r}{2}. \end{array}$$

Beweis:
$\mathcal{S}$ ist ein irreduzibles quasisymmetrisches Siegelgebiet und somit entspricht $\mathcal{S}$ einem Raum der Tabelle 1. Die normale J-Algebra $\mathfrak{s}$ besitzt die Zerlegung (6.4.Z3) und aufgrund des Satzes 7.2.1 haben die Wurzelräume $\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i}{2}}$ $i \in \{1,...,r\}$ bzw. $\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i \pm \alpha_j}{2}}$ $(i<j), i,j \in \{1,...,r\}$ konstante reelle Dimensionen d_1 bzw. d_2. Da die Räume 1. Art die Eigenschaft (6.4.Z3) (W.2) besitzen, also J invariant sind, entspricht d_1 einer geraden natürlichen Zahl. Wir erhalten also aus alledem:

$$\underbrace{\mathfrak{s}}_{s} = \underbrace{\mathfrak{a}}_{r} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i}}_{r} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}}_{rd_1} + \underbrace{\sum_{\substack{j,i=1\\ i<j}}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}}_{d_2\binom{r}{2}} + \underbrace{\sum_{\substack{j,i=1\\ i<j}}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i-\alpha_j)}}_{d_2\binom{r}{2}}.$$

Unter jeder Summe von Wurzelräumen bzw. Räumen geben wir dabei die ent-

sprechende reelle Dimension an. Wir nutzten außerdem aus, daß $J\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ und daß wegen (6.4.Z3) (W.3) $\forall i\ dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_{\alpha_i}) = 1$ gilt. Es folgt sofort die Gleichung, die unter (a) angegeben ist.
Nach der Definition 6.5.2 ist $\mathfrak{a} \oplus \sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i - \alpha_j}{2}}$ der Kegelanteil und da Ω die reelle Dimension k hat, gilt folglich (b).
Ist schließlich aus der Tabelle 1 ein beliebiges *IQS* mit der totalen Dimension s, dem Rang r und mit der Dimension k für den dazugehörigen Kegel Ω vorgegeben, so können wir mit (a) und (b) leicht die Dimensionen d_1, d_2 der Räume 1. Art und 2. Art in $\mathfrak{s}$ berechnen.
Die Tabelle 1 läßt sich also in eine Tabelle normaler J-Algebren übersetzen, für die wir d_1, d_2 und r angeben, und dies sind dann bis auf Isomorphie die einzigen möglichen normalen J-Algebren, die zu einem *IQS* gehören. □

Bemerkung und Beispiele:

(7.2.$\boldsymbol{\beta}$) Pabst stellte im zweiten Teil ihrer Arbeit [$\mathcal{PA}$96], im Kapitel 5, die Frage, wann eine normale J-Algebra zu einer einfach zusammenhängenden irreduziblen symmetrischen nicht-positiv gekrümmten Kähler-Mannigfaltigkeit gehört.
Für ihren Beweis nutzte sie die Klassifikation der symmetrischen Räume und Satz 7.2.1 aus. Mit Satz 7.2.3 ergeben sich zusammen mit der Tabelle 2 der symmetrischen Siegelgebiete leicht die Theoreme 1 und 2 in [$\mathcal{PA}$96], S.38.

(7.2.B1) $\mathrm{I}_{l+1,1} = \mathrm{III}_{1,l}$ ist ein symmetrisches Gebiet mit

$$k = 1, s = 2(l+1).$$

Daraus folgt $d_2 = 0$, $d_1 = 2l$ und somit gilt $\mathfrak{s} = \mathfrak{n}_{\alpha_1} \oplus J\mathfrak{n}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_1}{2}}$. Die reelle Dimension des Wurzelraumes $\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_1}{2}}$ ist $2l$.

(7.2.B2) $\mathrm{III}_\nu = \mathrm{III}_{\nu,o}$ ist ein symmetrisches Gebiet, dabei gilt:

$$r = \nu, k = \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1), s = \nu(\nu+1) \text{ und } \nu \geq 1.$$

Mit Satz 7.2.3 folgt $(a) \Leftrightarrow \nu+1 = 2+d_1+d_2(\nu-1)$ und $(b) \Leftrightarrow \nu+1 = 2+d_2(\nu-1)$. Daraus ergibt sich, daß $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, also $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i \pm \alpha_j}{2}}) = 1$ und

$$\mathfrak{s} = \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{n}_{\alpha_i} \oplus \underbrace{J \sum_{i=1}^{\nu} \mathfrak{n}_{\alpha_i}}_{=\mathfrak{a}} \oplus \sum_{\substack{j,i=1 \\ i<j}}^{\nu} \mathfrak{n}_{\frac{\alpha_i \pm \alpha_j}{2}} \text{ gilt.}$$

Aus Satz 7.2.3 ergibt sich mit Hilfe der Tabelle 1 der *IQS* folgendes Ergebnis:

Korollar 7.2.4 *Sei $\mathcal{S}$ ein IQS mit dazugehörigem Kegel Ω, dann nimmt d_2 jeweils die entsprechenden Werte der folgenden Tabelle an:*

Ω	$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}$	d_2
$Pos(\nu, \mathbb{R})$ $(\nu \geq 1)$	ν	*1*
$Pos(\nu, \mathbb{C})$ $(\nu \geq 2)$	ν	*2*
$Pos(\nu, \mathbb{H})$ $(\nu \geq 3)$	ν	*4*

Ω	$dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}$	d_2
$P(1,\nu-1)$ $(\nu \geq 6$ *und gerade*$)$	2	$\nu-2$
$P(1,\nu-1)$ $(\nu \geq 5$ *und ungerade*$)$	2	$\nu-2$
$Pos(3,\mathbb{O})$	3	8

.

Daß quasisymmetrische Siegelgebiete bzgl. der Bergmannmetrik besondere Krümmungseigenschaften (s. auch die Einleitung und Satz 12.2.2) haben, ist von besonderer Bedeutung für diese Arbeit; es gilt:

Satz 7.2.5 *Ist $\mathcal{S}$ ein quasisymmetrisches Siegelgebiet, dann hat bzgl. der Bergmannmetrik $\mathcal{S}$ nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung.*

Gezeigt wurde dieser Satz von D'Atri und Dorfmeister [$\mathcal{DADO}$90] in Theorem, S.87. Der dazu von ihnen gegebene Beweis ist klassifikationsfrei. Sie nutzten, falls der Rang des *IQS* $\mathcal{S}$ größer gleich drei ist, aus, daß $\mathcal{S}$ als Faserraum eines symmetrischen Siegel-III-Gebiets realisiert werden kann. Symmetrische Siegelgebiete haben bzgl. der Bergmannmetrik aufgrund des Satzes 7.3.1 (Sym.7) nicht-positive Schnittkrümmung, also insbesondere nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung (s. auch (8.1.δ)).
Nun zeigten D'Atri und Dorfmeister, daß die von der Bergmannmetrik des symmetrischen Siegel-III-Gebiets induzierte Metrik auf dem Faserraum ein Vielfaches der Bergmannmetrik der Faser, also des *IQS* ist. Wegen Korollar 8.1.4 folgt nun, daß $\mathcal{S}$ bzgl. der Bergmannmetrik nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung hat.
Für den Fall, daß der Rang gleich Zwei ist, werden andere Methoden benutzt.

7.3 Charakterisierungen der symmetrischen Gebiete

Es werden solche Ergebnisse dargestellt, welche die symmetrischen Siegelgebiete gegenüber den nur homogenen Siegelgebieten auszeichnen bzw. eindeutig kennzeichnen. Der Aufgabe, solche Kriterien zu finden und zu erforschen, widmete sich D'Atri (s. [$\mathcal{DDZ}$85] und [$\mathcal{GI}$96]).

Die Charakterisierung der irreduziblen symmetrischen Gebiete innerhalb der *IQS* wurde in der jeweiligen „Sprache" z.B. in [$\mathcal{DO}79a$] II §3 oder [$\mathcal{SA}$] S.240 durchgeführt.

Sei nun $$\mathcal{S}(\Omega, F) = \{(z,u) \in V^{\mathbb{C}} \times U | Im(z) - F(u,u) \in \Omega\}$$
ein homogenes Siegelgebiet und $G = Aut^0(\mathcal{S})$ sei die $\mathbb{I}$-Zusammenhangskomponente von $Aut(\mathcal{S})$, definiert in (6.2.a). Mit K bezeichnen wir die Isotropiegruppe des Punktes $b \in \mathcal{S}$ und mit $\mathfrak{k}$ die Lie-Algebra von K.
Die Menge
$$\check{S} := \{(z,u) \in V^{\mathbb{C}} \times U | Im(z) - F(u,u) = 0\}$$
nennt man den Šilovrand des Siegelgebiets (s. z.B. [$\mathcal{MU}$] S.13 und [$\mathcal{KR}$92]). Wir können nun die Ergebnisse aus [$\mathcal{DDZ}$85] zusammenfassend formulieren:

Satz 7.3.1 *Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet, dann sind folgende Aussagen über $\mathcal{S}$ äquivalent:*

(Sym.1) *$\mathcal{S}$ ist symmetrisch.*

(Sym.2) *Die fast komplexe Strukturabbildung J im Tangentialraum $T_b\mathcal{S}$ ist im Bild der infinitesimalen Isotropiedarstellung enthalten.*

(Sym.3) *Es existiert kein nichttriviales G-invariantes Vektorfeld.*

(Sym.4) *Die Algebra der G-invarianten Differentialoperatoren auf $\mathcal{S}$ ist kommutativ.*

(Sym.5) *Die Isotropiegruppe K operiert transitiv auf dem Šilovrand.*

(Sym.6) *Es existiert ein Vektorfeld X im Zentrum der Isotropie-Algebra $\mathfrak{k}$ im Basispunkt $b \in \mathcal{S} \subset \mathbb{C}^n$, so daß das Differential von X als lineare Transformation des $\mathbb{C}^n$ invertierbar ist.*

(Sym.7) *Bezüglich der Bergmannmetrik hat $\mathcal{S}$ nicht-positive Schnittkrümmung.*

Bemerkungen:

(7.3.α) Aus (Sym.7) folgt direkt, daß jedes homogene nicht symmetrische beschränkte Gebiet bzgl. der Bergmannmetrik positive Schnittkrümmungsrichtungen aufweist.

(7.3.β) Wie in der Einleitung schon erwähnt, führen die meisten zusätzlichen Eigenschaften, die man bei einem homogenen Siegelgebiet fordern kann, zu den symmetrischen Gebieten. Dies wird durch Satz 7.3.1 verdeutlicht.

8 Werkzeuge

Dieses Kapitel dient dazu, einige weitere Werkzeuge zur Verfügung zu stellen, Zusammenhänge zu erklären, sowie auch schon Bekanntes in das Gesamtgefüge der Arbeit zu integrieren und somit weitere Grundlagen zu schaffen.

8.1 Krümmungen

Aufgrund der Homogenität eines Siegelgebietes und weil jedes Siegelgebiet eine komplexe Struktur besitzt, gelten für die geometrischen Strukturen dieser Gebiete spezielle Formeln bzw. existieren besondere Begriffsbildungen. Diese werden wir darstellen und erläutern.

Für diesen Abschnitt sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und linksinvarianter Riemannscher Metrik g. Mit $< .,. >$ bezeichnen wir das von g auf $\mathfrak{g}$ induzierte Skalarprodukt und mit ∇ den Levi-Civita Zusammenhang.

Die wichtigsten Formeln für die Krümmung usw. sind dann:

(8.1.K1) Die Koszul-Formel

Der Levi-Civita Zusammenhang ∇ ist bekanntlich gegeben durch:

$$2 < \nabla_X Y, Z > \;=\; < [X,Y], Z > + < [Z,Y], X > + < [Z,X], Y > .$$

Dabei sind X, Y, Z beliebige linksinvariante Vektorfelder auf G (vgl. [$\mathcal{KONOI}$] Proposition 2.3, S.160).

(8.1.K2) Der Krümmungstensor

Lemma 8.1.1 *Für den Riemannschen Krümmungstensor R gilt:*

$$\begin{aligned} < R(Z_1,Z_2)Z_3, Z_4 > \;&=\; - < \nabla_{Z_2} Z_3, \nabla_{Z_1} Z_4 > + < \nabla_{Z_1} Z_3, \nabla_{Z_2} Z_4 > \\ &\quad - < \nabla_{[Z_1,Z_2]} Z_3, Z_4 >, \quad \forall Z_i \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Beweis:
Da $R(Z_1,Z_2)Z_3$ gleich $\nabla_{Z_1}\nabla_{Z_2}Z_3 - \nabla_{Z_2}\nabla_{Z_1}Z_3 - \nabla_{[Z_1,Z_2]}Z_3$ ist, folgt wegen der Linksinvarianz der Metrik und der von den Z_i induzierten Vektorfeldern die Behauptung, z.B.: Aus $Z_1 < \nabla_{Z_2} Z_3, Z_4 > = 0$ folgt sofort, daß $< \nabla_{Z_1}\nabla_{Z_2} Z_3, Z_4 > + < \nabla_{Z_2} Z_3, \nabla_{Z_1} Z_4 >$ verschwindet. □

(8.1.K3) Sei J eine linksinvariante komplexe Struktur auf G, dann ist die holomorphe Schnittkrümmung K^H (s. [$\mathcal{KONOII}$] S.168) einer J-invarianten Fläche F_X, die durch die Einheitsvektoren $X, JX \in \mathfrak{g}$ aufgespannt wird, definiert durch:

$$\begin{aligned} K^H(F_X) \;&:=\; < R(X,JX)JX, X > \\ &=\; - < \nabla_{JX} JX, \nabla_X X > + < \nabla_X JX, \nabla_{JX} X > - < \nabla_{[X,JX]} JX, X > . \end{aligned}$$

Im Kählerfall (s. Definition 1.1.2) gilt:

$$K^H(F_X) \;=\; -2 < \nabla_{JX}JX, \nabla_X X > - < \nabla_{[JX,X]}X, JX > .$$

(8.1.K4) Seien $X, Y \in \mathfrak{g}$ beliebige Einheitsvektoren und F_X, F_Y die von ihnen erzeugten J invarianten Flächen. Dann ist die HOLOMORPHE BISCHNITTKRÜMMUNG K^B definiert durch (s. [$\mathcal{KON}\mathcal{O}II$] S.372):

$$\begin{aligned} K^B(F_X, F_Y) \;&:=\; < R(X, JX)JY, Y > \\ &=\; - < \nabla_{JX}JY, \nabla_X Y > + < \nabla_X JY, \nabla_{JX} Y > - < \nabla_{[X,JX]}JY, Y > . \end{aligned}$$

Es gilt $K^B(F_X, F_X) = K^H(F_X)$ und im Kählerfall folgt:

$$K^B(F_X, F_Y) \;=\; -2 < \nabla_{JX}JY, \nabla_X Y > + < \nabla_{[X,JX]}Y, JY > .$$

Seien X, Y beliebige Vektoren, dann definieren wir

(8.1.a) $$B(X, Y) := < R(X, JX)JY, Y >.$$

Bemerkungen:

(8.1.α) Für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ erfüllt der KRÜMMUNGSENDOMORPHISMUS $R(X, Y)$ einer homogenen Kählermannigfaltigkeit folgende Bedingungen:

$$R(X, Y)J = JR(X, Y) \text{ und } R(X, Y) = R(JX, JY)$$

(s. dafür [$\mathcal{KON}\mathcal{O}II$] S.149).

(8.1.β) *Die Krümmung in Termen der Strukturkonstanten* c_{ij}^k

Lemma 8.1.2 *Sei $\{e_i\}$ eine orthonormale Basis von $(\mathfrak{g}, < .,. >)$, dann gilt für die Schnittkrümmung:* $< R(e_i, e_j)e_j, e_i > =$

$$\textstyle\sum_k((-c_{ki}^i c_{kj}^j) - \frac{1}{4}(c_{ij}^k - c_{jk}^i + c_{ki}^j)(c_{ij}^k + c_{jk}^i - c_{ki}^j) + \frac{1}{2}c_{ij}^k(c_{jk}^i + c_{ki}^j - c_{ij}^k)).$$

Beweis:
Wir setzen $[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$, also gilt $c_{ij}^k = < [e_i, e_j], e_k >$. Für die kovariante Ableitung zweier Basiselemente gilt demnach $\nabla_{e_i} e_j = \frac{1}{2}\sum_k(c_{ij}^k + c_{ki}^j + c_{kj}^i)e_k$, und speziell für $i = j$ gilt $\nabla_{e_i} e_i = \sum_k c_{ki}^i e_k$. Die Behauptung folgt nun durch weiteres Einsetzen aus Lemma 8.1.1. □

(8.1.γ) *Die Schnittkrümmung eines regulären Kegels* Ω

Seien u, v konstante Vektorfelder auf dem Kegel Ω. Für jedes $x \in \Omega$ läßt sich via (3.1.g) eine kommutative Algebra $\mathfrak{A}(x)$ definieren, indem man in der Formel (3.1.g) x nicht gleich e setzt. Mit $A(x; \cdot)$ notieren wir die Multiplikation in $\mathfrak{A}(x)$. Man erhält die folgende Formel für den Krümmungsendomorphismus (s.

[$\mathcal{DOKO}$79] S.145):

$$R_x(u,v) = A(x;v)A(x;u) - A(x;u)A(x;v);$$

für die Schnittkrümmung in der Identität e gilt folglich, siehe auch (3.1.h):

$$\begin{aligned} K_e(u,v) &= \sigma(v \circ (u \circ v), u) - \sigma(u \circ (v \circ v), u) \\ &= \sigma(u \circ v, u \circ v) - \sigma(u^2, v^2). \end{aligned}$$

(8.1.δ) Die holomorphe Bischnittkrümmung ist ein „Zwischenkonzept“ zwischen der holomorphen Schnittkrümmung und der Schnittkrümmung. Befindet sich die holomorphe Bischnittkrümmung innerhalb eines bestimmten Wertebereiches, so gilt dies auch für die holomorphe Schnittkrümmung. Die Schnittkrümmung determiniert sowohl die holomorphe Schnittkrümmung als auch die holomorphe Bischnittkrümmung.

Für den Beweis der Krümmungsvermutung ist es wichtig zu wissen, in welchem Zusammenhang die holomorphe Bischnittkrümmung einer komplexen Untermannigfaltigkeit bzgl. der induzierten Metrik steht, im Vergleich zu der holomorphen Bischnittkrümmung einer Kählermetrik des komplexen Außenraumes. Auskunft darüber gibt (s. [$\mathcal{DADO}$90] S.87):

Lemma 8.1.3 *Sei (M,g) eine komplexe Untermannigfaltigkeit einer Kählermannigfaltigkeit (M',g') mit zweiter Fundamentalform II. Dabei ist g die von g' induzierte Metrik auf M. Seien zudem R und R' die Riemannschen Krümmungstensoren von M bzw. M'. Dann gilt für alle Vektorfelder X, X' auf M:*

$$g(R(X,JX)JX',X') = g'(R'(X,JX)JX',X') - 2g'(II(X,X'),II(X,X')).$$

Beweis:
Mit der Gauß-Gleichung (s. z.B. [$\mathcal{KONO}II$] S.23)

$$\begin{aligned} g'(R'(W,Z)Y,X) &= g(R(W,Z)Y,X) + g'(II(X,Z),II(Y,W)) \\ &\quad -g'(II(Y,Z),II(X,W)) \end{aligned}$$

erhalten wir, wenn M' Kähler und M eine komplexe Untermannigfaltigkeit ist:

$$\begin{aligned} g'(R'(X,JX)JY,Y) &= g(R(X,JX)JY,Y) + g'(II(Y,JX),II(JY,X)) \\ &\quad -g'(II(JY,JX),II(Y,X)). \end{aligned}$$

Weil $II(JX,Y) = II(X,JY) = JII(X,Y)$ gilt (s. [$\mathcal{KONO}II$] S.175, Prop. 9.1) und g' eine Kählermetrik ist, folgt:

$$\begin{aligned} g'(R'(X,JX)JY,Y) &= g(R(X,JX)JY,Y) + 2g'(II(Y,X),II(Y,X)) \\ &= g(R(X,JX)JY,Y) + 2||II(Y,X)||^2. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Aus Lemma 8.1.3 ergibt sich sofort die folgende interessante Aussage:

Korollar 8.1.4 *Ist M eine komplexe Untermannigfaltigkeit von M', so besitzt M nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung (kurz n.p.h.B.), wenn M' nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung hat.*

Dieses Verhalten der holomorphen Bischnittkrümmung bei komplexen Untermannigfaltigkeiten in Räumen mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung ist von fundamentaler Bedeutung. Eine gleiche Aussage für die Schnittkrümmung existiert nicht. Wir können von der Gaußgleichung nicht ablesen, daß die Schnittkrümmung einer Untermannigfaltigkeit noch kleiner wird; dies ist z.B. falsch für die in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebettete Sphäre S^n bzgl. des Euklidischen Skalarproduktes auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n+1}$.

8.2 Einsteinkoeffizienten

Auf Koszul [$\mathcal{KZ}$55] geht die Zuordnung einer Einsform ω zu einer Metrik g zurück. Wir betrachten den Fall, in dem g eine Einsteinmetrik auf einem homogenen Siegelgebiet $\mathcal{S}$ ist.

Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet mit zugehöriger normaler J-Algebra $\mathfrak{s}$ vom Rang r (s. (6.4.a)). Für $\mathfrak{s}$ existiert die Zerlegung (6.4.b), und wir wählen für jedes i mit $1 \leq i \leq r$ ein Element

(8.2.a) $$E_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i} \ (\Rightarrow JE_i \in \mathfrak{a}).$$

Dabei soll jedes E_i die Bedingung (eJ.2) der Definition 6.4.1 erfüllen und folglich gilt $\forall i,j \in \{1,...,r\}$ $\alpha_i(JE_j) = \delta_{ij}$. D'Atri zeigte (s. [$\mathcal{DA}$80] Theorem 4, S.66):

Satz 8.2.1 (D'Atri) *Wenn die linksinvariante Metrik auf $\mathcal{S}$, die zu ω der normalen J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$ korrespondiert, Einstein ist, dann gilt:*

$$\frac{\alpha_k(JX_k)}{\omega(X_k)}\Big(1 + \tfrac{1}{4} dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_k} + \tfrac{1}{2}\big(\sum_{l,l>k} dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_k+\alpha_l)} + \sum_{l,l<k} dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_l+\alpha_k)}\big)\Big) = c.$$

Dabei ist c eine reelle Konstante, unabhängig von $k = 1,...,r$ und $0 \neq X_k \in \mathfrak{n}_{\alpha_k}$ mit $X_k = \lambda_k E_k$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Gehört ω zur Bergmannmetrik, dann gilt c=1.

Beweis:
Dazu berechnet man die Riccikrümmung (s. (1.2.g)) für spezielle Vektoren. Sei $H \in \mathfrak{a}$ und $X \in \mathfrak{n}_\epsilon$, wobei ϵ eine beliebige Wurzel ist, dann gilt (s. Lemma 8.1.1, (6.4.Z3) (W.1-7)):

$$\begin{aligned} R(X,H)H &= -\nabla_{[X,H]}H = \epsilon(H)\nabla_X H \\ &= \epsilon(H)(\underbrace{\nabla_H X}_{=0} + [X,H]) \\ &= -\epsilon(H)^2 X. \end{aligned}$$

Falls $X \in \mathfrak{a}$ gilt, so folgt $R(X,H)H = 0$. Man erhält für die Riccikrümmung $Ric(H,H) = -\sum_{\epsilon} \epsilon(H)^2 dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_\epsilon)$, dabei steht nun ϵ für die Summation über die Wurzeln α_i, $\frac{1}{2}\alpha_i$ ... der normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$. Eine weitere Spezialisierung ergibt $\forall k$, mit $1 \le k \le r$:

$$Ric(JX_k, JX_k) = -\lambda_k^2 \left(1 + \frac{1}{4}m_k + \frac{1}{2}\sum_{l,l>k} n_{kl} + \frac{1}{2}\sum_{l,l<k} n_{lk}\right).$$

Für n_{ij}, m_i sei auf die Definition 6.4.2 verwiesen. Wenn ω die Einsform der Bergmannmetrik ist, so gilt $Ric = - <.,.>$ (s. Proposition 1.2.8), wodurch die zweite Aussage gezeigt ist. □

Definition 8.2.2 (Einsteinkoeffizienten) *Die Werte $n_k := \omega(E_k)$ nennen wir die* Einsteinkoeffizienten*, wobei ω die zu einer Einsteinmetrik gehörende Einsform ist.*

Bemerkung:

(8.2.$\boldsymbol{\alpha}$) In den nachfolgenden Abschnitten sprechen wir oft einfach nur von den Einsteinkoeffizienten. Dies sind dann immer die Einsteinkoeffizienten der Bergmannmetrik, was aber auch aus dem jeweiligen Textzusammenhang hervorgehen sollte.

Lemma 8.2.3 *Ist $\mathcal{S}$ ein IQS, dann sind bzgl. der Bergmannmetrik alle Einsteinkoeffizienten gleich.*

Beweis:
Es gelten die Gleichungen des Satzes 8.2.1, und bzgl. der Bergmannmetrik gilt

$$\frac{1}{\omega(E_i)}(1 + \frac{1}{4}m_i + \frac{1}{2}\sum_{k,k>i} n_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{k,k<i} n_{ki}) = 1.$$

Nun, da $\mathcal{S}$ ein *IQS* ist, folgt die Behauptung mit Satz 7.2.1. □

Wir erhalten aus Lemma 8.2.3 ein einfaches Kriterium dafür, wann ein Siegelgebiet kein *IQS* ist. Unterscheiden sich nämlich zwei Einsteinkoeffizienten der Bergmannmetrik, so ist das Gebiet kein *IQS*.

8.3 Die Indexumkehr

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ einerseits und der Algebra $\mathfrak{A}$ andererseits geschaffen. Dabei wird geklärt, was auf der Algebrenseite den Wurzelräumen entspricht und umgekehrt. Die dazu benötigte Indexumkehr ist etwas subtil.

Sei $\mathfrak{A}$ die Algebra (3.1.g), die man aus (Ω, η, e) erhält, wobei η (3.1.A1-A5) erfüllt. Wenn $\mathcal{C}$ eine *q-PZ* (s. Definition 3.1.4) von $\mathfrak{A}$ ist, dann erhält man eine neue *q-PZ*, die man mit $\mathcal{C}^*$ bezeichnet, indem man $\forall 1 \le i \le j \le q$ $\mathfrak{A}^*_{ij} = \mathfrak{A}_{q+1-j,q+1-i}$ setzt.

Ordnen wir $\mathfrak{A}$ das Diagramm (s. insbesondere das Ende dieses Abschnitts)

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \cdots & \mathfrak{A}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}_{q1} & \cdots & \mathfrak{A}_{qq} \end{pmatrix}$$

zu, so entspricht das Diagramm von $\mathfrak{A}^*$ demjenigen Diagramm, welches man durch Spiegelung an der Nebendiagonalen aus dem Diagramm von $\mathfrak{A}$ erhält (s. z.B. (1), S.81 und Lemma 6.1, S.94 in [$\mathcal{DO}$75]).
Mit anderen Worten: Ist $\mathcal{C}$ definiert durch das *VOS* (s. Definition 3.2.6) $c_{11}, ..., c_{qq}$, dann ist $\mathcal{C}^*$ definiert durch das *VOS* $c_{qq}, ..., c_{11}$ (vgl. [$\mathcal{DO}$79*c*] S.80).

(8.3.a) $\mathcal{C}^*$ wird DUALE q-*PZ* genannt.

Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet, das mit dem Kegel Ω konstruiert wurde, $(\mathfrak{s}, \omega)$ sei eine dazugehörige normale J-Algebra und ∇ sei der via ω definierte Levi-Civita Zusammenhang (s. (8.1.K1)).
Ein Anteil von $LieAut(\Omega, \eta)$ ist in der normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ des Siegelgebiets enthalten und entspricht $J\mathcal{L}$ (vgl. Definition 6.5.2). Andererseits ist dieser Anteil als Vektorraum isomorph zu $\mathfrak{A}$; es gilt:

(8.3.b) $$\mathcal{L} \cong J\mathcal{L} \cong \mathfrak{A}.$$

Für alle $X, Y \in \mathcal{L}$ ist durch $X \cdot Y = -J\nabla_X Y$ ein Produkt definiert, und es gilt (s. Theorem 2 [$\mathcal{DA}$81] S.14):

Satz 8.3.1 *$\mathfrak{L}$ mit dieser Produktstruktur ist eine abelsche Algebra mit Einselement $E = \sum_{i=1}^r E_i$ (für E_i s. (8.2.a)). Die E_i erfüllen die Bedingungen eines VOS und sind primitive Idempotente (s. [$\mathcal{DO}$79a] S.94), d.h.*

$$\mathbb{R}E_i = \{Y \in \mathcal{L} | Y \cdot E_i = E_i\}.$$

Nach Theorem 5.1 in [$\mathcal{DO}$79*b*] S.336 existiert ein *VOS* $\mathcal{I} = \{e_{11}, ..., e_{rr}\}$ primitiver Idempotenter aus $\mathfrak{X}$, so daß $\forall i = 1, ..., r$

(8.3.c) $$\mathfrak{A}_{ii}^{\mathcal{I}} = \mathbb{R}e_{ii}$$

gilt, wobei $\mathfrak{A}_{ii}^{\mathcal{I}}$ ein Raum der *PZ* von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{I}$ ist, d.h. es gilt auch

(8.3.d) $$\mathfrak{A} = \sum_{1 \le i \le j \le r} \mathfrak{A}_{ij}^{\mathcal{I}}.$$

Wir definieren nun:

Definition 8.3.2 (spezielles VOS und spezielle Zerlegung) *Ein VOS $\mathcal{I} = \{e_{11}, ..., e_{rr}\}$ primitiver Idempotenter, für die (8.3.c) erfüllt ist, nennen wir ein*

SPEZIELLES-*VOS, kurz s-VOS. Die Peirce-Zerlegung (8.3.d) von* $\mathfrak{A}$ *nach einem s-VOS nennen wir die* SPEZIELLE-ZERLEGUNG, *kurz s-Zerlegung.*

Aufgrund des Satzes 8.3.1 und den obigen Bemerkungen ist es naheliegend, die Algebra $\mathfrak{A}$ mit $\mathcal{L}$ in Verbindung zu bringen. Tatsächlich können diese beiden Objekte identifiziert werden, was wir nun erklären:
Um $(\mathfrak{A}, \circ)$ mit $(\mathcal{L}, \cdot)$ identifizieren zu können (s. [$\mathcal{DDZ}$85] S.299-301), betrachtet man ein s-VOS $\mathcal{I} = \{e_{11}, ..., e_{rr}\}$ und die dazugehörige s-Zerlegung von $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}^{\mathcal{I}} = \sum\limits_{1 \le i \le j \le r} \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ij}$.
Da $\mathbb{R}e_{rr} = \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{rr}$ gilt, folgt z.B., daß $e_{rr} \circ \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ij} = 0$ für alle $i, j \in \{1, ..., r-1\}$ gilt. Die analogen Gleichungen erfüllt das dem Element e_{rr} zugeordnete Element $E_1 \in \mathfrak{n}_{\alpha_1}$ in $(\mathcal{L}, \cdot)$, was aus (6.4.b) und (8.1.K1) folgt.

(8.3.I) Die Algebra $(\mathfrak{A}^{\mathcal{I}}, \circ)$ ist isomorph zur Algebra $(\mathcal{L}, \cdot)$, dabei wird e_{ii} mit E_{r+1-i} (s. [$\mathcal{DDZ}$85] (16) S.301) identifiziert, und alle anderen Elemente bzw. Räume werden, ihren Indizes entsprechend, miteinander identifiziert.
Bei dieser Identifizierung geht ein Index i über zu $r + 1 - i$. Beim Übergang von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{L}$ und umgekehrt gilt es, die Indexumkehrung zu beachten.

Illustration:
Setzen wir $a_{ij} = \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ij}$, so findet beim Übergang von $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{L}$ folgende Zuordnung statt:

(8.3.e)

$$\mathfrak{A} \sim \begin{pmatrix} \mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1r} \\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22} & \cdots & \mathrm{a}_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{a}_{r1} & a_{r2} & \cdots & \mathrm{a}_{rr} \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathcal{L} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{n}_{\alpha_r} & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{r-1}+\alpha_r)} & \cdots & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_r)} \\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{r-1}+\alpha_r)} & \mathfrak{n}_{\alpha_{r-1}} & \cdots & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_{r-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_r)} & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_{r-1})} & \cdots & \mathfrak{n}_{\alpha_1} \end{pmatrix}.$$

Erst durch die Indexumkehr erreicht man eine Konsistenz zwischen den Notationen der Arbeiten [$\mathcal{DA}$79], [$\mathcal{DA}$80] und [$\mathcal{DA}$81] einerseits und der Arbeiten [$\mathcal{DO}$75], [$\mathcal{DO}$79*b*], [$\mathcal{DO}$79*c*] usw. andererseits. Betrachtet man in den erstgenannten Arbeiten den σ-dualen Kegel Ω^σ, dann entspricht dieser Kegel in den zweitgenannten Arbeiten dem Kegel Ω und umgekehrt. Es gilt für die von $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{C}^*$ definierten Kegel $Y^{(1)}$ bzw. $Y^{*(1)}$ (s. (3.1.q) und [$\mathcal{DO}$75] Satz 6.2 S.94):

Satz 8.3.3 *Sei* $\mathcal{C}$ *eine* $\mathfrak{K}$*-Zerlegung von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathcal{C}^*$ *die duale* $\mathfrak{K}$*-Zerlegung (s. dafür auch (8.3.a)), dann gilt:*

(1) $Y_{\mathcal{C}^*} = Y^\sigma_{\mathcal{C}}$ *(s. (3.1.q)),*

(2) $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^\sigma$ *(s. (3.1.o)) und* $\Gamma^{(1)*} = \Gamma^{(1)\sigma}$ *(s. (3.1.p)).*

Für $\mathfrak{A}^*$ stimmt die Indizierung schon mit der von $\mathcal{L}$ überein, d.h. identifizieren wir $(\mathfrak{A}^*, \circ)$ mit $(\mathcal{L}, \cdot)$, so wird e_{ii} auf E_i $\forall i = 1, ..., r$ abgebildet.

Bemerkung:

(8.3.α) Den Übergang von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{L}$ nennen wir auch einfach den Übergang von $\mathfrak{A}$ zu einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$.

Definition 8.3.4 *Die natürliche Zahl r, die der Anzahl der Elemente eines s-VOS von $\mathfrak{A}$ entspricht, nennen wir den* Rang *von $\mathfrak{A}$.*

Bemerkungen:

(8.3.β) Für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra ist, entspricht die Definition 8.3.4 der Definition 4.1.1.

(8.3.γ) Sei $\mathcal{S}(\Omega, F)$ ein Siegelgebiet, $\mathfrak{s}$ eine dazugehörige normale J-Algebra vom Rang r und $\mathfrak{A}$ die zu Ω assoziierte Algebra, dann gilt:

$$r = Rang(\mathfrak{A}) = Rang(\mathfrak{s}) = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}.$$

Wir definieren für ein Siegelgebiet $\mathcal{S}(\Omega, F)$ den Rang via

(8.3.f) $$Rang(\mathcal{S})(= Rang(\Omega)) := Rang(\mathfrak{A}).$$

Arbeitsdiagramm

Für die sich anschließenden Untersuchungen in den Kapiteln 9-12 hat sich folgendes Diagramm (8.3.g) zur Veranschaulichung als sehr nützlich erwiesen.
Sei $\mathcal{S}(\Omega, F, U, V)$ ein Siegelgebiet vom Rang r, $\mathfrak{s}$ eine $\mathcal{S}$ zugeordnete, normale J-Algebra, $\mathfrak{A}$ die assoziierte Algebra, abgeleitet von η_B, und $\mathcal{C}$ eine optimale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung von $\mathfrak{A}$. Des weiteren setzen wir $U^i := \varphi(c_{ii})U$ für $i = 1, ..., q$ (vgl. (7.1.b); die c_{ii} sind die Einselemente der $\mathfrak{A}_{ii}$). Dann ordnen wir dem Siegelgebiet $\mathcal{S}$ das folgende Diagramm zu:

(8.3.g) $$\mathcal{S} \sim \left(\begin{array}{c|ccccc} U^1 & \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} & \cdots & \mathfrak{A}_{1q} \\ U^2 & \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \mathfrak{A}_{23} & \cdots & \mathfrak{A}_{2q} \\ U^3 & \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{33} & \cdots & \mathfrak{A}_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U^q & \mathfrak{A}_{q1} & \mathfrak{A}_{q2} & \mathfrak{A}_{q3} & \cdots & \mathfrak{A}_{qq} \end{array} \right).$$

Betrachten wir nun eine s-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ bzgl. eines s-*VOS* $\mathcal{I} = \{e_{11}, ..., e_{rr}\}$, so erhalten wir auf die gleiche Weise wie zuvor ein Arbeitsdiagramm (ersetze q durch r), und die Peirce-Räume bezeichnen wir für $i, j \in \{1, ..., r\}$ mit $\mathfrak{A}_{ij}^{\mathcal{I}}$. Beim Übergang zu einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ wird dann $U^i := \varphi(e_{ii})U$ mit $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_{r+1-i}}$

identifiziert (s. [$\mathcal{DDZ}$85] (16) S.301).

Für die Peirce-Räume der Algebra $\mathfrak{A}$ nach $\mathcal{I}$ bzw. $\{c_{ll}\}$ gilt $\forall i,j \in \{1,...,r\}$ $\mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ij} = \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ji}$ bzw. $\forall l,p \in \{1,...,q\}$ $\mathfrak{A}_{lp} = \mathfrak{A}_{pl}$. Insbesondere gilt für die Algebra $\mathfrak{A}$ (s. auch Definition 3.1.3 (K.1-2)):

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\substack{i,j \\ i\leq j}}^{r} \mathfrak{A}^{\mathcal{I}}_{ij} = \bigoplus_{\substack{p,l \\ p\leq l}}^{q} \mathfrak{A}_{pl}.$$

Dies bedeutet, daß nur die untere oder obere Dreiecksmatrix eines Diagramms von $\mathfrak{A}$ die Algebra $\mathfrak{A}$ repräsentiert.

8.4 Diagramme und Abspaltungen

$\mathfrak{A}$ sei die zu Ω und somit zu $\mathcal{S}$ gehörende Algebra (s. Abschnitt 3.1) von einem bestimmten q-Typ. Daraus resultiert die Bezeichnung „Siegelgebiet vom q-Typ“ (s. Definition 8.4.1).
Die Reduzibilität eines Siegelgebiets $\mathcal{S}$ (s. (6.6.a)) entspricht der des Kegels Ω (s. Korollar 6.6.4) und spiegelt sich auch in dem der Algebra $\mathfrak{A}$ zugeordneten Diagramm wider.

Definition 8.4.1 (q-Typ eines Siegelgebiets) *Ein homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit homogenem regulären Kegel Ω nennen wir ein* GEBIET VOM q-TYP*, wenn die zu Ω gehörende Algebra $\mathfrak{A}$ eine optimale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ besitzt (s. Definition 3.1.7).*

Bemerkung:

(8.4.α) Auch wenn wir nur von einem Siegelgebiet $\mathcal{S}$ oder von einer Algebra $\mathfrak{A}$ sprechen, so meinen wir doch meistens das Paar $(\mathcal{S}, \mathfrak{A})$, bestehend aus dem Siegelgebiet $\mathcal{S}$ und der dem Gebiet zugeordneten Algebra $\mathfrak{A}$.

In diesem Abschnitt betrachten wir nun ein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ bzw. eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ. Es ergibt sich demzufolge im allgemeinen die folgende Situation für $\mathfrak{A}$:

(8.4.a)
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}^1 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathfrak{A}^1_{11} & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+t} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+t} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+t,1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+t,n} & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{n+t,n+t} \end{array}\right).$$

Dabei sind $\forall i \in \{1,...,n+t\}$ und $k = 0,1$ die $\mathfrak{A}^k_{ii}$ einfache formal-reelle Jordan-Algebren mit Einselementen b_{ii}.

Das Diagramm (8.4.a) stellt die *PZ* (s. Definition 3.2.8) von $\mathfrak{A}$ bzgl. des *VOS* $\{b_{11}, ..., b_{n+t,n+t}\}$ dar. Verschwindet in dem Diagramm (8.4.a) die i-te Zeile, so verschwindet auch die i-te Spalte und umgekehrt.

Definition 8.4.2 (aufspaltendes Diagramm) *Ein Diagramm wie in (8.4.a), das zu dem angegebenen VOS gehört, nennen wir ein* AUFSPALTENDES DIAGRAMM *genau dann, wenn eine Spalte oder Zeile in $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ identisch Null ist.*

Satz 8.4.3 *Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet vom q=2-Typ und $\mathfrak{A}$ sei die zugehörige Algebra. $\mathcal{S}$ ist reduzibel genau dann, wenn das dazugehörige Diagramm (8.4.a) von $\mathfrak{A}$ aufspaltet.*

Beweis:
O.E. verschwinde die i-te $1 \leq i \leq n$ Zeile von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ in dem vorstehenden Diagramm (8.4.a). Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Algebrenprodukt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_{ii}$, und zu $\mathfrak{A}_1$ gehört das Diagramm von $\mathfrak{A}$ ohne die Räume in $\mathfrak{A}\frac{1}{2}$, bei denen mindestens ein Index i entspricht. Der zu $\mathfrak{A}_k$ gehörende Kegel sei Ω_k, $k = 1, 2$. Da $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ gilt, folgt $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und umgekehrt. Mit Korollar 6.6.4 (1) folgt schließlich die Behauptung. □

Bemerkung:
(8.4.β) Wir können dies auch ohne die Verwendung von Korollar 6.6.4 (1) zeigen. Das Diagramm (8.4.a) von $\mathfrak{A}$ erweitern wir um die Räume U^k, die mit den Räumen 1. Art korrespondieren (s. Abschnitt 8.3). Sodann ordnen wir dem Siegelgebiet $\mathcal{S}$ eine normale J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$ (ω ist die Bergmannmetrik) via (8.3.e) zu. Für alle $k \in \{1, ..., n+t\}$ definieren wir natürliche Zahlen mit den folgenden Bezeichnungen:

(8.4.b) $$r_k := Rang(\mathfrak{A}_{kk}),$$

(8.4.c) $$R_k := \textstyle\sum_{j=1}^{k} r_j$$

und Mengen:

(8.4.d) $$M_k := \{R_{k-1}+1, ..., R_k\}, \qquad \tilde{M}_k := \{r+1-l | l \in M_k\},$$

(8.4.e) $$\overline{M}_k := \{1, ..., R_{n+t}\} \setminus M_k, \qquad \hat{M}_k := \{r+1-l | l \in \overline{M}_k\}.$$

Dann ordnen wir in kanonischer Weise $\mathfrak{A}_1$

$$\mathfrak{s}_1 = \underbrace{\sum_{j \in \hat{M}_i} \mathfrak{n}_{\alpha_j} \oplus \sum_{j<t; j,t \in \hat{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_t)}}_{\mathfrak{L}_1} \oplus \underbrace{\sum_{j \in \hat{M}_i} J\mathfrak{n}_{\alpha_j} \oplus \sum_{j<t; j,t \in \hat{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_t)}}_{J\mathfrak{L}_1} \oplus \underbrace{\sum_{j \in \hat{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_j}}_{\mathfrak{u}_1}$$

und $\mathfrak{A}_2$

$$\mathfrak{s}_2 = \underbrace{\sum_{j\in\tilde{M}_i} \mathfrak{n}_{\alpha_j} \oplus \sum_{j<t;j,t\in\tilde{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_j-\alpha_t)}}_{\mathfrak{L}_2} \oplus \underbrace{\sum_{j\in\tilde{M}_i} J\mathfrak{n}_{\alpha_j} \oplus \sum_{j<t;j,t\in\tilde{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_j+\alpha_t)}}_{J\mathfrak{L}_2} \oplus \underbrace{\sum_{j\in\tilde{M}_i} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_j}}_{\mathfrak{u}_2}$$

zu.

$(\mathfrak{s}_1, \omega_1)$ und $(\mathfrak{s}_2, \omega_2)$ sind normale J-Algebren, wobei $\omega_i = \omega|_{\mathfrak{s}_i}$ für $i = 1, 2$ gilt. Für $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ gilt $[\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2] = 0$, da die entsprechenden Wurzelräume, in die man durch Bilden des Lie-Klammerprodukts zwischen Elementen aus $\mathfrak{s}_1$ und denen aus $\mathfrak{s}_2$ gelangt, alle verschwinden. Es folgt, daß $\mathfrak{s}$ eine direkte Summe der Lie-Algebren $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ ist.

j sei nun immer gleich 1 oder 2. Wir erhalten mit dem Rekonstruktionsverfahren des Abschnitts 6.5 dazugehörige Siegelgebiete

$$\mathcal{S}_j = \{(z, u) \in \mathfrak{L}_j^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{u}_j | Imz - F_j(u, u) \in \Omega_j\}.$$

Dabei ist $F_j : \mathfrak{u}_j \times \mathfrak{u}_j \to \mathfrak{L}_j^{\mathbb{C}}$ eine Ω_j-hermitesche Form, definiert durch $F_j(U, V) = \frac{1}{4}([JU, V] + i[U, V])$. Aufgrund der Additivitätseigenschaft der Wurzelräume beim Bilden der Lie-Klammer (s. (6.4.Z3) (W.5)) folgt direkt, daß F_j eine Abbildung nach $\mathfrak{L}_j^{\mathbb{C}}$ ist.
Ω_1 ist der Orbit von $E_1 = \sum_{k\in\hat{M}_i} E_k$ (für die E_i s. Abschnitt 6.5 oder (8.2.a)) unter $exp(J\mathfrak{L}_1)$, und Ω_2 ist der Orbit von $E_2 = \sum_{k\in\tilde{M}_i} E_k$ unter $exp(J\mathfrak{L}_2)$. Bezeichnen $\mathcal{S}, \mathcal{S}_j$ die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_j$ zugeordneten Siegelgebiete, dann folgt $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$.

Falls $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ ein Produkt ist, dann gibt es einfach transitiv operierende Gruppen S, S_1 und S_2, deren Algebren $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ normale J-Algebren sind. Diesen können wir jeweils, via der Identifizierung (8.3.I) (s. insbesondere (8.3.e)) die Algebren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zuordnen. Es folgt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, und ein entsprechendes aufspaltendes Diagramm gehört zu $\mathfrak{A}$.

9 Dimensionsanalyse

In diesem Kapitel werden unmittelbar wichtige Aussagen zusammengetragen bzw. bewiesen, die wir für den Beweis unseres Hauptresultats im 12. Kapitel benötigen werden.

Generalvoraussetzungen für die nachfolgenden Aussagen
Wir betrachten im folgenden ausschließlich homogene Siegelgebiete $\mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{S}$ ist unter Verwendung eines homogenen regulären Kegels Ω (s. (2.1.e)) konstruiert worden. Des weiteren versehen wir $\mathcal{S}$ immer mit der Bergmannmetrik g (s. Kapitel 1 u. Satz 3.2.3), so daß alle geometrischen Größen, wie z.B. die Krümmung usw. immer von g abgeleitet werden.
Den Rang des Siegelgebiets $\mathcal{S}$ (s. (8.3.f)), der dem der Algebra $\mathfrak{A}$ und dem einer zugeordneten normalen J-Algebra entspricht, bezeichnen wir mit r.

9.1 Injektivität und Dimensionen der Wurzelräume

Für gewisse $X \neq 0$ einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ ist $ad(X)$ eine injektive Abbildung zwischen entsprechenden Wurzelräumen. Daraus ergeben sich Relationen zwischen den Dimensionen der Wurzelräume. Dieses Ergebnis geht im wesentlichen auf Piatetsky-Shapiro zurück.

In [$\mathcal{PS}$] Theorem 2, (4) S.61 zeigt Piatetsky-Shapiro die Nichtdegeneriertheit der Lie-Klammer für von Null verschiedene Elemente aus bestimmten Wurzelräumen. Daraus ergibt sich die folgende Aussage (s. [$\mathcal{DAMI}$83] Proposition 1, S.532 u. s. auch Definition 6.4.2):

Proposition 9.1.1 *Sei $\mathfrak{s}$ eine normale J-Algebra, dann haben wir folgende Relationen für die Dimensionen entsprechender Wurzelräume:*

(1) *Wenn $n_{kl} \neq 0$ gilt, dann folgt $m_l \leq m_k$ für $k < l$ und $n_{ls} \leq n_{ks}$ für $k < l < s$.*

(2) *Wenn $n_{ls} \neq 0$ gilt, dann folgt $n_{kl} \leq n_{ks}$ für $k < l < s$.*

Bemerkungen:
(9.1.α) Für den Beweis von Proposition 9.1.1 (1) zeigt man, daß die Abbildung

$$ad(JX) : \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_l} \to \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_k}$$

injektiv für mindestens ein $0 \neq X \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_k+\alpha_l)}$ ist. Daraus folgt direkt die Ungleichung für die Dimensionen des Bild- und Urbildraumes.

(9.1.β) Alleine durch das Nichtverschwinden bestimmter Wurzelräume stellt uns Proposition 9.1.1, ohne jegliche Krümmungsvoraussetzungen, Ungleichungen zwischen den Dimensionen verschiedener Wurzelräume, die von 1. oder 2. Art sind, zur Verfügung. Dies verdeutlichen wir an einem einfachen Beispiel. Sei dazu $\mathfrak{s}$ eine normale J-Algebra vom Rang r mit der folgenden Wurzelraumzerlegung (s.

(6.4.Z3))

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i} + \sum_{i<j}^{r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i \pm \alpha_j)},$$

wobei alle $n_{ij} \neq 0$ und $m_i \neq 0$ (s. Definition 6.4.2), was zur Folge hat, daß $\mathcal{S}$ irreduzibel ist. Wegen Proposition 9.1.1 resultiert bzgl. dieser Dimensionen das folgende Diagramm, in dem wir $n_{ii} = 1$ setzen (s. (6.4.Z3) (W.3)):

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
m_r & n_{rr}=1 & & & & & & & & & & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & & & & & & & & & \\
m_{r-1} & n_{r-1,r} & & 1 & & & & & & & & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & & & & & & & & \\
m_{r-2} & n_{r-2,r} & \geq & n_{r-2,r-1} & & 1 & & & & & & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & & & & & & \\
m_{r-3} & n_{r-3,r} & \geq & n_{r-3,r-1} & \geq & n_{r-3,r-2} & & 1 & & & & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & & & & \\
m_2 & n_{2r} & \geq & n_{2,r-1} & \geq & n_{2,r-2} & \geq & \cdots & \geq & n_{23} & & 1 & \\
\rotatebox{-90}{$\leq$} & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & & \rotatebox{-90}{$\leq$} & & & \\
m_1 & n_{1r} & \geq & n_{1,r-1} & \geq & n_{1,r-2} & \geq & \cdots & \geq & n_{13} & \geq & n_{12} & 1\,.
\end{array}$$

Nehmen wir nun zusätzlich an, daß ein zu $\mathfrak{s}$ gehörendes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ n.p.h.B. bzgl. der Bergmannmetrik hat. Wenn wir zeigen wollen, daß $\mathcal{S}$ dann sogar quasisymmetrisch sein muß, so genügt es, aufgrund des Satzes 7.2.1 zu zeigen, daß die Ungleichheitszeichen in obigem Diagramm durch Gleichheitszeichen ersetzt werden können. Wir benötigen folglich Abschätzungen bzw. Relationen für die Dimensionen der Wurzelräume in „umgekehrter Richtung“.
Solche Relationen können wir aber in den für uns wichtigen Fällen (s. Kapitel 11) tatsächlich aus für n.p.h.B. notwendigen Bedingungen herleiten, wobei auch die Ergebnisse von Tsuji eingehen werden, die wir in Abschnitt 9.2 aufführen.

Für den q=2 Fall können wir eine Aussage über die Dimension der Räume 2. Art (s. Definition 6.4.2) beweisen, die zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehören. Dazu zeigen wir zuerst:

Satz 9.1.2 *Sei Ω ein irreduzibler homogener regulärer Kegel vom Rang r und vom q=2-Typ. $\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}^1 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right)$ sei die dazugehörige Algebra, wobei $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{A}^0$ einfache formal-reelle Jordan-Algebren sein sollen.*
Dann haben die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \neq 0$ zugeordneten Räume 2. Art alle die gleiche Dimension.

Beweis:
Nach Lemma 3.2.1 ist $\varphi_1 : \mathfrak{A}^1 \to End(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}})^+$ mit $\varphi_1(x) = 2A(x)|_{\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}}$ und $\varphi_0 : \mathfrak{A}^0 \to End(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}})^+$ mit $\varphi_0(y) = 2A(y)|_{\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}}$ jeweils ein Jordan-Algebren Homomorphismus. Nach Satz 3.2.5 sind diese Darstellungen treu.
Sei der Rang von $\mathfrak{A}^1 = r_1$ und der Rang von $\mathfrak{A}^0 = r_0$ ($r = r_1 + r_0$). Dabei gilt $r_1, r_0 > 0$, sonst wäre q=1 und dies ist nach Voraussetzung ausgeschlossen.
Sei $\mathcal{I} = \{e_{11}, ..., e_{rr}\}$ ein s-*VOS* (s. Definition 8.3.2) und $\mathfrak{A}$ sei s-zerlegt. Dann wird $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$, dem Raum der rechten oberen Ecke des Diagramms,

$$\begin{pmatrix} a_{1,r_1+1} & \cdots & a_{1,r_1+r_0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r_1,r_1+1} & \cdots & a_{r_1,r_1+r_0} \end{pmatrix}$$

zugeordnet, wobei wir $a_{ij} = \mathfrak{A}_{ij}^{\mathcal{I}}$ setzen, für $i \in \{1, ..., r_1\}$, $j \in \{r_1+1, ..., r_1+r_0\}$. Wir wählen $Z_{ij} \in \mathfrak{A}^0$, $Z_{ij} := \frac{1}{2}(e_{ij} + \sum_{k \neq i,j} e_{kk})$, mit $r_1 + 1 \leq i, j \leq r_1 + r_2$ und $e_{ij}^2 = e_{ii} + e_{jj}$. Ein solches e_{ij} existiert immer, weil $\mathfrak{A}^0$ einfach ist. Es folgt $(\varphi_0(Z_{ij}))^{-1} = \varphi_0(Z_{ij})$ und $\varphi_0(Z_{ij}) \neq Id_{\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}}$ (die Darstellung ist treu), d.h. $\varphi_0(Z_{ij})$ ist eine invertierbare Abbildung von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ auf sich, die a_{ki} auf a_{kj} abbildet (mit entsprechenden Werten für die Indizes). Daraus folgt, daß alle a_{km} für ein beliebiges, aber fest gewähltes $k \in \{1, ..., r_1\}$ und beliebiges $m \in \{r_1+1, ..., r_1+r_2\}$ die gleiche Dimension besitzen.
Analog dazu folgt durch die Darstellung φ_1 von $\mathfrak{A}^1$, daß die Peirce-Räume, die zu einer Spalte des Diagramms von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehören, von gleicher Dimension sind.
Insgesamt folgt, daß die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehören, alle die gleiche Dimension haben, die wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität von Ω von Null verschieden ist. Insbesondere gilt:
Hat ein Raum 2. Art, der zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehört, verschwindende Dimension, so folgt $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = 0$ und das Diagramm würde aufspalten (s. Definition 8.4.2). Das bedeutet aber, daß der Kegel im Widerspruch zur Voraussetzung reduzibel wäre. □

Lemma 9.1.3 *Seien Ω und $\mathfrak{A}$ wie in Satz 9.1.2 gewählt mit dem Unterschied, daß nun $\mathfrak{A}^1 = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{A}_{ii}^1$ und $\mathfrak{A}^0 = \bigoplus_{j=n+1}^{n+t} \mathfrak{A}_{jj}^0$ gilt, wobei die $\mathfrak{A}_{kk}^l$ einfache formalreelle Jordan-Algebren mit jeweiligem Einselement b_{kk} für $k \in \{1, ..., n+t\}$ und $l = 0, 1$ sind. Bzgl. des VOS $\{b_{11}, ..., b_{n+t,n+t}\}$ betrachten wir die Peirce-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ und das dazugehörige Diagramm. In diesem entspricht:*

$$\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{1,n+1}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{1,n+t}^{\frac{1}{2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}_{n,n+1}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{n,n+t}^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dann haben für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ und $j \in \{n+1, ..., n+t\}$ beliebig, aber fest gewählt, die Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}_{ij}^{\frac{1}{2}}$ zugeordnet werden, die konstante Dimension $d_{ij} > 0$.

Beweis:
Sei ein Paar (i, j) mit $i < j$ und $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{n+1, ..., n+t\}$ beliebig, aber fest gewählt. Nach Lemma 3.2.1, Korollar 3.2.2 und Satz 3.2.5 ist $\mathfrak{A}_{ij}^{\frac{1}{2}}$ ein Darstellungsraum von $\mathfrak{A}_{ii}^1$ und $\mathfrak{A}_{jj}^0$, wobei die jeweiligen Darstellungen treu sind. Wir wählen wieder ein s-*VOS*, betrachten die s-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ und wenden Satz 9.1.2 auf $\mathfrak{A}_{jj}^0$, $\mathfrak{A}_{ii}^1$ und $\mathfrak{A}_{ij}^{\frac{1}{2}}$ an. Es folgt, daß die Räume 2. Art in $\mathfrak{A}_{ij}^{\frac{1}{2}}$ alle die gleiche Dimension haben, die wir mit d_{ij} notieren. Weiter folgt direkt, daß $\mathfrak{A}_{ij}^{\frac{1}{2}} \neq 0$ genau dann, wenn $d_{ij} > 0$ gilt. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

9.2 Ergebnisse von Tsuji und Status quo

Wir fassen in diesem Abschnitt für uns wichtige Resultate zusammen, die bei dem Versuch erzielt wurden, die Krümmungsvermutung zu zeigen.

Die Krümmungsvermutung ist bisher ungelöst.

Arbeitsvoraussetzung:

$\mathfrak{s}$ sei immer eine zu $\mathcal{S}$ gehörende normale J-Algebra vom Rang r, und ω sei immer die Einsform der Bergmannmetrik, sofern wir es nicht ausdrücklich anders formulieren.

Krümmungseigenschaften von Siegelgebieten bzgl. der Bergmannmetrik wurden von vielen Mathematikern untersucht, so z.B. von D'Atri z.B. in [$\mathcal{DA}$80], [$\mathcal{DA}$81], von D'Atri & Dorfmeister in [$\mathcal{DADO}$90], von Kobayashi in [$\mathcal{KO}$59], von Azukawa in [$\mathcal{AZU}$85], [$\mathcal{AZU}$89], von Druetta in [$\mathcal{DR}$96] usw. .

Von besonderer Bedeutung ist für uns die Arbeit von Tsuji [$\mathcal{TS}$91], da sowohl die Berechnungen, die zu den Ergebnissen seiner Arbeit führten, als auch die Resultate selbst fast alle Anwendung in unserer Arbeit finden (s. dazu (9.1.β) und Kapitel 11).
Wenn $\mathcal{S}$ n.p.h.B. besitzt, erzielte Tsuji folgende Implikation als Resultat:

$$dim_{\mathbb{R}}\mathcal{S} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S} \text{ ist quasisymmetrisch ([}\mathcal{TS}\text{91] Theorem 4, S.450).}$$

Um die Notationsfülle zu reduzieren, geben wir nur die sinngemäßen Aussagen des Theorems 1, S.447 und des Theorems 2, S.448 in [$\mathcal{TS}$91] wieder.
In Theorem 1 wird gezeigt, daß ein irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r mit n.p. h.B. quasisymmetrisch ist, wenn die holomorphe Schnittkrümmung auf der total geodätischen Untermannigfaltigkeit, die dem Orbit des Basispunktes unter $exp(\mathfrak{a} + J\mathfrak{a})$ (s. (6.4.Z1-Z3)) entspricht, ein bestimmtes Maximum und Minimum annimmt.
Das 2. Theorem sagt aus, daß alle Siegelgebiete mit n.p.h.B. über einem „*dual square type*“ Kegel (definiert von Xu [$\mathcal{XU}$81]) schon quasisymmetrisch sind. Dabei ist ein Kegel von diesem Typ, wenn für alle $k \in \{1, 2, ..., r-1\}$ $n_{k,k+1} = n_{k,k+2} = ... = n_{kr} > 0$ gilt (s. auch Definition 6.4.2). Daß nicht alle Kegel von diesem Typ sind, kann man z.B. bei den in Abschnitt 11.2 behandelten Kegeln leicht sehen.

Wir wollen nun weitere notwendige Bedingungen für n.p.h.B. eines homogenen Siegelgebiets aus der Arbeit von Tsuji darlegen. Dafür ist das nachfolgende Lemma 9.2.1 ein bedeutendes Werkzeug. Um das Lemma formulieren zu können, benötigen wir ein paar zusätzliche Vereinbarungen und Bemerkungen; diese sind:
Ausgehend von der Zerlegung (6.4.Z3) wählt man für die Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m < l \leq r$ mit $n_{i_k l} \neq 0$ $\forall k = 1, ..., m$ Elemente $0 \neq X_{i_k l}$ und $0 \neq Y_{i_k l}$ aus

$\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_k}+\alpha_l)}$ und man setzt

$$< X_{i_k l}, X_{i_k l} > = 2\epsilon_k, \ < Y_{i_k l}, Y_{i_k l} > = 2\beta_k, \ < X_{i_k l}, Y_{i_k l} > = 2\gamma_k.$$

Weiter wählt man wie in (8.2.a) Elemente $E_{i_k} \in \mathfrak{n}_{\alpha_{i_k}}$ mit

$$\alpha_{i_j}(E_{i_k}) = \delta_{jk}, \ < E_{i_k}, E_{i_k} > = \omega([JE_{i_k}, E_{i_k}]) = \omega(E_{i_k}) = n_{i_k}$$

und definiert

$$X := \sum_k (E_{i_k} + X_{i_k l}) + E_l \text{ und } Y := \sum_k (E_{i_k} + Y_{i_k l}) + E_l.$$

Mit diesen Festlegungen erhält man:

Lemma 9.2.1 (Arbeitslemma von Tsuji) *Für die oben definierten Testvektoren X, Y gilt (s. (8.1.a)):*

$$\begin{aligned} B(X,Y) \quad = \quad & \frac{2(\sum_k \gamma_k)^2}{n_l} - n_l - \sum_k \left(n_{i_k} + 2\left(\epsilon_k + \beta_k + 4\gamma_k + \frac{\epsilon_k \beta_k + \gamma_k^2}{n_{i_k}} \right) \right) \\ & -\frac{1}{2} \sum_{s<t} (||[JX_{i_s l}, Y_{i_t l}] + [JY_{i_s l}, X_{i_t l}]||^2) \\ & +4 \sum_{s<t} (< [JX_{i_s l}, X_{i_t l}], [JY_{i_s l}, Y_{i_t l}] >). \end{aligned}$$

Für einen Beweis siehe [$\mathcal{TS}$91] Lemma 3, S.445.

Aus dem Arbeitslemma 9.2.1 erhält man notwendige Bedingungen in Termen der Einsteinkoeffizienten, die ein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ erfüllen muß, damit es n.p.h.B. hat. Dies sind die Lemmata 4 und 5 in [$\mathcal{TS}$91], die wir nun darlegen:

Lemma 9.2.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet mit n.p.h.B. und $\mathfrak{s}$ eine zu $\mathcal{S}$ gehörende normale J-Algebra. Weiter sei für zwei beliebige Indizes $i, k \in \{1, ..., r\}$ mit $i < k$ die Dimension n_{ik} eines Raumes 2. Art ungleich Null. Dann erfüllen die Einsteinkoeffizienten n_i, n_k (s. Definition 8.2.2) die Relation*

$$n_i \leq n_k.$$

Eine weitere notwendige Bedingung liefert:

Lemma 9.2.3 *Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet mit n.p.h.B. und $\mathfrak{s}$ eine zu $\mathcal{S}$ gehörende normale J-Algebra. Außerdem sei $(i, k, l) \in \{1, ..., r\}$ ein Tripel von Indizes mit $i < k < l$, so daß*

$$n_{kl} \neq 0 \text{ und } n_{ik} < n_{il} \text{ gilt.}$$

Dann erfüllen die Einsteinkoeffizienten n_i, n_k, n_l für ein solches Siegelgebiet $\mathcal{S}$ die Ungleichung:

$$n_i + n_k \leq n_l.$$

Bemerkung:

(9.2.α) Wir betrachten die Algebra $\mathfrak{A}$ vom Rang $r \geq 4$ (vgl. mit Satz 9.2.4) des Abschnitts 5.1, die zu Ω_D gehört (s. insbesondere (5.1.δ)), und verwenden die dort eingeführten Bezeichnungen. Die Algebra $\mathfrak{A}_{11}$ bzw. $\mathfrak{A}_{22}$ hat den Rang $r_1 \geq 2$ bzw. $r_2 > 0$. Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet, das über Ω_D konstruiert wurde, mit einer dazugehörigen normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$. Wir werden zeigen, daß dann mindestens eine Richtung mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung auf $\mathcal{S}$ existiert.
Indem wir erläutern, wie man eine Richtung z.B. mit der Hilfe von Lemma 9.2.3 (man kann auch darstellungstheoretisch argumentieren) gewinnt, ist sofort klar, wie man evtl. andere, davon verschiedene positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen auffindet.
Aus der Konstruktion des Kegels Ω_D in Abschnitt 5.1 folgt, daß jeder via (8.3.I) $\mathfrak{A}_{22}$ oder $\mathfrak{A}_{12}$ zugeordnete Raum 2. Art die reelle Dimension Zwei besitzt, und die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}_{11}$ gehören, haben die reelle Dimension Eins. Diese Tatsachen werden direkt in die Berechnungen der verschiedenen, benötigten Einsteinkoeffizienten einfließen.
In dem Diagramm der Dimensionen von Wurzelräumen, das wir $\mathfrak{A}$ zuordnen können, gilt $n_{r-r_2-1,r-r_2} \neq 0$ und

$$dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_{r-r_2-2}+\alpha_{r-r_2}}{2}}}_{\textit{gehört zu } \mathfrak{A}_{12}}) = n_{r-r_2-2,r-r_2} = 2 > 1 = n_{r-r_2-2,r-r_2-1} = dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{\mathfrak{n}_{\frac{\alpha_{r-r_2-2}+\alpha_{r-r_2-1}}{2}}}_{\textit{gehört zu } \mathfrak{A}_{11}}).$$

Nun können wir aus dem gleichen Grund, wie in (9.3.α) erläutert, Elemente $0 \neq X_{r-r_2-2,r-r_2} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{r-r_2-2}+\alpha_{r-r_2})}$ und $0 \neq X_{r-r_2-1,r-r_2} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{r-r_2-1}+\alpha_{r-r_2})}$ wählen, die

$$[JX_{r-r_2-2,r-r_2}, X_{r-r_2-1,r-r_2}] = 0$$

erfüllen. Außerdem setzen wir

$$\begin{aligned} < X_{r-r_2-2,r-r_2}, X_{r-r_2-2,r-r_2} > &= 2n_{r-r_2-2}, \\ < X_{r-r_2-1,r-r_2}, X_{r-r_2-1,r-r_2} > &= 2n_{r-r_2-1}, \end{aligned}$$

wobei $<.,.>$ das auf $\mathfrak{s}$ von der Bergmannmetrik induzierte Skalarprodukt bezeichnet. Eine zum Beweis des Lemmas 9.2.3 analoge Berechnung der holomorphen Bischnittkrümmung (s. [$\mathcal{TS}$91] S.447) für

$$\begin{aligned} X &= E_{r-r_2} + E_{r-r_2-1} + E_{r-r_2-2} + X_{r-r_2-1,r-r_2} + X_{r-r_2-2,r-r_2} \text{ und} \\ Y &= E_{r-r_2} + E_{r-r_2-1} + E_{r-r_2-2} - X_{r-r_2-1,r-r_2} - X_{r-r_2-2,r-r_2} \end{aligned}$$

ergibt nun folgende Relation für die Einsteinkoeffizienten (für die E_i s. (8.2.a)):

$$\begin{aligned} n_{r-r_2-1} + n_{r-r_2-2} &> n_{r-r_2} \\ \Leftrightarrow\ 1 + \frac{1}{2}(2r_2 + (r_1 - 1)) + 1 + \frac{1}{2}(2r_2 + (r_1 - 1)) &> 1 + \frac{1}{2}(2(r_2 - 1) + 2r_1) \\ \Leftrightarrow\ 1 + r_2 &> 0. \end{aligned}$$

Des weiteren liefert Lemma 9.3.2, daß es für ein homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ über Ω_D genügt, die Räume 2. Art und folglich die angegebene Ungleichung zu berücksichtigen, um schließen zu können, daß die von X, Y erzeugten J invarianten Ebenen positive holomorphe Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik besitzen. Auf diese Art und Weise generiert man, falls r_1 hinreichend groß ist, mehrere verschiedene Richtungen mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung, d.h. die Aufgabe, solche Richtungen zu finden, besteht hier demnach darin, geeignete Indextripel auszuwählen.

Den nachfolgenden Satz von Tsuji (s. [$\mathcal{TS}$91] Theorem 3) werden wir ebenfalls später benutzen (s. auch (11.2.γ)).

Satz 9.2.4 (Tsuji) *Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet vom Rang $r \leq 3$. Wenn $\mathcal{S}$ nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung hat, dann ist $\mathcal{S}$ quasisymmetrisch.*

Für Tubengebiete mit einem kleinen Rang, d.h. $r \leq 3$, können wir zeigen:

Korollar 9.2.5 *Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet mit normaler J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$, wobei ω die 1-Form der Bergmannmetrik mit $\omega(E_i) = c$ ist, dann gilt:*
Falls $\mathcal{S}$ ein Tubengebiet vom Rang kleiner gleich Drei ist, dann sind die Dimensionen n_{ik} der Räume 2. Art konstant.

Beweis:
Aus $\frac{1}{\omega(E_i)}(1 + \frac{1}{2}(n_{ik} + n_{ij})) = 1$ mit $i \neq j \neq k$ und $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_{12} \\ n_{13} \\ n_{23} \end{pmatrix} = \vec{C}.$$

Dabei hat $\vec{C}$ die konstanten Komponenten $2(c-1)$. Wir haben genau dann eine Lösung, wenn $n_{12} = n_{13} = n_{23} = (c-1)$ gilt.
Die Aussage folgt natürlich sofort aus Satz 9.2.4, da $r \leq 3$ gilt! $\square$

D'Atri gab in [$\mathcal{DA}$79] S.408 folgende notwendige Bedingung für negative bzw. nicht-positive holomorphe Schnittkrümmung an; dabei gehört ω nicht notwendig zur Bergmannmetrik:

Satz 9.2.6 *Sei $n_{kl} \neq 0$ und die holomorphe Schnittkrümmung von $\mathcal{S}$ sei negativ (bzw. nicht-positiv) bzgl. der von ω induzierten Metrik, dann gilt $n_k < 2n_l$ (bzw. $n_k \leq 2n_l$).*

Lemma 9.2.2 ist die entsprechende Aussage des Satzes 9.2.6 für den Fall, daß wir die Bergmannmetrik betrachten und das Gebiet n.p.h.B. hat.

9.3 Verallgemeinerung eines Lemmas von Tsuji

Eine notwendige Bedingung dafür, daß die holomorphe Bischnittkrümmung nicht-positiv ist, erhalten wir aus der Verallgemeinerung einer Aussage von Tsuji [$\mathcal{TS}$91] (s. Lemma 9.2.3). Diese Bedingung ist eine Ungleichung zwischen Summen bestimmter Einsteinkoeffizienten. Sie wird insbesondere für den q=2 Fall in Abschnitt 11.2 von Bedeutung sein, bei dem $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}_{11} \cong \mathbb{R}$ gilt!

Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet vom Rang r (s. (8.3.f)), $\mathfrak{s}$ eine dazugehörige normale J-Algebra. Für alle i bezeichnen wir mit E_i den Basisvektor (s. (8.2.a)) von $\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ und mit n_i den dazugehörigen Einsteinkoeffizienten.

Lemma 9.3.1 (Verallgemeinertes Lemma von Tsuji) *Gegeben sei eine Indexmenge $\{i_t\}_{t=1}^k \subset \{1, ..., r\}$, mit $i_1 < i_2 < ... < i_k < r$ und $n_{i_t r} \neq 0$ $\forall t$. Weiterhin gebe es $\forall t$ Elemente $0 \neq Z_{i_t r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_r)}$, so daß $\forall i_s < i_l$ $[JZ_{i_s r}, Z_{i_l r}] = 0$ gilt. Wenn die holomorphe Bischnittkrümmung nicht-positiv ist, dann gilt*

$$\textstyle\sum_{t=1}^k n_{i_t} \leq n_r.$$

Beweis:
Wir wählen die Testvektoren $X = \sum_{t=1}^k E_{i_t} + E_r + \sum_{t=1}^k Z_{i_t r}$ und $Y = \sum_{t=1}^k E_{i_t} + E_r - \sum_{t=1}^k Z_{i_t r}$. Für die Skalarprodukte der Summanden von X, Y setzen wir $\forall t$ $< Z_{i_t}, Z_{i_t} >= 2\alpha_{i_t}$.
Für die holomorphe Bischnittkrümmung (s. (8.1.K4), (8.1.a)) der von X, Y aufgespannten, J-invarianten Ebenen F_X, F_Y (s. Lemma 9.2.1) ergibt sich:

$$B(X,Y) = \tfrac{2(\sum_{t=1}^k \alpha_{i_t})^2}{n_r} - n_r - \textstyle\sum_{t=1}^k (n_{i_t} - 4\alpha_{i_t} + \tfrac{4\alpha_{i_t}^2}{n_{i_t}}).$$

Spezialisieren wir ein weiteres Mal, indem wir $\alpha_{i_t} = n_{i_t}$ wählen (dies können wir immer durch Skalieren der Z_{i_t} erreichen), so erhalten wir

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \frac{2(\sum_{t=1}^k n_{i_t})^2}{n_r} - n_r - \sum_{t=1}^k n_{i_t} \\ &= \frac{(2\sum_{t=1}^k n_{i_t} + n_r)(\sum_{t=1}^k n_{i_t} - n_r)}{n_r}. \end{aligned}$$

Also folgt, daß $\sum_{t=1}^k n_{i_t} \leq n_r$ gilt. □

Bemerkung:

(9.3.α) Forderten wir, um analoge Voraussetzungen wie in Lemma 9.2.3 zu haben, in Lemma 9.3.1, daß für $i_t < i_k < r$ und $n_{i_k r} \neq 0$, $n_{i_t i_k} < n_{i_t r}$ gälte, so wäre die lineare Abbildung $X_{i_t r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_r)} \to [JX_{i_t r}, Z_{i_k r}] \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_{i_k})}$ für jedes $0 \neq Z_{i_k r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_k}+\alpha_r)}$ nicht injektiv, deshalb existiert ein $0 \neq Z_{i_t r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_r)}$, so daß $[JZ_{i_t r}, Z_{i_k r}] = 0$ gilt.
Um eine notwendige Bedingung für n.p.h.B. via Lemma 9.2.1 herleiten zu können, müßten alle Kommutatoren $[JZ_{i_s r}, Z_{i_l r}]$ für $i_s < i_l$, $l \neq k$ identisch verschwinden.

Dies können wir aber nicht aus den zusätzlichen Voraussetzungen schließen.
In Lemma 9.3.1 setzten wir voraus, daß es eine gewisse Anzahl von Elementen $\{Z_{i_t r}\}$ gibt, welche die geforderten Kommutatorenrelationen erfüllen. Daß wir solche Elemente in einer für uns ausreichenden Zahl in den uns interessierenden Fällen immer wählen können, wird durch Satz 11.1.1 sichergestellt.

Lemma 9.3.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein Siegel-II-Gebiet vom Rang r und $\mathcal{S}^T$ (vgl. Definition 6.5.2) das darin enthaltene Tubengebiet. Es existiere eine Ungleichungskette von Indizes $i_1 < i_2 < ... < i_k < r$, so daß für alle $t \in \{1, ..., k\}$ $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_r)} \neq 0$ gilt. Wenn die Ungleichung*

(1) $\quad \sum_{t=1}^{k} n_{i_t}^T > n_r^T$ *für* $\mathcal{S}^T$

erfüllt wird, dann ist auch

(2) $\quad \sum_{t=1}^{k} n_{i_t} > n_r$ *für* $\mathcal{S}$

erfüllt.
Dabei bezeichnen wir mit $n_{i_t}^T$ die Summe über die Summanden $\frac{1}{2}n_{lj}$, bei denen $l = i_t$ oder $j = i_t$ gilt, d.h. nur Summanden, die von Wurzelräumen des Tubengebiets herrühren, werden berücksichtigt.

Beweis:
Für die Dimensionen der Räume 1. Art ergibt sich aufgrund der Injektivität (s. auch Abschnitt 9.1, insbesondere (9.1.α)) der Abbildungen

$$ad(JZ_{i_t r}) : \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_r} \to \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_{i_t}}$$

mit $0 \neq Z_{i_t r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_t}+\alpha_r)}$, daß für alle t $m_{i_t} \geq m_r$ gilt.
Die Ungleichung (1) unterscheidet sich von der in (2) gerade um Summanden, die von Dimensionen der $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$-Wurzelräume herkommen; es gilt:

$$\sum_{t=1}^{k} n_{i_t} = \sum_{t=1}^{k} n_{i_t}^T + \tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{k} m_{i_t} > n_r^T + \tfrac{1}{4}m_r = n_r.$$

Somit ist die Aussage bewiesen (s. auch Abschnitt 10.3, I.). □

10 Induktives Argument und Vorbereitungen

In diesem Kapitel werden weitere Hilfsmittel und Konstruktionen vorgestellt, die es erlauben, bzgl. der reellen Dimension des homogenen Siegelgebiets oder $\mathfrak{A}$ oder bzgl. q, induktiv zu argumentieren (s. auch Definition 8.4.1).

10.1 Realisierung als Siegel-III-Gebiet

Jedes Siegelgebiet kann als Siegel-III-Gebiet realisiert werden, s. dazu auch [$\mathcal{NA}$76]. Die Idee dazu beruht darauf, daß der Kegel Ω mit Hilfe von Idempotenten zerlegt werden kann (s. [$\mathcal{DO}$79b]). Eine solche Darstellung im hier benutzten Formalismus wurde in [$\mathcal{DO}$79a] II §5 hergeleitet. Sie ist grundlegend für den Beweis unseres Hauptsatzes 12.2.1. Da [$\mathcal{DO}$79a] nicht allgemein zugänglich ist, geben wir hier die entsprechenden Abschnitte mit Erlaubnis von Herrn Dorfmeister nahezu unverändert wieder.
An dieser Stelle danke ich Herrn Dorfmeister, oben Erwähntes hier ausführen zu dürfen.

Wir betrachten ein Tripel (Ω, η_B, e) (s. (3.1.A1-A5)) und die daraus abgeleitete Algebra $\mathfrak{A}$ mit optimaler q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ (s. Definition 3.1.7). Nach Satz 3.2.5 gilt $\mathfrak{A}_{11} \neq 0$ und wir setzen $\mathfrak{A}'_{11} = \{f \in \mathfrak{A}_{11} | f^2 = f\}$ gleich der Menge der Idempotenten in $\mathfrak{A}_{11}$. Für ein $f \in \mathfrak{A}'_{11}$ erhalten wir eine 2-*PZ* (s. (3.2.a)), d.h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0(f) + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) + \mathfrak{A}_1(f)$. $\mathfrak{A}_1(f)$ und $\mathfrak{A}_0(f)$ sind Unteralgebren von $\mathfrak{A}$, die sich bzgl. der Multiplikation in $\mathfrak{A}$ gegenseitig annullieren und $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)$ invariant lassen, was aus den Kompositionsregeln folgt (s. Definition 3.1.3 (K.5)).

Zu einem Siegelgebiet $\mathcal{S}(\Omega, F)$ und einem beliebigem $f \in \mathfrak{A}'_{11}$ wird eine Darstellung von $\mathcal{S}(\Omega, F)$ als Siegel-III-Gebiet hergeleitet. Für $\nu = 0, 1$ wird

(10.1.a) mit $\Omega_\nu(f)$ die Projektion von Ω auf $\mathfrak{A}_\nu(f)$ bezeichnet.

$\Omega_\nu(f)$ ist ein regulärer Kegel in $\mathfrak{A}_\nu(f)$ (s. [$\mathcal{DO}$79b] Theorem 1.5, 1.6, S.324). Weiter setzt man, unter Verwendung der Abbildung φ (s. (7.1.b)),

(10.1.b) $$U_1(f) := \varphi(f)U \text{ und } U_0(f) := \varphi(e-f)U.$$

Jedes $z \in V^{\mathbb{C}}$ läßt sich als $z = x + iy$ mit $x, y \in V$ schreiben. Die Elemente x, y kann man entsprechend der Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in die Peirce-Räume $\mathfrak{A}_\nu(f)$ zerlegen, d.h. $x = x_0 + x_{\frac{1}{2}} + x_1$ und entsprechend $y = y_0 + y_{\frac{1}{2}} + y_1$, da $\mathfrak{A} \cong V$ gilt.

Nach Theorem 1.8 in [$\mathcal{DO}$79b] gilt:

(10.1.c) $$\Omega = \bigcup_{x_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)} exp(A_f(x_{\frac{1}{2}}))(\Omega_1(f) + \Omega_0(f)).$$

Für invertierbare $t \in \mathfrak{A}_1(f)$ definiert man eine Abbildung

(10.1.d)
$$\psi : \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) \times \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) \to \mathfrak{A}_0(f) \text{ durch}$$
$$\psi(t; a_{\frac{1}{2}}, b_{\frac{1}{2}}) := 2(e-f)(a_{\frac{1}{2}}(t^{-1}b_{\frac{1}{2}})).$$

Aus [$\mathcal{DO}$79b] Korollar 1.9 und 2.5 folgt, daß

(10.1.e)
$$a = a_0 + a_{\frac{1}{2}} + a_1 \in \Omega \Leftrightarrow a_1 \in \Omega_1(f) \text{ und}$$
$$a_0 - \psi(a_1; a_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{1}{2}}) \in \Omega_0(f).$$

Jedes $a_1 \in \Omega_1(f)$ ist invertierbar, da $\mathfrak{A}_1(f)$ eine formal-reelle Jordan-Algebra (s. Theorem 1.6 [$\mathcal{DO}$79b]) und $\Omega_1(f)$ der zugeordnete Positivitätsbereich von $\mathfrak{A}_1(f)$ ist.

Nach der Definition 6.2.3 von $\mathcal{S}(\Omega, F)$ ist

(10.1.f)
$$(z, u) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow y - F(u, u) \in \Omega.$$

Mit $y = y_0 + y_{\frac{1}{2}} + y_1$ und $u = u_0 + u_1$, $u_i \in U_i(f)$, $i = 1, 2$ sieht man, daß die rechte Seite von (10.1.f) äquivalent ist zu

(10.1.g)
$$y_1 - F(u_1, u_1) + y_{\frac{1}{2}} - F(u_1, u_0) - F(u_0, u_1) + y_0 - F(u_0, u_0) \in \Omega.$$

Daraus ergeben sich aus (10.1.e) die folgenden, zu (10.1.g) äquivalenten Bedingungen:

(10.1.h)
$$\begin{cases} y_1 - F(u_1, u_1) & \in & \Omega_1(f) \\ y_0 - F(u_0, u_0) - \psi(y_1 - F(u_1, u_1); \ddot{a}, \ddot{a}) & \in & \Omega_0(f), \end{cases}$$

mit $\ddot{a} := y_{\frac{1}{2}} - F(u_1, u_0) - F(u_0, u_1)$.

Zu $\Omega_1(f), U_1(f)$ und $F_1 = F|_{U_1(f) \times U_1(f)}$ erhält man in kanonischer Weise ein homogenes Siegelgebiet (s. Definition 6.2.3)

(10.1.i)
$$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}(\Omega_1(f), F_1).$$

Die erste Bedingung in (10.1.h) besagt offenbar, daß $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$.

Für $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ definiert man zwei Abbildungen

$$L^j_{(z_1, u_1)} : (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f)) \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f)) \to \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}}$$

mit $j = 1, 2$ durch

(10.1.j) $$L^1_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; r_{\frac{1}{2}}, w_0) :=$$
$$F(u_0, w_0) + \tfrac{1}{2}\psi(y_1 - F(u_1, u_1); iz_{\frac{1}{2}} + 2F(u_0, u_1), -i\overline{r}_{\frac{1}{2}} + 2F(u_1, w_0))$$

und

(10.1.k) $$L^2_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; r_{\frac{1}{2}}, w_0) :=$$
$$\tfrac{1}{2}\psi(y_1 - F(u_1, u_1); iz_{\frac{1}{2}} + 2F(u_0, u_1), ir_{\frac{1}{2}} + 2F(w_0, u_1)).$$

Schließlich definiert man:

(10.1.l) $$L := L^1 + L^2.$$

Satz 10.1.1 (Siegel-III-Realisierung)

a.) *Für* $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ *ist* $L^1_{(z_1,u_1)}(.;.)$ *eine* $\Omega_0(f)$*-hermitesche Form.*

b.) *Für* $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ *ist* $L^2_{(z_1,u_1)}(.;.)$ $\mathbb{C}$*-bilinear.*

c.) L *ist eine nicht ausgeartete semi-hermitesche Form.*

d.) $\mathcal{S}(\Omega, F) = \big\{((z_1, u_1), z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in ((\mathfrak{A}_1(f)^{\mathbb{C}} \times U_1(f)) \times \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f)))|(z_1, u_1) \in \mathcal{S}(\Omega_1(f), F_1), Im(z_0) - Re(L_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in \Omega_0(f)\big\}.$

Insgesamt erhalten wir eine Realisierung von $\mathcal{S}(\Omega, F)$ *als Siegel-III-Gebiet (s. Definition 6.2.7).*

Beweis:
Teil d.) wird wie folgt verifiziert:

$$\mathcal{S}(\Omega, F) := \{(z, u) \in V^{\mathbb{C}} \times U | Im(z) - F(u, u) \in \Omega\}.$$

Nun gilt $V^{\mathbb{C}} = \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} + \mathfrak{A}_1(f)^{\mathbb{C}}$ und $U = U_0(f) + U_1(f)$, deshalb ergeben sich für $z = x + iy \in V^{\mathbb{C}}$ bzw. $u \in U$ die Zerlegungen $z = x_0 + x_{\frac{1}{2}} + x_1 + i(y_0 + y_{\frac{1}{2}} + y_1)$ bzw. $u = u_0 + u_1$. Zudem benutzen wir für die folgenden Gleichungen (10.1.e,f,g,h) und die dort verwendeten Bezeichnungen. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}(\Omega, F)\\
&= \{(z, u) \in V^{\mathbb{C}} \times U | y_0 + y_{\frac{1}{2}} + y_1 - F(u_0 + u_1, u_0 + u_1) \in \Omega\}\\
&= \{(z_0, z_{\frac{1}{2}}, z_1; u_0, u_1) \in ((\mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{A}_1(f)^{\mathbb{C}}) \times (U_0(f) \times U_1(f)))\\
&\quad | y_1 - F(u_1, u_1) \in \Omega_1(f); y_0 - F(u_0, u_0) - \psi(y_1 - F(u_1, u_1); \ddot{a}, \ddot{a}) \in \Omega_0(f)\}\\
&= \{((z_1, u_1), z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in ((\mathfrak{A}_1(f)^{\mathbb{C}} \times U_1(f)) \times \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f)))\\
&\quad | \underbrace{Im(z_1) - F(u_1, u_1) \in \Omega_1(f)}_{\Leftrightarrow\ (z_1,u_1) \in \mathcal{S}(\Omega_1(f), F_1)}, Im(z_0) - Re(L_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in \Omega_0(f)\},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.
b.) ist offensichtlich und zum Beweis von a.) ist (6.2.h1-h4) zu zeigen. (6.2.h1) und (6.2.h2) sieht man sofort, denn $y_1 - F(u_1, u_1)$ ist reell und $\psi(x_1; ., .)$ symmetrisch. Die Symmetrie von ψ zeigt man z.B., indem man $\mathfrak{A}$ s-zerlegt (s. Definition 8.3.2). Dann zeigt man die Symmetrieeigenschaft für entsprechende Peirce-Räume der s-Zerlegung. Die Räume $\mathfrak{A}_i(f)$ mit $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ sind Summen von Peirce-Räumen der s-Zerlegung und man erhält die Symmetrie aufgrund der Linearitätseigenschaft von ψ, die man direkt sieht.
Ist $z_{\frac{1}{2}} = x_{\frac{1}{2}} + iy_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}}$ und $x_1 \in \Omega_1(f)$, so gilt $\psi(x_1; z_{\frac{1}{2}}, \overline{z}_{\frac{1}{2}}) = \psi(x_1; x_{\frac{1}{2}}, x_{\frac{1}{2}}) + \psi(x_1; y_{\frac{1}{2}}, y_{\frac{1}{2}})$. Beide Summanden liegen im Abschluß $\overline{\Omega_0(f)}$, denn wegen $x_1 \in \Omega_1(f)$ gilt ebenfalls $x_1^{-1} \in \Omega_1(f) \subset \overline{\Omega}$, so daß auch $v := exp(A_f(x_{\frac{1}{2}}))x_1^{-1}$ ein Element von $\overline{\Omega}$ ist (s. Korollar 1.9 in [$\mathcal{DO}$79b]). Dabei gilt

$$v = x_1 + x_{\frac{1}{2}} + (e - f)(x_1^{-1} x_{\frac{1}{2}}) x_{\frac{1}{2}},$$

unter Verwendung der Exponentialreihe und der Folgerung 1.3 in [$\mathcal{DO}$75], S.82. Die Projektion $v_0 = (e - f)(x_1^{-1} x_{\frac{1}{2}}) x_{\frac{1}{2}}$ von $v \in \overline{\Omega}$ auf $\mathfrak{A}_0(f)$ liefert die Behauptung (zur Erinnerung: $\Omega_0(f)$ ist die Projektion von Ω auf $\mathfrak{A}_0(f)$).
Man sieht also, daß $L^1_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)$ die Summe von drei Elementen aus $\overline{\Omega_0(f)}$ ist. Eine solche Summe ist gleich Null genau dann, wenn alle Summanden Null sind. Man verifiziert, daß dies hier genau dann der Fall ist, wenn $z_{\frac{1}{2}} = 0$ und $u_0 = 0$ gilt.
Für den Beweis von c.) ist offenbar nur noch zu zeigen, daß L nicht ausgeartet ist. Dazu beachtet man, daß

$$D := Re(L_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) = F(u_0, u_0) + \psi(x_1; Re(m), Re(m))$$

mit $m = iz_{\frac{1}{2}} + 2F(u_0, u_1)$ und $x_1 = y_1 - F(u_1, u_1)$ (Re bedeutet Realteil). Wie im Beweis von a.) sieht man, daß beide Summanden von D in $\overline{\Omega}$ liegen. Aus $D = 0$ folgt daher $u_0 = 0$ und $Re(m) = 0$, also auch $Im(z_{\frac{1}{2}}) = 0$. Nun genügt es zu zeigen, daß mit $x_{\frac{1}{2}} := Re(z_{\frac{1}{2}})$ aus $\psi(x_1; ix_{\frac{1}{2}}, -i\overline{r}_{\frac{1}{2}}) + \psi(x_1; ix_{\frac{1}{2}}, ir_{\frac{1}{2}}) = 0$ für $r_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}}$ schon $x_{\frac{1}{2}} = 0$ folgt. Mit $r_{\frac{1}{2}} := ix_{\frac{1}{2}}$ erhält man jetzt die Behauptung. Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung:

(10.1.α) Da wir immer die Bergmannmetrik betrachten, gilt in den uns interessierenden Fällen $\mathfrak{X} = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathfrak{A}_{ii}$ (s. Satz 3.2.4). Deshalb bildet $\{e - f, f\}$ ein *VOS* und die Räume $U_0(f)$ und $U_1(f)$ sind orthogonal bzgl. ρ_B. Dies folgt aus Lemma 3.9 in [$\mathcal{DO}$79e] und (7.1.a).

Aufgrund von Teil a.) in Satz 10.1.1 liegt es nahe, bei festem $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ das Siegelgebiet

(10.1.m) $$\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(z_1,u_1)}(.;.))$$

zu betrachten. Es gilt folgende Aussage (s. [$\mathcal{DO}$79*a*] Satz 5.8, S.115):

Satz 10.1.2 *Für* $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}(\Omega_1, F_1)$ *sind die Siegelgebiete* $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(z_1,u_1)}(.;.))$ *homogen und paarweise biholomorph äquivalent.*

Beweis:
Man betrachtet die von $\{(A(x), \frac{1}{2}\varphi(x)) | x \in \mathfrak{A}_0(f)\} \cup \{(A_{c_{11}-f}(x), \frac{1}{2}\varphi(x)\varphi(c_{11} - f)) | x \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) \cap \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(c_{11})\} \cup \{(T, \hat{T}) \in \mathfrak{g}_0 | T\mathfrak{A}_{11} = 0\}$ erzeugte Lie-Algebra $\boldsymbol{\gamma} \subset \mathfrak{g}_0$ (s. auch Lemma 4.10 und Theorem 3.12 in [$\mathcal{DO}$79*e*], für $\mathfrak{A}_{11}$ und c_{11} s. Definition 3.1.3). Die Lie-Algebra der ersten Komponenten von $\boldsymbol{\gamma}$ bezeichnet man mit $\boldsymbol{\gamma_1}$.
Ersetzt man im Beweis zu Theorem 3.7 in [$\mathcal{DO}$79*b*] p durch f, so erhält man, daß die von $\{exp(B) | B \in \boldsymbol{\gamma_1}\}$ erzeugte Lie-Gruppe (entspricht dort Δ_{00}) transitiv auf $\Omega_0(f)$ operiert.
Es gilt $\boldsymbol{\gamma_1}^\sigma f = 0$, deshalb sind die Elemente von $\boldsymbol{\gamma_1}$, nach [$\mathcal{DO}$79*b*] Lemma 1.4, Derivationen der Mutation $\mathfrak{A}_f$ von $\mathfrak{A}$ nach f. Außerdem vertauschen sie für alle $x_1 \in \mathfrak{A}_1(f)$ mit $A(x_1)$, denn es gilt auch $\boldsymbol{\gamma_1} f = 0$ und sie annullieren $U_1(f)$.
Für $(B, \hat{B}) \in \boldsymbol{\gamma}$ setzt man $W := B|_{\mathfrak{A}_0(f)}$ und $\hat{W} := (B|_{\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)}, \hat{B}|_{U_0(f)})$ und verifiziert $exp(W, \hat{W}) \in GL(\mathcal{S}_0)$. Aus Satz 6.2.5 folgt jetzt, daß $\mathcal{S}_0$ ein homogenes Siegelgebiet ist.
Zum Beweis der zweiten Behauptung genügt es offenbar, zu $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ einen Isomorphismus $(Q, \hat{Q})$ von $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f)$ anzugeben, der $L^1_{(z_1,u_1)}(.;.)$ in $L^1_{(if,0)}(.;.)$ überführt. Dazu setzt man $x_1 := Im(z_1) - F(u_1, u_1) \in \Omega_1(f)$ und wählt $a_1 \in \mathfrak{A}_1(f)$ mit $exp(A(a_1))f = x_1$ (ein solches Element a_1 existiert, s. Theorem 1.6 in [$\mathcal{DO}$79*b*]). Es gilt $(A(a_1), \frac{1}{2}\varphi(a_1)) \in LieGL(\Omega, F)$ (s. (6.2.d) und Lemma 3.10 [$\mathcal{DO}$79*e*]), folglich ist $exp(A(a_1))$ ein Vektorraumisomorphismus von $\mathfrak{A}$ und es gilt $A(a_1)\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) \subset \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)$, deshalb ist $Q := exp(A(a_1))|_{\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}(f)}}$ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)$. Des weiteren gilt wegen Lemma 3.9 in [$\mathcal{DO}$79*e*] $\varphi(a_1)U_0(f) \subset \{0\}$, also folgt $exp(\frac{1}{2}\varphi(a_1))|_{U_0(f)} = Id$ und man definiert $\hat{Q} := exp(\frac{1}{2}\varphi(a_1))|_{U_0(f)} = Id$. Nach Definition 6.2.3 gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(z_1,u_1)}(.;.)) &= \{(z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in (\mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f))) \\ &\qquad | Im(z_0) - L^1_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0) \in \Omega_0(f)\} \\ &\text{und} \\ \mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(if,0)}(,;.)) &= \{(w_0, (b_{\frac{1}{2}}, v_0)) \in (\mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f))) \\ &\qquad | Im(w_0) - L^1_{(if,0)}(b_{\frac{1}{2}}, v_0; b_{\frac{1}{2}}, v_0) \in \Omega_0(f)\}. \end{aligned}$$

$x_1 = Im(z_1) - F_1(u_1, u_1) \in \Omega_1(f)$ und aufgrund der Definition von L^1 (s. (10.1.j)) und da $x_1, f \in \Omega_1(f)$ die Stellen sind, an denen wir L^1 und die dazugehörigen Siegelgebiete $\mathcal{S}_0$ betrachten, können wir für $L^1_{(z_1,u_1)}$ bzw. $L^1_{(if,0)}$ auch $L^1_{x_1}$ bzw. L^1_f schreiben.
Wegen Theorem 1.5 in [$\mathcal{DO}$79*b*] gilt $A(a_1)|_{\mathfrak{A}_1(f)} \in LieAut(\Omega_1(f))$, deshalb ist

$exp(A(a_1))|_{\mathfrak{A}_1(f)} \in Aut(\Omega_1(f))$ also eine biholomorphe Abbildung.
Die Abbildung von $\Omega_1(f) \times \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times (\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f))$ in sich via

$$(x_1; (z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0))) \mapsto (exp(A(a_1))x_1; (z_0, Qz_{\frac{1}{2}}, \underbrace{\hat{Q}u_0}_{=u_0}))$$

bildet offensichtlich $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{x_1})$ biholomorph auf $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_f)$ ab.
Dies ist für jedes (z_1, u_1) mit $Im(z_1) - F_1(u_1, u_1) \in \Omega_1(f)$ möglich und aus diesem Grund sind alle Siegelgebiete $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(z_1,u_1)})$ paarweise biholomorph zueinander, was zu zeigen war. $\square$

Man betrachtet die Projektion $\pi : \mathcal{S}(\Omega, F) \to \mathcal{S}_1$, die via

(10.1.n)
$$\pi((z_1, u_1), z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) := (z_1, u_1)$$

definiert ist. Offensichtlich ist π holomorph und für $(z_1, u_1) \in \mathcal{S}_1$ gilt

(10.1.o)
$$\pi^{-1}(z_1, u_1) \cong \{(z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) | Im(z_0) - Re(L_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in \Omega_0(f)\}$$

und:

Lemma 10.1.3 *Durch*
$$(z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \mapsto (z_0 - iL^2_{(z_1,u_1)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0), (z_{\frac{1}{2}}, u_0))$$
wird $\pi^{-1}(z_1, u_1)$ *biholomorph auf* $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(z_1,u_1)}(.;.))$ *abgebildet.*

10.2 Bergmannmetrik und induktives Argument

Die Aussagen des voranstehenden Abschnittes 10.1 werden nun benutzt, um ein wichtiges, induktives Argument für spätere Beweise zu erlangen. Dabei geben wir fast wörtlich den Beweis für Satz 10.2.1 aus [$\mathcal{DO}$79*a*] wieder.

Satz 10.2.1 (Dorfmeister) $\mathcal{S}_0$ *ist genau dann quasisymmetrisch, wenn* $\mathfrak{A}_0(f)$ *eine Jordan-Algebra ist.*

Beweis:
Es genügt zu zeigen (s. Satz 7.1.4), daß die zu $\mathcal{S}_0$ und $f_0 := e - f$ bzgl. η_B (s. Satz 3.2.3) von $\mathcal{S}_0$ abgeleitete Algebra (s. (3.1.h)) mit $\mathfrak{A}_0(f)$ übereinstimmt. Aufgrund des Satzes 10.1.2 kann dabei $(z_1, u_1) = (if, 0)$ angenommen werden. Die zu $\mathcal{S}_0$ gehörige Abbildung des Satzes 3.2.3 bezeichnen wir mit η_0. Man berechnet nun η_0 (das Verfahren ist in [$\mathcal{DO}$79*e*] 5., S.50 beschrieben), setzt dazu $\tau := \sigma|_{\mathfrak{A}_0(f)}$ und wählt $x_0 := f_0 \in \Omega_0(f)^{\tau}$. Dann erhält man (s. (7.1.a) u. (3.1.h))

$$\kappa((u_{\frac{1}{2}}, u_0); (w_{\frac{1}{2}}, w_o)) \quad := \quad \sigma(L^1_{(if,0)}(u_{\frac{1}{2}}, u_0; w_{\frac{1}{2}}, w_0), f_0),$$

$$\begin{aligned} &= \sigma(F(u_0, w_0), f_0) + \frac{1}{2}\sigma(f_0, u_{\frac{1}{2}}\overline{w_{\frac{1}{2}}}), \\ &= \rho(u_0, w_0) + \frac{1}{4}\sigma(u_{\frac{1}{2}}, \overline{w_{\frac{1}{2}}}). \end{aligned}$$

Für $x \in \mathfrak{A}_0(f)$ ergibt sich damit eine Abbildung $\vartheta : V^{\mathbb{C}} \to End_{\mathbb{C}}U$ via (analog zu (7.1.b))

$$\begin{aligned} \kappa(\vartheta(x)(u_{\frac{1}{2}}, u_0); (w_{\frac{1}{2}}, w_0)) &:= \sigma(L^1_{(if,0)}(u_{\frac{1}{2}}, u_0; w_{\frac{1}{2}}, w_0), x), \\ &= \sigma(F(u_0, w_0), x) + \frac{1}{2}\sigma(u_{\frac{1}{2}}\overline{w_{\frac{1}{2}}}, x), \\ &= \rho(\varphi(x)u_0, w_0) + \frac{1}{4}\sigma(2A(x)u_{\frac{1}{2}}, \overline{w_{\frac{1}{2}}}). \end{aligned}$$

Man setzt abkürzend $A_{\frac{1}{2}}(x) := A(x)|_{\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)}$ und erhält also

$$\vartheta(x) = (\varphi(x)|_{U_0(f)}, 2A_{\frac{1}{2}}(x))$$

für alle $x \in \mathfrak{A}_0(f)$. Nach [$\mathcal{DO}$79e] (2.18), S.51 gilt dann

$$\eta_0(x) = c_1(\iota_{\Omega_0(f)}(x))^2 det(\vartheta(h(x))).$$

Wegen Korollar 3.9 in [$\mathcal{DO}$79b] gilt

$$[\iota_\Omega(f + x)]^2 = \gamma[\iota_{\Omega_0(f)}(x)]^2 det(A_{\frac{1}{2}}(h_0(x)));$$

dabei wird h_0 durch $h(f + x) = f + h_0(x)$ bestimmt (vgl. [$\mathcal{DO}$79b] Lemma 2.2) und h aus $\eta_B = \eta$ (s. (3.1.e)) und e abgeleitet.
Betrachtet man wieder die von $\{exp(B)|B \in \boldsymbol{\gamma_1}\}$ erzeugte Lie-Gruppe Γ, $\boldsymbol{\gamma_1}$ wie im Beweis des Satzes 10.1.2, so sieht man $h_\sigma(Wx) = (W^\sigma)^{-1}h_\sigma(x)$ und $h_0(Wx) = (W^\sigma)^{-1}h_0(x)$ für alle $x \in \Omega_0(f)$, $W \in \Gamma$. Daher stimmen $det(\vartheta(h_\sigma(x)))$ und $det(\vartheta(h_0(x)))$ bis auf einen konstanten Faktor überein. Insgesamt erhält man somit

$$\begin{aligned} \eta_0(x) &= c_2[\iota_{\Omega_0(f)}(x)]^2 det(A_{\frac{1}{2}}(h_0(x)))det(\varphi(h_0(x))|_{U_0(f)}), \\ &= c_3[\iota_\Omega(f + x)]^2 det(\varphi(h(f + x))). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.11 in [$\mathcal{DO}$79e] erhält man jetzt

(10.2.a) $$\eta_0(x) = c_4\eta(f + x).$$

Also stimmt $\mathfrak{A}_0(f)$ mit der zu $\mathcal{S}_0$ via (3.1.h) abgeleiteten Algebra überein. □

Sei B der Bergmannkern des Siegelgebiets

$$\mathcal{S}(\Omega, F) \subset (\mathfrak{A}_0(f) + \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) + \mathfrak{A}_1(f))^{\mathbb{C}} \times (U_0(f) + U_1(f))$$

(s. Satz 3.2.3) und η sei die dazugehörige Funktion, d.h. $B \sim \eta$ und es gilt:

$$B((z_0 + z_{\frac{1}{2}} + z_1), (u_0 + u_1); (w_0 + w_{\frac{1}{2}} + w_1), (v_0 + v_1)) =$$
$$\eta(\tfrac{1}{2i}(z_0 + z_{\frac{1}{2}} + z_1 - (\overline{w_0 + w_{\frac{1}{2}} + w_1})) - F(u_0 + u_1, v_0 + v_1)),$$

wobei $z_i, w_i \in \mathfrak{A}_i(f)^{\mathbb{C}}$ für $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ und $u_j, v_j \in U_j(f)$ für $j = 0, 1$.

Proposition 10.2.2 *Der Bergmannkern $B_0 \sim \eta_0$ von $\mathcal{S}_0$ entspricht unter dem Isomorphismus von Lemma 10.1.3 der Einschränkung $B^0 \sim \eta^0$ des Bergmannkerns $B \sim \eta$ von $\mathcal{S}$ auf die Faser.*

Beweis:
Aufgrund des Satzes 10.1.2 kann dabei $(z_1, u_1) = (if, 0)$ angenommen werden; dann gilt $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(if,0)})$ und die zu betrachtende Faser ist $\pi^{-1}(if, 0)$. Es gilt mit diesen Werten folgende einfache Gleichung:

$$B((z_0 + z_{\frac{1}{2}} + if), u_0; (z_0 + z_{\frac{1}{2}} + if), u_0) = \\ \eta(f + Im(z_{\frac{1}{2}}) + Im(z_0) - F(u_0, u_0)).$$

Sei $x_1 \in \Omega_1(f)$ und $x_0 \in \Omega_0(f)$, dann liefert Lemma 2.1 in [$\mathcal{DO}$79*b*], daß

$$\eta(x_1 + x_0) = \eta_1(x_1)\eta^0(x_0)$$

gilt. Dabei setzt man

$$\eta_1(x_1) := \eta(x_1 + e - f) \text{ und } \eta^0(x_0) := \eta(e)^{-1}\eta(x_0 + f).$$

Da es bei unserer Betrachtung auf den tatsächlichen Wert von $\eta(e)$ nicht ankommt, setzen wir diesen aus Bequemlichkeitsgründen gleich $\frac{1}{c_4}$ mit c_4 von (10.2.a). Des weiteren gilt wegen Lemma 2.1 in [$\mathcal{DO}$79*b*], daß die Funktionen

$$\eta_1 : \Omega_1(f) \to \mathbb{R}^+ \text{ und } \eta^0 : \Omega_0(f) \to \mathbb{R}^+$$

die Bedingungen (3.1.A1-A5) erfüllen.
Gehört η nun insbesondere zum Bergmannkern, dann entspricht η^0 bzw. η_1 der Funktion, die zur Einschränkung des Bergmannkerns B auf die Faser $\pi^{-1}(if, 0)$ bzw. auf die Basis $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(\Omega_1(f), F_1)$ gehört.
Um die Aussage der Proposition besser sehen zu können, führen wir die nachfolgende Rechnung durch. Dabei gilt unter Ausnutzung von (10.1.e-h):

$$\Omega_0(f) \ni x_0 = Im(z_0) - F(u_0, u_0) - \psi(f; Im(z_{\frac{1}{2}}), Im(z_{\frac{1}{2}})),$$

was wir nun in η^0 einsetzen:

$$\begin{aligned} \eta^0(x_0) &= \eta^0(Im(z_0) - F(u_0, u_0) - \psi(f; Im(z_{\frac{1}{2}}), Im(z_{\frac{1}{2}}))) \\ &= \eta^0(Im(z_0) - F(u_0, u_0) - \psi(f; Re(iz_{\frac{1}{2}}), Re(iz_{\frac{1}{2}}))) \\ &= \eta^0(Im(z_0) - Re(L_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0))). \end{aligned}$$

Dabei folgt die zweite Gleichheit, da $Im(z_{\frac{1}{2}}) = -Re(iz_{\frac{1}{2}})$ gilt und ψ linear in den letzten beiden Argumenten ist. Für die letzte Gleichheit benutzt man die Definition von L.
Da $ReL^2 = Im(iL^2)$ gilt und weil aus der Tatsache, daß L^1 $\Omega_0(f)$-hermitesch ist (s. Satz 10.1.1 a.)) folgt, daß $ReL^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0) = L^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)$ gilt, folgt weiter:

$$ReL_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0) = Im(iL^2_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) + L^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)$$

und damit ergibt sich für $\eta^0(x_0)$

$$\begin{aligned}&\eta^0(Im(z_0) - Re(L_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)))\\ &= \eta^0(Im(z_0 - iL^2_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)) - L^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0)).\end{aligned}$$

Nun ist aber $(z_0 - iL^2_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0), (z_{\frac{1}{2}}, u_0))$ bzgl. der biholomorphen Abbildung des Lemmas 10.1.3 das Bild in $\mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(if,0)}(.;.)) = \mathcal{S}_0$ von $(z_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) \in \pi^{-1}(if, 0)$.
Daraus ersehen wir explizit, daß η^0 als auf $\mathcal{S}_0$ definiert betrachtet werden kann und daß via des Isomorphismusses des Lemmas 10.1.3 dies der Definition auf der Faser $\pi^{-1}(if, 0)$ entspricht.

Sei nun η_0 die Funktion des Bergmannkerns des Siegelgebiets $\mathcal{S}_0$, dann gilt aufgrund des Beweises von Satz 10.2.1 (s. (10.2.a)) und obiger Argumentation

$$\eta_0(x) = c_4\eta(f + x) = \eta^0(x),\ \forall x \in \Omega_0(f).$$

Somit folgt, daß die Einschränkung B^0 des Bergmannkerns B von $\mathcal{S}$ auf die Faser, die durch den Isomorphismus von Lemma 10.1.3 als auf $\mathcal{S}_0$ definiert betrachtet werden kann, dem Bergmannkern B_0 von $\mathcal{S}_0$ entspricht. Dies zeigt die Behauptung der Proposition. □

Korollar 10.2.3 *Sei g^0 die Metrik der Faser, die von der Bergmannmetrik g von $\mathcal{S}$ induziert wird. Weiter sei g_0 die Bergmannmetrik von $\mathcal{S}_0$.*
Dann folgt, daß die Faser mit der induzierten Metrik g^0 isometrisch zu $(\mathcal{S}_0, g_0)$ ist.

Beweis:
Wegen Satz 10.1.2 genügt es, die Situation für $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(\Omega_0(f), L^1_{(if,0)}(.;.))$ zu betrachten. Bezeichnen wir wie in der Proposition 10.2.2 mit B_0 den Bergmannkern von $\mathcal{S}_0$ und mit B^0 die Einschränkung des Bergmannkerns B von $\mathcal{S}$ auf die Faser $\pi^{-1}(if, 0)$, dann erhalten wir via Proposition 10.2.2 $\forall\ x_0 \in \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}}$, $z_{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}}$, $u_0 \in U_0(f)$:

$$\begin{aligned}B_0(x_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0); x_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)) &= \eta_0(Im(x_0) - L^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0))\\ &= \eta^0(Im(x_0) - L^1_{(if,0)}(z_{\frac{1}{2}}, u_0; z_{\frac{1}{2}}, u_0))\\ &= B^0(x_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0); x_0, (z_{\frac{1}{2}}, u_0)).\end{aligned}$$

$g^0 = g|_{\pi^{-1}(if,0)}$ und es gilt $\forall x \in \Omega_0(f)$ und $\forall v \in \mathfrak{A}_0(f)$:

$$\begin{aligned}g_{0(ix,0)}(v, v) &= \Delta^v_x\Delta^v_x ln(\eta_0(x))\\ &= \Delta^v_x\Delta^v_x ln(\eta^0(x))\\ &= g^0_{(ix,0)}(v, v).\end{aligned}$$

Weil $\mathcal{S}_0$ und die Faser homogen (s. Satz 10.1.2) und einfach zusammenhängend sind, genügt es, die Metriken g_0 und g^0 an der Stelle $(i(e - f), (0, 0)) \in \mathfrak{A}_0(f)^{\mathbb{C}} \times$

$(\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f)^{\mathbb{C}} \times U_0(f))$ zu betrachten. Dabei bildet der Isomorphismus von Lemma 10.1.3 diesen Punkt in sich ab und dessen Ableitung entspricht an dieser Stelle der Identität.
Seien nun $(\mathfrak{s}_0, \omega_0)$ bzw. $(\mathfrak{s}, \omega)$ normale J-Algebren, die zu $\mathcal{S}_0$ bzw. $\mathcal{S}$ gehören. Dabei sind ω_0, ω die zu den jeweiligen Bergmannmetriken g_0, g gehörenden Einsformen und es gilt $\mathfrak{s}_0 \cong \mathfrak{s}^0 \subset \mathfrak{s}$. $\mathfrak{s}^0$ entspricht dem zu $\pi^{-1}(if, 0)$ gehörenden Anteil von $\mathfrak{s}$. Außerdem bezeichnen wir mit ω^0 die Einschränkung von ω auf $\mathfrak{s}^0$.
Die Einsform ω_0 von $\mathfrak{s}_0$ ist bekanntlich vollkommen determiniert, wenn man die Werte von ω_0 auf den Basiselementen $E_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i} \subset \mathfrak{s}_0$ kennt (s. auch Lemma A.2.3). Nun gilt für alle diese E_i (zur Erinnerung es gilt $\mathfrak{A}_0(f) \cong \sum_i \mathfrak{n}_{\alpha_i} \oplus \sum_{i<j} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}$, der Index i gehört zu $\mathfrak{s}_0$):

$$\omega_0(E_i) = \omega_0([JE_i, E_i]) = g_0(E_i, E_i) = g^0(E_i, E_i) = \omega^0(E_i).$$

Des weiteren folgt daraus $\forall X \in \mathfrak{s}_0$, weil ω_0 durch die Werte auf E_i bestimmt ist, daß

$$g_0(X, X) = g^0(X, X)$$

gilt und durch Polarisation folgt $\forall X, Y \in \mathfrak{s}_0$

$$g_0(X, Y) = g^0(X, Y).$$

Es folgt somit, daß $(\mathcal{S}_0, g_0)$ isometrisch zu der Faser $(\pi^{-1}(if, 0), g^0)$ ist. Wir können also sagen, daß die von g induzierte Metrik g^0 der Bergmannmetrik g_0 von $\mathcal{S}_0$ entspricht. $\square$

Bemerkungen:

(10.2.α) *Das induktive Argument*

Durch Satz 10.2.1, Proposition 10.2.2 und Korollar 10.2.3 wird uns eine induktive Vorgehensweise z.B. bzgl. der reellen Dimension der Siegelgebiete (wir nutzen dann auch Theorem 4 aus [$\mathcal{TS}$91] S.450 als Induktionsverankerung) oder der Algebra $\mathfrak{A}$ (s. insbesondere $\mathcal{STA}$ im Beweis des Satzes 12.2.1) ermöglicht (aber auch bzgl. q, wie wir es in Satz 12.1.1 benutzen werden), was wir nun erklären.
Sei $\mathcal{S}(\Omega, F)$ ein irreduzibles homogenes Siegelgebiet vom $q \geq 2$-Typ mit einer fest vorgegebenen reellen Dimension und n.p.h.B. bzgl. der Bergmannmetrik. Weiter sei $\mathfrak{A}$ die zu $\mathcal{S}$ gehörende Algebra mit einer optimalen q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$. Wegen Satz 3.2.5 gilt $\mathfrak{A}_{11} \neq 0$ und wir können $\mathcal{S}$ via Satz 10.1.1 als Siegel-III-Gebiet bzgl. verschiedener Idempotenten aus $\mathfrak{A}_{11} \subset \mathfrak{A}$ realisieren. Jede solche Realisierung ergibt einen Faserraum $\mathcal{S}_0$ niedrigerer Dimension, der auch ein Siegelgebiet ist (s. dazu Satz 10.1.2).
Proposition 10.2.2, Korollar 10.2.3 und Korollar 8.1.4 liefern, daß $\mathcal{S}_0$ ebenfalls n.p.h.B. hat. Weil $\mathcal{S}_0$ niedrigere Dimension als $\mathcal{S}$ besitzt, können wir induktiv schließen, daß $\mathcal{S}_0$ quasisymmetrisch ist und Satz 10.2.1 liefert nun, daß $\mathfrak{A}_0(f)$ eine Jordan-Algebra ist.
Aus den Eigenschaften, die $\mathfrak{A}_0(f)$ für verschiedene Idempotente $f \in \mathfrak{A}_{11}$ erfüllen

muß, erhalten wir Bedingungen für $\mathfrak{A}$, durch die wir auf Eigenschaften des dazugehörigen Siegelgebiets $\mathcal{S}$ schließen können. Eine analoge Argumentationsweise wird im 12. Kapitel von großer Bedeutung für den Beweis der Krümmungsvermutung sein.

(10.2.β) Es genügt für uns immer, f gleich einem primitiven Idempotent eines s-*VOS* von $\mathfrak{A}_{11}$ oder als Summe von solchen zu wählen.

10.3 Das Verhalten der U^i-Räume

Es wird geklärt, welche Bedeutung die Räume U^i bzw. die entsprechenden Wurzelräume $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_i}$ bei unseren Argumentationen haben. Dafür studieren wir deren grundsätzliches Verhalten bei den von uns jeweils benutzten Argumenten für die Siegelgebiete mit $q \geq 3$ und $q \leq 2$.

Die in diesem Abschnitt dargelegten Betrachtungen erschließen sich dem Leser evtl. erst, nachdem er die Anwendung der Argumente bei den verschiedenen Fällen in den Kapiteln 11-12 sieht.
Sei $\mathcal{S}(\Omega, F) \subset V^{\mathbb{C}} \times U$ (s. Definition 6.2.3) ein homogenes Siegelgebiet und $\mathfrak{A}$ die dazugehörige Algebra mit optimaler q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung $\mathcal{C}$ (s. Definition 3.1.3 u. 3.1.7), dann unterscheiden wir die beiden Fälle:

I. $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra vom $q \geq 3$-Typ

Die Räume, die zu solchen Algebren gehören, werden wir in Satz 12.1.1 behandeln. Das in Satz 12.1.1 verwendete Argument wurde in (10.2.α) erläutert (s. auch das Standardargument $\mathcal{STA}$, welches in Satz 12.2.1 dargelegt wird). Für dieses Argument werden wir nun das Verhalten der U^i Räume erklären. Dazu betrachten wir das folgende, zu $\mathcal{S}$ assoziierte Diagramm (s. (8.3.g)):

(10.3.a)
$$\left(\begin{array}{c|cccc} U^1 & \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \cdots & \mathfrak{A}_{1q} \\ U^2 & \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \cdots & \mathfrak{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U^q & \mathfrak{A}_{q1} & \mathfrak{A}_{q2} & \cdots & \mathfrak{A}_{qq} \end{array}\right).$$

Beim Übergang von $\mathfrak{A}$ zu einer normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ gilt, daß jeder Raum 1. Art, d.h. die Räume vom Typ $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_j}$ in $\mathfrak{s}$, genau in einem U^j $\forall j = 1, ..., q$ enthalten ist. M.a.W. entspricht jedes U^j einer direkten Vektorraumsumme von Räumen 1. Art (s. Lemma 3.9 in [$\mathcal{DO}$79e] und Abschnitt 8.3).
Des weiteren gilt $U = \sum_{i=1}^{q} U^i$ (s. Lemma 3.9 in [$\mathcal{DO}$79e]), und bei der Realisierung von $\mathcal{S}$ als Siegel-III-Gebiet nach einem Idempotent $f \in \mathfrak{A}_{11}$ (s. Satz 10.1.1) wird ein Teil von U, nämlich $U_1(f)$ (s. (10.1.b)), der Basis $\mathcal{S}_1$ (s. (10.1.i)) und $U_0(f)$ der Faser $\mathcal{S}_0$ (s. (10.1.m)) zugeordnet.
Sowohl $U_0(f)$ als auch $U_1(f)$ entsprechen jeweils einer Vektorraumsumme von

Räumen 1. Art, da wir nur spezielle f, wie in (10.2.β) erklärt, wählen werden. Weil sich die Räume U^i bzgl. der zu betrachtenden Siegel-III-Realisierungen eindeutig der Basis $\mathcal{S}_1$ oder der Faser $\mathcal{S}_0$ zuordnen lassen, verhalten sie sich diesbezüglich „optimal“.

II. $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra vom $q \leq 2$-Typ

Im Falle q=1 betrachten wir einfach einen komplexen Darstellungsraum U einer formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$.
Diese Darstellungen wurden in [$\mathcal{DO}$79a] S.83-92 detailliert diskutiert, was wir für die Betrachtungen an dieser Stelle nicht benötigen. In Kapitel 11 gehen wir auf die Feinstruktur der reellen Darstellungsräume der formal-rellen Jordan-Algebren ein.

Bei der Betrachtung des q=2 Falls gehört das folgende Diagramm zu $\mathfrak{A}$:

$$\left(\begin{array}{c|cc} U^1 & \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \hline U^2 & \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{array}\right).$$

Dabei sei aufgrund des Satzes 4.2.1 ohne Einschränkung $\mathfrak{A}_{11}$ bzw. $\mathfrak{A}_{22}$ die Summe von n bzw. t mit $n, t \in \mathbb{N}$ einfachen formal-reellen Jordan-Algebren $\mathfrak{A}^1_{ii}$ bzw. $\mathfrak{A}^0_{jj}$ mit $i \in \{1, ..., n\}$ und $j \in \{n+1, ..., n+t\}$. Außerdem gilt $U^1 = \sum_{i=1}^n U_i$, $U^2 = \sum_{j=n+1}^{n+t} U_j$ und das dazu assoziierte Diagramm ist:

$$\textbf{(10.3.b)} \qquad \left(\begin{array}{c|ccc|ccc} U_1 & \mathfrak{A}^1_{11} & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+t} \\ \hline U_{n+1} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n+t} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+t,1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+t,n} & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{n+t,n+t} \end{array}\right).$$

Auch den Räumen U_i entsprechen beim Übergang zu einer normalen J-Algebra Summen von Räumen 1. Art. Die Dimensionen m_i (s. Definition 6.4.2) der Räume 1. Art und deren Verhältnisse zueinander sind bei den notwendigen Bedingungen für n.p.h.B. der Siegelgebiete vom q=2-Typ von entscheidender Bedeutung.

1. *Für n.p.h.B. notwendige Bedingungen und die Räume U_i*

Falls für ein Paar von Indizes (i, j) mit $i < j$ $n_{ij} \neq 0$ gilt, liefert Proposition 9.1.1 für die Dimensionen der Räume 1. Art $m_i \geq m_j$. Dies ist für viele Paare von Indizes, in den zu betrachtenden Fällen des Kapitels 11 der Fall. Für diese Fälle gehen dann die Dimensionen m_i in die für nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung des Siegelgebiets notwendigen Bedingungen immer verstärkend ein, wie man auch aus den Lemmata 9.2.2-3 usw. direkt ersehen kann (s. auch Satz 8.2.1 und die Indexumkehr in Abschnitt 8.3). Das „Hinzufügen“ der Dimensionen m_i bei den notwendigen Bedingungen entspricht dem Übergang von den Tubengebieten zu den Siegel-II-Gebieten.

2. *Irreduzibiltät und die Räume U_i*

Die Räume U_i spielen bei der Frage nach der Irreduzibilität des Siegelgebietes keine Rolle, denn diese Eigenschaft eines Siegelgebietes entspricht der Irreduzibilitätseigenschaft des Kegels, was wiederum eindeutig mit der entsprechenden Eigenschaft der Algebra $\mathfrak{A}$ korrespondiert (s. Satz 8.4.3). Ist das Diagramm aufspaltend (s. Definition 8.4.2), dann werden die Räume 1. Art einem ihrem Index entsprechenden irreduziblen Faktor zugeordnet (s. Abschnitt 6.5 und 6.6, insbesondere den Beweis des Satzes 8.4.3 und (8.4.β)).

3. *Siegel-III-Realisierungen und die Räume U_i*

Bei der Siegel-III-Realisierung eines Siegelgebiets $\mathcal{S}$ vom q=2-Typ nach einem Idempotent $f \in \mathfrak{A}_{11}$ (f wie in (10.2.β)), werden entsprechende Teile von U, nämlich $U_0(f)$ der Faser $\mathcal{S}_0$ bzw. $U_1(f)$ der Basis $\mathcal{S}_1$ zugeordnet (s. (10.1.b), (10.1.i) und Satz 10.1.1). $U_0(f)$ und $U_1(f)$ entsprechen, wie in I erläutert, jeweils einer Summe von Räumen 1. Art. Die Räume U_i verursachen bei der Siegel-III-Realisierung keine Schwierigkeiten.

10.4 Der reelle Darstellungsraum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit einem einfachen Diagramm des q=2-Falls. Für dieses Diagramm erklären wir die innere Struktur.

Wir betrachten das folgende Diagramm einer Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ

(10.4.a)
$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}^1 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array} \right),$$

bei dem die formal-reellen Jordan-Algebren $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{A}^0$ einfach sind. Lemma 3.2.1 und Satz 3.2.5 c.) ergeben, daß die Abbildung
$$A_{\frac{1}{2}} : \mathfrak{A}^0 \to End(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}})^+$$
ein injektiver unitärer Homomorphismus der Jordan-Algebren ist (s. auch (3.2.b)). Wir sind nun an denjenigen Räumen $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ interessiert, auf denen $A_{\frac{1}{2}}(\mathfrak{A}^0)$ irreduzibel operiert. Falls nämlich $\mathfrak{B}^{\frac{1}{2}}$ ein invarianter Unterraum von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist, so ist der bzgl. σ orthogonale Raum von $\mathfrak{B}^{\frac{1}{2}}$ ebenfalls invariant, was direkt aus der Assoziativitätseigenschaft von σ folgt. Der reelle Darstellungsraum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist folglich vollständig reduzibel und somit die Summe irreduzibler Räume.

Wir müssen also die irreduziblen reellen Darstellungen der einfachen formal-reellen Jordan-Algebren des 1. Struktursatzes studieren, wobei wir die Ausnahmealgebra $\mathcal{H}(3,\mathbb{O})$ aus den bekannten Gründen nicht berücksichtigen müssen.
Sei nun $\mathfrak{A}$ eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra. Für die Untersuchung der reellen irreduziblen Darstellungen einer formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ ist die unitäre spezielle universelle Einhüllende $S_1(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ hilfreich, wie wir aus [$\mathcal{DO}$79a] S.84 ff. entnehmen können. Nach [$\mathcal{JA}$] II 2 ist $S_1(\mathfrak{A})$ eine assoziative Algebra mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\mathfrak{A} \subset S_1(\mathfrak{A})$, $S_1(\mathfrak{A})$ wird von $\mathfrak{A}$ erzeugt, und die Einselemente von $\mathfrak{A}$ und $S_1(\mathfrak{A})$ stimmen überein.

2. Die Einbettung $\mathfrak{A} \subset S_1(\mathfrak{A})$ ist eine assoziative Spezialisierung von $\mathfrak{A}$ in $S_1(\mathfrak{A})$.

3. Jede assoziative Spezialisierung g von $\mathfrak{A}$ in eine assoziative Algebra $\mathfrak{G}$ mit 1, $g(1) = 1$, läßt sich zu einem Homomorphismus der assoziativen Algebren $S_1(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{G}$ fortsetzen.

Aus [$\mathcal{DO}$79a] entnimmt man, daß sich die irreduziblen reellen Darstellungen von $\mathfrak{A}$ aus den entsprechenden irreduziblen reellen Darstellungen von $S_1(\mathfrak{A})$ ergeben. Für die einfachen formal-reellen Jordan-Algebren ist $S_1(\mathfrak{A})$ bekannt, und die irreduziblen reellen Darstellungsräume (V,ϱ) der reellen Algebren $S_1(\mathfrak{A})$ kennt man ebenfalls. Wir erhalten folgende Tabelle:

$\mathfrak{A}$	$\mathcal{H}(n,\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$	$[\mathcal{X},\nu,e]$
$S_1(\mathfrak{A})$	$Mat(n\times n,\mathbb{K})$	Cl_p
(V,ϱ)	$(\mathbb{K}^n, kan)$	Λ

.

Cl_p ist die Clifford-Algebra mit $p = dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X} - 1$ (s. dazu den Beweis des Satzes 11.2.3) und kan ist die kanonische bzw. Standarddarstellung von $\mathfrak{A}$ (s. dazu [$\mathcal{LAMI}$89] S.31, Theorem 5.6), d.h.

$$\begin{aligned} kan : S_1(\mathfrak{A}) &\rightarrow End(V), \\ kan(X)(A) &= XA. \end{aligned}$$

Λ steht stellvertretend für mögliche reelle irreduzible Darstellungen der Clifford-Algebra Cl_p. Wir gehen hier auf die Darstellungstheorie von Cl_p nicht weiter ein und verweisen dafür z.B. auf [$\mathcal{FUHA}$] S.299 ff..
Das von uns Benötigte aus der Darstellungstheorie einfacher formal-reeller Jordan-Algebren beschreiben detailliert in den Beweisen der Sätze 11.2.2 und 11.2.3.

11 Spezielle Fälle

In diesem Kapitel betrachten wir Algebren vom q=2-Typ. Man kann zeigen, daß alle betrachteten Fälle tatsächlich auftreten. Das Hauptziel ist es, für die zugehörigen Siegelgebiete notwendige Bedingungen für n.p.h.B. herzuleiten. Somit grenzen wir die Menge der möglichen homogenen regulären Kegel und somit der Siegelgebiete ein, die evtl. n.p.h.B. haben könnten. Dies sind die Fälle, welche im 12. Kapitel von Bedeutung sein werden.

11.1 Notwendige Bedingungen für n.p.h.B.

Damit ein Gebiet n.p.h.B. besitzt, müssen bestimmte Ungleichungen erfüllt sein. Wir leiten in diesem Abschnitt neue notwendige Bedingungen für n.p.h.B. für den wichtigsten Spezialfall vom q=2-Typ her, den wir anschließend in Abschnitt 11.2 weiterbehandeln.

Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet, $\mathfrak{s}$ eine dazugehörige normale J-Algebra. Weiter sei $\mathfrak{A}$ die zugehörige Algebra vom q=2-Typ (s. (10.4.a)) mit Rang r, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R} \text{ und } \mathfrak{A}^0 = \bigoplus_{s=2}^{t+1} \mathfrak{A}^0_{ss},$$

wobei $\mathfrak{A}^0_{ss}$ eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra mit Einselement b_{ss} ist. Die Summe $\sum_{s=2}^{t+1} b_{ss}$ ist gleich dem Einselement e^0 von $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = \bigoplus_{s=2}^{t+1} \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{s1}$, wobei $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{s1} = b_{ss}\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gilt. Zu diesem $\mathfrak{A}$ gehört das folgende Diagramm:

(11.1.a)
$$\left(\begin{array}{c|ccccc}
\mathbb{R} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{12} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{14} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,t+1} \\
\hline
\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{21} & \mathfrak{A}^0_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{31} & 0 & \mathfrak{A}^0_{33} & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{41} & 0 & 0 & \mathfrak{A}^0_{44} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{t+1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{t+1,t+1}
\end{array}\right).$$

Wir benutzen die zu (8.4.b-d) analogen Vereinbarungen, d.h. $r_1 = 1$, $r_s = Rang(\mathfrak{A}_{ss})$ für $2 \leq s \leq t+1$, und $\forall s \in \{1, ..., t+1\}$ setzen wir $R_s = \sum_{j=1}^{s} r_j$, $M_s = \{R_{s-1}+1, ..., R_s\}$, wobei $R_0 = 1$, $R_{t+1} = r$ gilt und $\tilde{M}_s = \{r+1-l | l \in M_s\}$. Wählen wir ein Element $X_{ij} \neq 0$ aus einem Peirce-Raum einer s-Zerlegung von $\mathfrak{A}$ mit $i \in M_{s_1}$ und $j \in M_{s_2}$, wobei s_1, s_2 nicht notwendig verschieden sind, dann wird X_{ij} beim Übergang zur normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ ein Element $X_{\tilde{i}\tilde{j}}$ mit $\tilde{i} = r+1-i$ und $\tilde{j} = r+1-j$ zugeordnet, d.h. $\tilde{i} \in \tilde{M}_{s_1}$ und $\tilde{j} \in \tilde{M}_{s_2}$.

Satz 11.1.1 *Sei nun $\mathfrak{A}$ eine Algebra wie oben beschrieben, und es gelten die dort getroffenen Vereinbarungen.*
Es sei weiter $j \in \{2, ..., t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt und $b_{jj} = \sum\limits_{l \in M_j} e_{ll}$, wobei

$\{e_{ll}\}$ die Teilmenge eines s-VOS von $\mathfrak{A}$ ist, die zu $\mathfrak{A}^0_{jj}$ gehört.
Falls $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1}$ die direkte Summe von k_j reellen irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{A}^0_{jj}$ ist und $f_j := min\{k_j, r_j\}$, dann gibt es für alle l mit $R_{j-1} < l \leq R_{j-1} + f_j$ ein Element $0 \neq X_{l1} \in e_{ll}\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \subset \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1}$, so daß für alle $R_{j-1} < n < l \leq R_{j-1} + f_j$ gilt:

1.
$$2A_{e_{11}}(X_{l1})X_{n1} = 0,$$
mit $0 \neq X_{n1} \in e_{nn}\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$.
Es existieren f_j viele von Null verschiedene Elemente $X_{i_{f_j}1}, ..., X_{i_1 1}$ mit $i_{f_j} < ... < i_1$ und $\{i_s\}_{s=1}^{f_j} \subset M_j$, die diese Gleichung paarweise erfüllen.

2. *Für jedes $s \in \{1, ..., f_j\}$ sei $X_{\tilde{i_s}r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{\tilde{i_s}} + \alpha_r)}$ das via der Identifizierung (8.3.I) zugeordnete Element von $X_{i_s 1}$. Dann erfüllen die Elemente $\{X_{\tilde{i_s}r}\}_{s=1}^{f_j}$ mit $\tilde{i_1} < ... < \tilde{i_{f_j}}$ $\forall \tilde{i_l} < \tilde{i_n}$ folgende Identitäten:*
$$[JX_{\tilde{i_l}r}, X_{\tilde{i_n}r}] = 0\ .$$

Bemerkung:

(11.1.α) Die einfachen formal-reellen Jordan-Algebren $\mathfrak{A}^0_{jj}$ des Satzes 11.1.1 sind nicht notwendig alle gleich.

(11.1.β) Von sämtlichen voranstehenden Festlegungen werden wir nun ständig Gebrauch machen. Insbesondere werden wir auf das Diagramm (11.1.a) immer wieder Bezug nehmen.

Beweis von Satz 11.1.1:
1. Zur Vereinfachung setzen wir $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1j}$ und $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}^0_{jj}$, dann betrachten wir das folgende Diagramm:
$$\left(\begin{array}{c|c} e_{11} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right).$$

Seien nun für $n < l$ mit $l, n \in M_j$, $0 \neq X_{l1} \in e_{ll}\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ und $0 \neq X_{n1} \in e_{nn}\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ vorerst beliebig, aber fest gewählt. Es gilt $2A_{e_{11}}(X_{l1})X_{n1} \subset \mathfrak{A}^0_{ln} \subset \mathfrak{A}^0$ ($\mathfrak{A}^0_{ln}$ ist ein Peirce-Raum der s-Zerlegung von $\mathfrak{A}^0$ via $\{e_{ll}\}$), somit erhalten wir für ein beliebiges $0 \neq Y_{ln} \in \mathfrak{A}^0_{ln}$:
$$\begin{aligned} \sigma(2A_{e_{11}}(X_{l1})X_{n1}, Y_{ln}) &= 2\sigma(X_{1n}, A_{e_{ll}}(X_{l1})Y_{ln}) \\ &= 2\sigma(X_{n1}, \underbrace{(e_{ll}X_{l1})}_{\frac{1}{2}X_{l1}}Y_{ln} - \underbrace{e_{ll}(X_{l1}Y_{ln})}_{=0} + X_{1l}\underbrace{(e_{ll}Y_{ln})}_{\frac{1}{2}Y_{ln}}) \\ &= 2\sigma(X_{n1}, Y_{ln}X_{l1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dabei folgt die erste Gleichheit aus Lemma 1.7 in [$\mathcal{DO}$74] S.5 (s. auch [$\mathcal{DO}$75] Folgerung 1.2) und die zweite Gleichung nach Definition der Mutation (s. Definition 3.1.2). Das Produkt von X_{1l} mit Y_{ln} liegt in $\mathfrak{A}_{1n}^{\frac{1}{2}}$ und die Elemente daraus ergeben bei der Multiplikation mit e_{ll} Null, da $n, 1 \neq l$ gilt.
Wenn wir nun X_{n1} und X_{l1} in orthogonalen irreduziblen Darstellungsräumen wählen, dann gilt die letzte Gleichheit.
Weil $f_j \leq k_j$ gilt, können wir $X_{i_{f_j}1}, ..., X_{i_1 1}$ mit $R_{j-1} < i_{f_j} < ... < i_2 < i_1 = R_{j-1} + f_j$ in orthogonalen irreduziblen Darstellungsräumen (Darstellung durch selbstadjungierte Endomorphismen) wählen, die paarweise obige Gleichungen erfüllen.

2. Diese Behauptung folgt unter Ausnutzung von Vinberg's Zugang (s. [$\mathcal{VI}$60a] u. [$\mathcal{VI}$60b]) zu den homogenen regulären Kegeln. Wir erhalten die nachfolgenden Gleichungen für die, wie zu Beginn des Beweises gewählten Elemente, wobei wir die dabei verwendete Notation direkt anschließend erklären werden:

$$\begin{aligned} 2A_{e_{11}}(X_{l1})X_{n1} &= T(X_{l1})X_{n1} \\ &= X_{\tilde{l}r}\Delta X_{\tilde{n}r} \\ &= [JX_{\tilde{l}r}, X_{\tilde{n}r}]. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt aus [$\mathcal{DO}$79b] Theorem 5.1. In der zweiten Gleichung findet der Übergang zu einer normalen J-Algebra statt. Dadurch ändern sich die Indizes: Aus dem Index 1 wird, da der Rang r ist, der Index r, und $\tilde{l}$ bzw. $\tilde{n}$ bezeichnen die Werte, die den Indizes l bzw. n bei diesem Übergang zugeordnet werden. Wenn auf der Algebrenseite $\mathfrak{A}$ für zwei Indizes $p < m$ gilt, so ist klar, daß $\tilde{m} < \tilde{p}$ für die zugeordneten Indizes in der normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ folgt, da $\tilde{m} = r + 1 - m$ und $\tilde{p} = r + 1 - p$ gilt. T bzw. Δ sind nur unterschiedliche Bezeichnungen für die gleiche Multiplikation, wie sie in [$\mathcal{DO}$79b] bzw. [$\mathcal{DAMI}$83] benutzt werden. Die zweite Gleichung folgt also durch Beachtung der sich verändernden Indizierung und des Notationsabgleichs. Die letzte Gleichheit folgt mit [$\mathcal{DAMI}$83] S.536.
Die den $X_{i_{f_j}1}, ..., X_{i_1 1}$ aus 1. entsprechenden Elemente $X_{\tilde{i}_{f_j}r}, ..., X_{\tilde{i}_1 r}$ erfüllen schließlich die geforderten Bedingungen. □

Bemerkung:

(11.1.γ) Es wird sich zeigen, daß es für uns ausreichend sein wird, jeweils f_i viele Elemente zu wählen, die miteinander kommutieren. Natürlich kann k_i des Satzes 11.1.1 sehr viel größer sein als der Rang r_i von $\mathfrak{A}_{ii}^0$.

Satz 11.1.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles homogenes Siegelgebiet vom Rang r mit n.p.h.B.. Die zugehörige Algebra $\mathfrak{A}$ sei vom q=2-Typ und es gilt $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$; $\mathfrak{A}^0$ habe t-Faktoren mit $t \geq 1$.*

Dann gilt $$\sum_{j=2}^{t+1}\sum_{l=1}^{f_j} n_{i_l} \le n_r.$$

Dabei summieren wir in der äußeren Summe über die t einfachen Summanden von $\mathfrak{A}^0$ (s. (11.1.a)) und in der inneren Summation über f_i viele Einsteinkoeffizienten (s. Satz 11.1.1), die ihrem Index entsprechend zu $\mathfrak{A}^0_{ii}$ gehören.

Beweis:
Zu $\mathfrak{A}$ gehört das Diagramm (11.1.a), in dem aufgrund der Irreduzibilität von $\mathcal{S}$, $\forall j\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1} \neq 0$ gilt.
Es sei nun $j \in \{2, ..., t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt. Nach der Identifizierung (8.3.I) wird $\mathfrak{A}^1_{11} \leftrightarrow \mathfrak{n}_{\alpha_r} \cong \mathbb{R}$ zugeordnet, und nach Satz 11.1.1 (wir lassen $\sim$ über den Indizes weg) finden wir dann f_j viele Elemente $X_{i_l r} \neq 0$ mit $1 \le l \le f_j$ und $i_1 < i_2 < ... < i_{f_j} < r$ in entsprechenden, dem Raum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1} \neq 0$ zugeordneten Wurzelräumen, d.h. $X_{i_l r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{i_l}+\alpha_r)}$ mit den Kommutatorrelationen

(11.1.b) $$[JX_{i_s r}, X_{i_m r}] = 0 \text{ für alle } i_s < i_m.$$

Wir definieren diese Menge von Elementen als $K_j := \{X_{i_l r}\}_{l=1}^{f_j}$. Aus Lemma 9.3.1 folgt somit, daß gilt:
$$\textstyle\sum_{l=1}^{f_j} n_{i_l} \le n_r.$$

Sei nun $s, j \in \{2, ..., t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt mit $s \neq j$, o.E. sei $s < j$. Dann gilt $K_s = \{X_{i_l r}\}_{l=1}^{f_s}$ bzw. $K_j = \{X_{j_m r}\}_{m=1}^{f_j}$, deren Elemente jeweils $(11.1.b)$ erfüllen.
Für alle $X \in \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{s1}$ und $Y \in \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1}$ ist $2A_{e_{11}}(X)Y \in \mathfrak{A}^0_{sj} = 0$ und somit verschwinden die Kommutatoren $[JX_{lr}, X_{mr}]$ für alle $l \in \tilde{M}_s$ und für alle $m \in \tilde{M}_j$, also insbesondere auch für die Elemente aus K_s und K_j.
Aufgrund der Kommutatoreigenschaften aller Elemente aus $K = \cup_{j=2}^{t+1} K_j$ kann man Lemma 9.3.1 für all diese Elemente anwenden. Folglich liefert Lemma 9.3.1 eine für nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung des Gebiets $\mathcal{S}$ notwendige Bedingung. Es gilt:
$$\sum_{j=2}^{t+1}\sum_{l=1}^{f_j} n_{i_l} \le n_r,$$
und dies ist gleichzeitig die Behauptung. □

Korollar 11.1.3 *Seien $\mathcal{S}$ und alle Bezeichnungen wie in Satz 11.1.2 und $j \in \{2, ..., t+1\}$, dann gilt*

a.) *$\forall\, o \in \tilde{M}_j$ sind die Dimensionen m_o der Wurzelräume $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_o}$ bzw. die Einsteinkoeffizienten n_o jeweils gleich.*

b.) $$\textstyle\sum_{j=2}^{t+1} f_j N_j \le n_r,$$

wobei N_j in (11.1.e) definiert wird.

Beweis:
a.) Sei wieder $j \in \{2, ..., t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt. Für die Einsteinkoeffizienten n_s, n_l von je zwei beliebigen Indizes $s, l \in \tilde{M}_j$ mit $s < l$ gilt:

(11.1.c) $$n_l \leq n_s.$$

Dies folgt aus der Definition der Einsteinkoeffizienten (s. Definition 8.2.2) und da aufgrund des Satzes 4.1.2 die Dimensionen der Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^0_{jj}$ gehören, alle gleich sind; zudem folgt dies mit Lemma 9.1.3, weil dadurch die Dimensionen der Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j1}$ zugeordnet werden, alle gleich sind und schließlich, da $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_s+\alpha_l)} \neq 0$ gilt (wegen Satz 4.1.2), mit Proposition 9.1.1, welche die entsprechende Ungleichung für die Dimensionen der Räume 1. Art liefert, nämlich $m_l \leq m_s$.
Andererseits liefert, da $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat und $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_s+\alpha_l)} \neq 0$ gilt, Lemma 9.2.2

(11.1.d) $$n_s \leq n_l.$$

Aus (11.1.c-d) folgt insgesamt $n_s = n_l$ für die Einsteinkoeffizienten, also auch $m_s = m_l$ für die Dimensionen der Räume 1. Art. Somit sind die Einsteinkoeffizienten n_o bzw. die Dimensionen m_o der $\mathfrak{A}^0_{jj}$ zugeordneten Räume 1. Art $\forall o \in \tilde{M}_j$ jeweils gleich, was a.) zeigt.
b.) Die Einsteinkoeffizienten n_o mit $o \in \tilde{M}_j$ sind alle gleich und deshalb können wir für jedes $j \in \{2, ..., t+1\}$ eine natürliche Zahl N_j definieren:

(11.1.e) $$N_j := n_s \text{ mit } s \in \tilde{M}_j.$$

Aus Satz 11.1.2 erhalten wir als notwendige Bedingungen für n.p.h.B. des Gebiets $\mathcal{S}$, daß
$$\textstyle\sum_{j=2}^{t+1} f_j N_j \leq n_r$$
gilt und dies ist die Behauptung in b.). □

Bemerkung:
(11.1.$\boldsymbol{\delta}$) Mit leicht variierten Voraussetzungen zeigen wir einen Teil der Aussage a.) des Korollars 11.1.3 auch in Satz 11.2.1.

11.2 Wichtigster Spezialfall

Beim Beweis der Krümmungsvermutung reduziert sich in manchen Fällen die Betrachtung auf zu (11.1.a) analoge Diagramme. Deshalb ist dieser Spezialfall vom q=2-Typ von besonderer Bedeutung für uns, und wir untersuchen in diesem Abschnitt die dazugehörigen Siegelgebiete bzgl. ihrer holomorphen Bischnittkrümmung. Zur Untersuchung benötigen wir sowohl die Klassifikation der IQS als auch die schon bekannten Resultate von Tsuji, die wir in Abschnitt 9.2 darlegten.

In unserem induktiven Beweis des Hauptergebnisses (s. Satz 12.2.1) gilt, daß die Faserräume der Siegel-III-Realisierungen via Satz 10.1.1 quasisymmetrisch sind. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, diese Situation für den Spezialfall zu betrachten, den wir in Abschnitt 11.1 zu diskutieren begonnen haben. Wir erhalten:

Satz 11.2.1 *Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra vom q=2-Typ mit $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}^0$ habe t-Faktoren mit $t \geq 1$. $\mathcal{S}$ sei ein dazugehöriges Siegelgebiet. Ist in der Siegel-III-Realisierung von $\mathcal{S}$ bzgl. des primitiven Idempotents e_{11} der Faserraum $\mathcal{S}_0$ quasisymmetrisch, dann haben die Räume 1. Art, die in dem Diagramm von $\mathfrak{A}$ (s. (11.1.a)) einem einfachen Summanden von $\mathfrak{A}^0$ zugeordnet werden, alle die gleiche Dimension.*

Beweis:
Ist $\mathcal{S}$ ein Tubengebiet, so existieren keine Räume 1. Art (s. Korollar 6.5.1), und die Behauptung folgt aus Lemma 9.1.3, da die Räume 1. Art der Faser Räumen 2. Art von $\mathcal{S}$ entsprechen.
Sei $\mathcal{S}$ kein Tubengebiet und $\{e_{ii}\}_{i=1}^{r}$ ein s-*VOS* von $\mathfrak{A}$. Wir realisieren via Satz 10.1.1 $\mathcal{S}$ als Siegel-III-Gebiet für das einzige primitive Idempotent e_{11} von $\mathfrak{A}^1$ und betrachten den Faserraum $\mathcal{S}_0$ dieser Realisierung an der Stelle $(ie_{11}, 0)$ (s. Satz 10.1.2). $\mathcal{S}_0$ ist nach Voraussetzung quasisymmetrisch und entspricht sogar einem Produkt von t irreduziblen quasisymmetrischen Räumen (s. dazu (11.2.α)).
Seien $(U, V, F, \sigma, \rho, \varphi)$ bzw. $(W, V_0, L^1, \sigma_0, \rho_0, \varphi_0)$ die zu $\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{S}_0$ gehörigen Daten (s. Definition 6.2.3, (7.1.a) u. (7.1.b)). Es gilt $W = (\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}(e_{11}))^{\mathbb{C}} \times U_0(e_{11})$ (s. Abschnitt 10.1), $U = U_0(e_{11}) + U_1(e_{11})$ und wegen Proposition 10.2.2

$$\sigma_0 = \sigma|_{\mathfrak{A}^0(e_{11})},$$

und es folgt $\forall u_0, w_0 \in U_0(e_{11})$:

$$\begin{aligned}
\rho_0(u_0, w_0) &= \sigma_0(L^1_{(ie_{11},0)}(0, u_0; 0, w_0), e - e_{11}) \\
&= \sigma_0(F(u_0, w_0), e - e_{11}) \\
&= \sigma(F(u_0, w_0), e - e_{11}) \\
&= \rho(\varphi(e - e_{11})u_0, w_0) \\
&= \rho(u_0, w_0).
\end{aligned}$$

Demzufolge erhalten wir

$$\rho_0\Big|_{U_0(e_{11}) \times U_0(e_{11})} = \rho\Big|_{U_0(e_{11}) \times U_0(e_{11})}.$$

Des weiteren folgt $\forall x \in \mathfrak{A}^0(e_{11})$ und $\forall u_0, w_0 \in U_0(e_{11})$

$$\begin{aligned}\sigma_0(L^1_{(ie_{11},0)}(0,u_0;0,w_0),x) &= \sigma_0(F(u_0,w_0),x)\\ &= \sigma(F(u_0,w_0),x),\end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar ergibt, daß

$$\rho_0(\varphi_0(x)u_0,w_0) = \rho(\varphi(x)u_0,w_0)$$

gilt, somit also

$$\varphi_0(x)\Big|_{U_0(e_{11})} = \varphi(x)\Big|_{U_0(e_{11})}$$

folgt. Für alle $i \in \{2,...,r\}$ impliziert dies trivialerweise

$$(a) \qquad dim(\varphi_0(e_{ii})U_0(e_{11})) = dim(\varphi(e_{ii})U_0(e_{11})).$$

Sei nun $i \in \{2,...,t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt und die Menge $\{e_{jj}\}$ bestehe aus r_i primitiven Idempotenten und bilde ein s-VOS von $\mathfrak{A}^0_{ii}$. Sei $\mathfrak{s}$ eine zu $\mathcal{S}$ gehörende normale J-Algebra, dann erhalten wir (s. auch (a)):

$$\begin{aligned}dim\mathfrak{n}^0_{\frac{1}{2}(\alpha_{r+1-j})} &= dim(\varphi_0(e_{jj})W)\\ &= dim(\varphi_0(e_{jj})\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}(e_{11})^{\mathbb{C}}) + dim(\varphi_0(e_{jj})U_0)\\ &= dim\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{r+1-j}+\alpha_r)} + dim\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_{r+1-j}}.\end{aligned}$$

Die Dimensionen der Räume 1. Art, die zu $\mathcal{S}_0$ gehören, sind aufgrund des Satzes 7.2.1 konstant. Somit ist die linke Seite der Gleichung konstant.
Die rechte Seite ist eine Summe von Wurzelräumen, die zu $\mathfrak{s}$ gehören. Da die Räume 2. Art in $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i1}$ alle die gleiche Dimension $c^{\frac{1}{2}}$ haben (s. Lemma 9.1.3), folgt die Konstanz der Räume 1. Art, die $\mathfrak{A}^0_{ii}$ zugeordnet werden, in $\mathfrak{s}$. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung:
(11.2.α) $(\mathcal{S}_0, g_B)$ des Satzes 11.2.1 ist isometrisch zu $(\mathcal{S}_2, g_B^2) \times ... \times (\mathcal{S}_{t+1}, g_B^{t+1})$, wobei $g_B^i = g_B|_{\mathcal{S}_i}$ gilt, und g_B^i ist jeweils die Bergmannmetrik von $\mathcal{S}_i$ für alle i (s. [$\mathcal{KO}$59] u. Satz 6.6.3). Zu $\mathcal{S}_i$ gehören die Daten $(W_i, V_i \cong \mathfrak{A}^0_{ii}, F_i = L^1_{(ie_{11},0)}|_{W_i\times W_i}, \sigma_i, \rho_i, \varphi_i)$, wobei σ_i (bzw. ρ_i) die Einschränkung von σ_0 auf V_i (bzw. ρ_0 auf W_i) ist. $W_i = \varphi_0(b_{ii})W$ und b_{ii} ist das Einselement von $\mathfrak{A}^0_{ii}$. Die Räume W_i sind bzgl. ρ_0 (vgl. Lemma 3.9 [$\mathcal{DO}$79e]) und bzgl. $L^1_{(ie_{11},0)}$ alle orthogonal zueinander, was direkt aus der Definition von L^1 (s. (10.1.j)) folgt. Es gilt $\varphi_0 = \bigoplus_{i=2}^{t+1} \varphi_i$, wobei φ_i die Darstellung von $\mathfrak{A}^0_{ii}$ in $Sym(W_i, \rho_i)$ ist.

Satz 11.2.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r mit n.p.h.B., so daß für die dazugehörige Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ gilt:*
$\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$ *und* $\mathfrak{A}^0$ *ist eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Rang* r_0.

Es existiert kein homogenes irreduzibles Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung, zu dem eine solche Algebra $\mathfrak{A}$ gehört.

Bemerkung:

(11.2.β) Es gilt $\mathfrak{A}_0(e_{11}) = \mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}_0(e_{11})$ entspricht der zu dem Faserraum $\mathcal{S}_0$ gehörenden Algebra, wenn wir $\mathcal{S}$ als Siegel-III-Gebiet bezüglich e_{11} realisieren (s. Satz 10.1.1). Ist das zugehörige Siegelgebiet $\mathcal{S}_0$ der Faser quasisymmetrisch, dann ist $(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}})^{\mathbb{C}}$ ein komplexer Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$ und die Darstellung ist φ_0. Dies ist eine direkte Folge aus der Definition 7.1.3.
Es handelt sich hierbei um Bedingungen, die genau bei den Fällen erfüllt sind, an denen wir im 12. Kapitel interessiert sein werden.
Wir benutzen fortwährend in dem sich anschließenden Beweis des Satzes 11.2.2 die Arbeiten [$\mathcal{DADO}$88] (Abschnitt 3), [$\mathcal{DO}$79a] (II §2), [$\mathcal{LAMI}$89] S.31-33 und die Definition 8.2.2.

Beweis des Satzes 11.2.2:
Sei nun $\mathcal{S}$ doch ein irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r mit n.p.h.B. und $\mathfrak{A}$ die zugehörige Algebra von der speziellen Gestalt, wie sie oben beschrieben wurde.
Der Beweis des Satzes erfolgt, indem wir alle relevanten Algebren $\mathfrak{A}$ betrachten, d.h. solche, für die $\mathfrak{A}^0$ einer einfachen formal-reellen Jordan-Algebra des Satzes 4.1.2 entspricht. Dadurch ergeben sich folgende, verschiedene Fälle, wobei mit r_0 der Rang von $\mathfrak{A}^0$ bezeichnet wird:

Fall	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
$\mathfrak{A}^0$	$\mathbb{R}$	$\mathcal{H}(r_0, \mathbb{R})$	$\mathcal{H}(r_0, \mathbb{C})$	$\mathcal{H}(r_0, \mathbb{H})$	$[\mathcal{X}, \mu, e]$	$\mathcal{H}(r_0, \mathbb{O})$
r_0	1	≥ 3	≥ 3	≥ 3	2	3

.

Gemeinsamkeiten aller Fälle:
Die Räume 2. Art, die beim Übergang zu einer normalen J-Algebra $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathfrak{A}^0$ zugeordnet werden, haben in jedem einzelnen Fall *I-VI* eine konstante reelle Dimension (s. Korollar 11.1.3 und Satz 4.1.2), die wir mit $c_{\frac{1}{2}}$ bzw. c_0 bezeichnen. Es gilt immer $r = r_0 + 1$ und da $\mathcal{S}$ irreduzibel ist, gilt $n_{r-1,r} \neq 0$, womit aus Proposition 9.1.1 $m_{r_0} = m_{r-1} \geq m_r$ folgt, und falls zusätzlich $r_0 \geq 2$ gilt, folgt auch $c_{\frac{1}{2}} = n_{r-2,r} \geq n_{r-2,r-1} = c_0$.
$\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist ein reeller Darstellungsraum der reellen Algebra $\mathfrak{A}^0$ (s. auch Abschnitt 10.4), und die Feinstruktur dieses Darstellungsraumes wird nun für jeden einzelnen Fall von Bedeutung sein.

Fall ***I*:**

Sei $\mathfrak{A}^0 \cong \mathbb{R}$, folglich existiert nur ein Raum 2. Art, der zu einem Peirce-Raum bzgl. eines s-*VOS* in $\mathfrak{A}$ gehört und dieser Peirce-Raum entspricht $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$. Die Dimension dieses Raumes $c_{\frac{1}{2}} = n_{12}$ entspricht der Anzahl k der irreduziblen reellen

Darstellungen, in die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \cong Mat(1 \times k; \mathbb{R})$ als reeller Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$ zerfällt. Dem Diagramm von $\mathfrak{A}$ ordnen wir

$$\left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_2} & \mathfrak{n}_{\alpha_2} & \\ \hline \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_1} & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)} & \mathfrak{n}_{\alpha_1} \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|cc} m_2 & 1 & \\ \hline m_1 & n_{12} & 1 \end{array}\right)$$

zu. Aus Lemma 9.2.2 (oder Korollar 11.1.3) erhalten wir, da $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat, irreduzibel ist und somit $n_{12} \neq 0$ gilt, daß

$$\begin{array}{rcl} n_1 = 1 + \frac{1}{2}c_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}m_1 & \leq & 1 + \frac{1}{2}c_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}m_2 = n_2 \\ \Leftrightarrow\ m_1 & \leq & m_2 \end{array}$$

gilt. Aus $n_{12} \neq 0$ folgt außerdem aufgrund der Proposition 9.1.1 $m_1 \geq m_2$, also folgt insgesamt $m_1 = m_2$. Nun liefert Satz 7.2.1, daß q=1 im Widerspruch zur Voraussetzung gilt, da q=2 sein soll.
Die Ungleichung $n_1 \leq n_2$ ist äquivalent zu

(11.2.a) $$1 + \tfrac{1}{4}m_1 \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_2,$$

die wir in einer ähnlichen Form in Satz 11.2.5 benötigen werden und daher geben wir hier (11.2.a) gesondert an.

*Die Fälle **II-IV**:*
Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. $\mathfrak{A}^0 = \mathcal{H}(r_0, \mathbb{K})$ ist einfach, deshalb ist bis auf Äquivalenz $\mathbb{K}^{r_0}$ der einzige irreduzible reelle Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$ (s. dazu z.B. [$\mathcal{LAMI}$89] Theorem 5.6, S.31). Der Darstellungsraum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist vollständig reduzibel, somit gilt $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \cong Mat(r_0 \times k; \mathbb{K})$, wobei k der Zahl der irreduziblen Darstellungsräume entspricht, in die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ zerfällt.
Nun gilt in den verschiedenen Fällen *II-IV* $c_{\frac{1}{2}} = s_{\mathbb{K}}k$, $c_0 = s_{\mathbb{K}}$ und $f = min\{r_0, k\}$, wobei $s_{\mathbb{R}} = 1$, $s_{\mathbb{C}} = 2$ und $s_{\mathbb{H}} = 4$ gilt. Mit diesen Festlegungen läßt sich die für n.p.h.B. notwendige Bedingung des Korollars 11.1.3 b.), nämlich

$$f(1 + \tfrac{1}{2}((r_0 - 1)c_0 + c_{\frac{1}{2}}) + \tfrac{1}{4}m_{r_0}) \leq 1 + \tfrac{1}{2}r_0 c_{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{4}m_r$$

als

$$f(1 + \tfrac{1}{2}(r_0 - 1)s_{\mathbb{K}} + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}k + \tfrac{1}{4}m_{r_0}) \leq 1 + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}r_0 k + \tfrac{1}{4}m_r$$

schreiben. Diese Ungleichung ist äquivalent zu:

(11.2.b) $$f(1 + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}r_0 + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}k - \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}} + \tfrac{1}{4}m_{r_0}) \leq 1 + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}r_0 k + \tfrac{1}{4}m_r.$$

Nun ist $f = k$ oder $f = r_0$ und man sieht leicht, daß die linke Seite der Ungleichung (11.2.b) symmetrisch in k und r_0 ist. Deshalb resultiert daraus die

Bedingung:

(11.2.c) $$f + \tfrac{1}{2}s_{\mathbb{K}}(f^2 - f) + \tfrac{1}{4}fm_{r_0} \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_r.$$

Da wegen Proposition 9.1.1 $m_{r_0} \geq m_r$ gilt, kann die Ungleichung (11.2.c) für $f > 1$ nicht erfüllt werden, d.h. es existieren Richtungen mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung auf $\mathcal{S}$.
Die Ungleichung (11.2.c) ist also dann und nur dann erfüllt, falls $f = 1$ gilt. Ist aber $f = 1$ erfüllt, so folgt daraus, daß $m_{r_0} \leq m_r$ gilt und da $r_0 \geq 3$, folgt auch $k = f = 1$ und somit $c_0 = s_{\mathbb{K}} = c_{\frac{1}{2}}$. Proposition 9.1.1 liefert $m_{r_0} \geq m_r$, also folgt insgesamt $m_{r_0} = m_r$. Wegen Korollar 11.1.3 wissen wir, daß auch die m_i für $i \in \{1, ..., r_0\}$ alle gleich sind. Somit haben die Räume 1. Art alle die gleiche Dimension und auch die Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}$ beim Übergang zu einer normalen J-Algebra zugeordnet werden, haben alle die gleiche Dimension c_0. Mit Satz 7.2.1 folgt, daß $\mathcal{S}$ quasisymmetrisch ist, also q=1 gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung q=2.

Fall ***V****:*

Gilt $\mathfrak{A}^0 \cong [\mathcal{X}, \mu, e]$ mit $n := dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X} \geq 3$, dann hat $\mathfrak{A}^0$ den Rang 2 und $\mathfrak{A}$ hat folglich den Rang 3. Nach Theorem 3 von Tsuji in [$\mathcal{TS}$91] (s. auch Satz 9.2.4) hat daher das zugehörige Siegelgebiet genau dann nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung, wenn es quasisymmetrisch ist, also gilt q=1, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall ***VI****:*

Der Fall, daß $\mathfrak{A}^0 \cong Herm(3, \mathbb{O})$, tritt nicht auf, da keine nicht trivialen Darstellungen (vgl. auch [$\mathcal{JA}$] S.63) von $Herm(3, \mathbb{O})$ existieren. Es gilt $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} = 0$, und ein entsprechender symmetrischer Raum spaltet bei einem dazugehörigen Siegelgebiet ab. Ein solches Siegelgebiet ist folglich nicht irreduzibel, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir haben somit für jede nach Satz 4.1.2 mögliche Wahl von $\mathfrak{A}^0$ als einfache formal-reelle Jordan-Algebra die Aussage von Satz 11.2.2 gezeigt und folglich insgesamt die Behauptung. □

Vorbereitungen für Satz 11.2.5:

Wir betrachten den Fall V des Satzes 11.2.2 nun im Detail und zeigen ohne die Verwendung des Satzes 9.2.4, daß ein dazugehöriges homogenes Siegelgebiet mit n.p.h.B. nicht existiert. Darüber hinaus analysieren wir im Beweis des Satzes 11.2.3 die Feinstruktur des Darstellungsraums $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ (s. auch Abschnitt 10.4) für diesen Fall.
Anschließend stellen wir nützliche Ungleichungen für den Satz 11.2.5 zusammen,

in dem wir die Fälle betrachten, bei denen $\mathfrak{A}^0$ nicht einfach ist. Die linken Seiten dieser Ungleichungen werden alle von Bedeutung sein.

Satz 11.2.3 *Es existiert kein irreduzibles Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B., so daß die dazugehörige Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ ist, wobei $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}^0 \cong [\mathcal{X}, \mu, e]$ gilt.*

Beweis:
Wir nehmen an, daß ein irreduzibles Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B. existiert, zu dem eine solche spezielle Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ gehört. Es gilt $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \neq 0$, denn $\mathcal{S}$ ist irreduzibel (s. auch Satz 8.4.3).
Wir haben folgende Diagramme auf der Algebren- und normalen J-Algebrenseite (s. Abschnitt 8.3):

(11.2.d)
$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|cc} \mathfrak{n}_{\alpha_3} & & \\ \hline \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)} & \mathfrak{n}_{\alpha_2} & \\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)} & \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)} & \mathfrak{n}_{\alpha_1} \end{array}\right).$$

Dabei haben die Räume $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3)}$ und $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_3)}$, die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ zugeordnet wurden, die konstante Dimension $c_{\frac{1}{2}}$. Weil $\mathcal{S}$ irreduzibel ist, gilt $c_{\frac{1}{2}} > 0$. Aufgrund des Satzes 9.1.2 bzw. des Lemmas 9.1.3 und der Zuordnung (11.2.d) gilt immer:

(11.2.e)
$$n_{23} = n_{13} = c_{\frac{1}{2}},\ dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}) = n_{23} + n_{13} \text{ und } n_{12} = dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}) - 2.$$

Da $n_{23} \neq 0$ gilt, liefert Proposition 9.1.1 außerdem die Ungleichung

(11.2.f)
$$n_{13} \geq n_{12}.$$

$\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist ein reeller Darstellungsraum von $\mathfrak{A}^0$. Die Dimension von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gibt uns Auskunft darüber, wie groß $c_{\frac{1}{2}}$ ist. Der Darstellungsraum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ ist vollständig reduzibel, daher sind wir an den irreduziblen reellen Darstellungen von $\mathfrak{A}^0$ interessiert (s. auch Abschnitt 10.4).

Dazu machen wir folgende Bemerkungen:

Die Signatur von μ ist gleich $(1, dim_{\mathbb{R}}X - 1) =: (1, p)$ (s. auch Satz 4.1.2). Man setzt $\mathcal{X}' := \{x \in \mathcal{X} | \mu(x, e) = 0\}$ und sieht, daß μ auf $\mathcal{X}'$ negativ-definit ist. Weiter setzt man $\mu' := -\mu|_{\mathcal{X}'}$ und entnimmt aus [$\mathcal{DO}$79a] S.90, daß wir die Darstellungen der reellen Clifford-Algebra $Cl_{p,0}(\mathcal{X}', \mu')$ untersuchen müssen, um etwas über die Darstellungen von $\mathfrak{A}^0$ zu erfahren. So entsprechen die irreduziblen reellen bzw. komplexen Darstellungen von $\mathfrak{A}^0$ den irreduziblen reellen bzw. komplexen Darstellungen von $Cl_{p,0}(\mathcal{X}', \mu) =: Cl_p$ (s. Abschnitt 10.4).
Im folgenden sind wir an den reellen Darstellungen interessiert. Wegen Proposition 5.4 in [$\mathcal{LAMI}$89] S.31 gilt, daß jede reelle Darstellung von Cl_p die direkte

Summe reeller irreduzibler Darstellungen ist. Die reellen irreduziblen Darstellungen der Clifford-Algebren Cl_p sind bis auf Äquivalenz alle bekannt und wir entnehmen das von uns dazu Benötigte aus [$\mathcal{LAMI}$89].
Bezeichnen wir mit k_p die Anzahl der reellen irreduziblen Darstellungen von Cl_p und mit d_p deren reelle Dimension, so gilt

(11.2.g)
$$k_p = \begin{cases} 2, & \text{wenn } p+1 \equiv 0(\text{mod} 4) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

(11.2.h)
$$d_{a+8b} = 2^{4b} d_a \text{ mit } b \geq 1,\ a \geq 0 \text{ und mit}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d_i	1	2	4	4	8	8	8	8	16

(s. dazu z.B. [$\mathcal{LAMI}$89] Theorem 5.7-8, S.32-33).
Bei der Analyse der reellen Darstellungen von Cl_p bzw. $\mathfrak{A}^0$ müssen wir zwischen gerader und ungerader reeller Dimension n von $\mathcal{X}$ differenzieren.

V.1 *Die reelle Dimension n von $\mathcal{X}$ ist ungerade:*
Demnach gilt $n = 2l + 1$ mit $l \geq 1$ und es folgt $p = 2l$. Es gibt bis auf Äquivalenz nur einen reellen irreduziblen Darstellungsraum (s. (11.2.g)). Für die reelle Dimension dieses Raumes ergibt sich aus (11.2.h):

(11.2.i)
$$d_{2l} = \begin{cases} 2^{l+1}, & \text{falls } l \equiv 1(mod 4) \text{ oder } l \equiv 2(mod 4) \\ 2^l, & \text{falls } l \equiv 0(mod 4) \text{ oder } l \equiv 3(mod 4). \end{cases}$$

Dies soll nun gezeigt werden. Gilt $l \equiv i(mod 4)$ mit $i = 1, 2$, dann folgt $l = 4s + i$ mit $0 \leq s \in \mathbb{N}$ und aus (11.2.h) folgt

(11.2.i1)
$$d_{2l} = d_{8s+2i} = 2^{4s} d_{2i} = 2^{4s} 2^{i+1} = 2^{l+1}.$$

Gilt aber $l \equiv j(mod 4)$ mit $j = 0, 3$, so folgt $l = 4s + j$ mit $0 \leq s \in \mathbb{N}$ und aus (11.2.h) folgt nun

(11.2.i2)
$$d_{2l} = d_{8s+2j} = 2^{4s} d_{2j} = 2^{4s} 2^j = 2^l.$$

Aus (11.2.i1) und (11.2.i2) erhält man (11.2.i).

Wir erhalten die folgenden *Fallunterscheidungen* ***V.1a-b*** von ***V.1***:

V.1a *Die reelle Dimension des irreduziblen Darstellungsraumes ist 2^{l+1}:*
Nun gilt, daß $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ die k-fache Summe des irreduziblen Darstellungsraumes ist,

deshalb erhalten wir:

(11.2.j) $$dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}) = k2^{l+1}, \text{ mit } k \geq 1.$$

Daraus folgt mit (11.2.e), daß $n_{13} = k2^l$ gilt, wobei aus (11.2.e) auch $n_{12} = 2l-1$ folgt. Da $k \geq 1$ und $l \geq 1$ gilt, folgt für alle Werte von k und l $k2^l \geq 2l-1$, was auch wegen (11.2.f) gelten muß, d.h. die Bedingung (11.2.f) schränkt den Wertebereich von k und l nicht ein. Wir erhalten sogar für alle möglichen Werte von l und k, daß

(11.2.k) $$k2^l > 2l-1$$

gilt, wie man leicht sieht. Wir können wegen (11.2.k) Lemma 9.2.3 anwenden, demzufolge gilt

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &\leq n_3 \\ \Leftrightarrow\ 1 + \frac{1}{2}(n_{12}+n_{13}) + \frac{1}{4}m_1 + 1 + \frac{1}{2}(n_{12}+n_{23}) + \frac{1}{4}m_2 &\leq 1 + \frac{1}{2}(n_{13}+n_{23}) + \frac{1}{4}m_3 \\ \Leftrightarrow\ 4 + 4n_{12} + 2m_2 &\leq m_3, \end{aligned}$$

wobei wir Korollar 11.1.3 a.) ausgenutzt haben, das $m_1 = m_2$ liefert.
Da $n_{23} \neq 0$ gilt, liefert Proposition 9.1.1 $m_2 \geq m_3$, also wird die Ungleichung nie erfüllt, d.h. $\mathcal{S}$ hat positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen im Widerspruch zur Voraussetzung.
Wir erhalten die zu obiger Ungleichung äquivalente Bedingung

(11.2.l) $$2 + n_{12} + \tfrac{1}{2}m_2 \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_3.$$

Die linke Seite der Ungleichung (11.2.l) werden wir in einer analogen Form in Satz 11.2.5 benutzen. In dem von uns betrachteten Fall ist (11.2.l) äquivalent zu

(11.2.m) $$1 + 2l + \tfrac{1}{2}m_2 \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_3.$$

V.1b *Die reelle Dimension des irreduziblen Darstellungsraumes ist* 2^l*:*
Analog zum Fall *V.1a* gilt $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}) = k2^l$, mit $k \geq 1$ (s. (11.2.j)) und $l \geq 3$ wegen (11.2.i). Unter Verwendung von (11.2.e) folgt $n_{13} = k2^{l-1}$ und $n_{12} = 2l-1$. Aus (11.2.f) folgt, daß $k2^{l-1} \geq 2l-1$ gilt. Diese Bedingung schränkt die Werte von k ggf. ein, was auch aus folgender Tabelle entnommen werden kann:

l	2^{l-1}	$2l-1=n_{12}$	k	n_{13}
3	4	5	≥ 2	≥ 4
4	8	7	≥ 1	≥ 8
7	64	13	≥ 1	≥ 64
8	128	15	≥ 1	≥ 128

.

Gilt $l = 3$, dann folgt aus (11.2.f), daß $4k \geq 5$ gilt und somit folgt $k > 1$. Aufgrund der Bedingung (11.2.f) tritt der Fall, daß $l = 3$ und $k = 1$ gilt, nicht auf.

Für $l \geq 4$ und $\forall k \geq 1$ gilt sogar $k2^{l-1} > 2l-1$, so daß wir Lemma 9.2.3 anwenden können und somit resultiert ebenfalls die Ungleichung (11.2.m), die nicht erfüllt ist. Wir erhalten wieder einen Widerspruch zur Voraussetzung, da $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat.

Gilt nun $l = 3$, dann folgt $k \geq 2$ und damit gilt sogar $k2^{l-1} > 2l - 1$, so daß wir wieder Lemma 9.2.3, bzw. Korollar 11.1.3, da $k \geq 2$ und $r_0 = 2$ gilt, anwenden können, und wir erhalten die Ungleichung (11.2.m).
Weil diese nicht erfüllt ist, folgt, daß $\mathcal{S}$ auch positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen besitzt im Widerspruch zur Voraussetzung.

V.2 *Die reelle Dimension n von $\mathcal{X}$ ist gerade:*
Sei nun $n = 2l + 2$, mit $l \geq 1$, dann gilt $dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}' = 2l + 1 = p$. Bzgl. der Anzahl der reellen irreduziblen Darstellungen von Cl_{2l+1} kann man zwei Fälle in Abhängigkeit von l unterscheiden (s. (11.2.g)). Ist l ungerade, dann gibt es zwei nicht äquivalente reelle irreduzible Darstellungen; für ein gerades l existiert nur eine solche Darstellung.
Für die Dimensionen der Darstellungsräume in Abhängigkeit von l gilt:

(11.2.n)
$$d_{2l+1} = \begin{cases} 2^{l+1}, & \text{falls } l \equiv 0(mod4),\ l \equiv 1(mod4), \text{ oder } l \equiv 2(mod4) \\ 2^l, & \text{falls } l \equiv 3(mod4). \end{cases}$$

Dies kann wie folgt gezeigt werden: Gilt $l \equiv i(mod4)$ mit $i = 0,1,2$, so folgt $l = 4s + i$ mit $0 \leq s \in \mathbb{N}$, falls $i = 1$ oder $i = 2$ bzw. $1 \leq s \in \mathbb{N}$, falls $i = 0$ gilt, und aus (11.2.h) folgt

(11.2.n1)
$$d_{2l+1} = d_{8s+2i+1} = 2^{4s}d_{2i+1} = 2^{4s}2^{i+1} = 2^{l+1}.$$

Gilt aber $l \equiv j(mod4)$ mit $j = 3$, dann folgt $l = 4s + j$ mit $0 \leq s \in \mathbb{N}$, und aus (11.2.h) ergibt sich nun

(11.2.n2)
$$d_{2l+1} = d_{8s+2j+1} = 2^{4s}d_{2j+1} = 2^{4s}2^j = 2^l.$$

Aus (11.2.n1) und (11.2.n2) folgt die Gültigkeit von (11.2.n).

Unsere Vorgehensweise entspricht nun der des Falls V.1, und da wir diesen ausführlich behandelt haben, verkürzen wir jetzt die Darstellung. Die Dimension des reellen irreduziblen Darstellungsraumes, die 2^l oder 2^{l+1} sein kann, ist das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der zu betrachtenden Fälle.
In Abhängigkeit davon, welchen Wert l annimmt, erhalten wir die zu (11.2.e,f,j) analogen Gleichungen bzw. Ungleichungen.

Falls l ungerade ist, sind die k reellen irreduziblen Darstellungsräume, in die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ zerfällt, nicht notwendig alle isomorph. Dies ist aber in dem hier betrachteten Zusammenhang irrelevant, da die evtl. verschiedenen reellen irreduziblen Darstellungsräume eines beliebigen, aber fest gewählten, ungeraden l die gleiche Dimension haben.

Wir machen die folgenden *Fallunterscheidungen* ***V.2a-b*** im ***V.2*** Fall:

V.2a *Die reelle Dimension des irreduziblen Darstellungsraumes ist* 2^{l+1}*:*
Es gilt $l \equiv 0, 1, 2(mod4)$ (s. (11.2.n)), $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}) = k2^{l+1}$ mit $k \geq 1$, $n_{13} = k2^l \geq 2l = n_{12}$ (s. (11.2.e,f,j)), und es resultiert die folgende Tabelle:

l	2^l	$n_{12} = 2l$	k	n_{13}
1	2	2	≥ 1	≥ 2
2	4	4	≥ 1	≥ 4
4	16	8	≥ 1	≥ 16
5	32	10	≥ 1	≥ 32

.

Für alle $l \geq 4$ und $\forall\ k \geq 1$ gilt sogar $k2^l > 2l$, und aus Lemma 9.2.3 resultiert (s. auch (11.2.l)):

(11.2.o) $$2 + 2l + \tfrac{1}{2}m_2 \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_3.$$

Die Ungleichung (11.2.o) folgt auch für $l = 1$ oder $l = 2$ und $\forall k \geq 2$ aus Korollar 11.1.3 b.). Da $n_{23} \neq 0$ gilt, liefert Proposition 9.1.1 $m_2 \geq m_3$, deshalb ist (11.2.o) nie erfüllt, was einen Widerspruch zur n.p.h.B. Eigenschaft von $\mathcal{S}$ zur Folge hat. Es gibt Richtungen mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung.

Falls $l = 1$ oder $l = 2$ und $k = 1$ gilt, dann folgt $n_{12} = n_{13} = n_{23}$ (s. auch (11.2.e)), d.h. die Räume 2. Art haben alle die gleiche Dimension. Aus Lemma 9.2.2 (oder Korollar 11.1.3 b.)) resultiert, daß für $i = 1, 2$ gilt

(11.2.p) $$n_i \leq n_3 \ \Leftrightarrow\ 1 + \tfrac{1}{4}m_i \leq 1 + \tfrac{1}{4}m_3.$$

$n_{i3} \neq 0$ und folglich ergibt Proposition 9.1.1, daß $m_i \geq m_3$ gilt. Insgesamt folgt nun $m_i = m_3$, und mit Satz 7.2.1 gilt nun, daß $\mathcal{S}$ quasisymmetrisch ist, d.h. q=1 (s. Satz 7.1.4) im Widerspruch zur Voraussetzung q=2.

V.2b *Die reelle Dimension des irreduziblen Darstellungsraumes ist* 2^l*:*
Nun gilt $l \equiv 3(mod4)$, $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}) = k2^l$ mit $k \geq 1$, $n_{13} = k2^{l-1} \geq 2l = n_{12}$ und wir erhalten folglich die Tabelle:

l	2^{l-1}	$n_{12} = 2l$	k	n_{13}
3	8	6	≥ 1	≥ 8
6	32	12	≥ 1	≥ 32

.

Es gilt also für alle l, die zu diesem Fall gehören, und $\forall k \geq 1$ sogar $k2^{l-1} > 2l$. Somit folgt aus Lemma 9.2.3, daß (11.2.o) gilt. Von dieser Ungleichung wissen wir aber, daß sie nicht erfüllt wird und daß aus diesem Grund positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen auf $\mathcal{S}$ existieren im Widerspruch zur Voraussetzung, da $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat.

Wir haben damit die Aussage des Satzes bewiesen und den Darstellungsraum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ für $\mathfrak{A}^0 \cong [\mathcal{X}, \mu, e]$ analysiert. □

Bemerkung:
(11.2.γ) Der Satz 9.2.4 von Tsuji folgt nun leicht unter der Zuhilfenahme des Satzes 11.2.3, wenn man zudem die Möglichkeiten für eine Algebra $\mathfrak{A}$ vom Rang 3 und somit $q \leq 3$ betrachtet.

Die Ungleichungen des Spezialfalls im Überblick, für den Fall daß $\mathfrak{A}^0$ einfach ist:
Zusammengefaßt erhalten wir im Fall V die folgenden drei verschiedenen Ungleichungen, deren analogen linken Seiten wir in Satz 11.2.5 verwenden werden:

(11.2.q)

Fall V	Ungleichung
(11.2.m)	$1 + 2l + \frac{1}{2}m_2 \leq 1 + \frac{1}{4}m_3$
(11.2.o)	$2 + 2l + \frac{1}{2}m_2 \leq 1 + \frac{1}{4}m_3$
(11.2.p)	$1 + \frac{1}{4}m_2 \leq 1 + \frac{1}{4}m_3$

.

(11.2.a) ist die Ungleichung für den Fall I. Indem wir in (11.2.c) einfach $s_{\mathbb{K}}$ entsprechend einsetzen, erhalten wir die Ungleichungen für die verschiedenen Fälle *II-IV*. Insgesamt ergibt sich:

(11.2.r)

Fall	Ungleichung
I	$1 + \frac{1}{4}m_1 \leq 1 + \frac{1}{4}m_2$
II	$\frac{1}{2}(f^2 + f) + \frac{1}{4}fm_{r_0} \leq 1 + \frac{1}{4}m_r$
III	$f^2 + \frac{1}{4}fm_{r_0} \leq 1 + \frac{1}{4}m_r$
IV	$2f^2 - f + \frac{1}{4}fm_{r_0} \leq 1 + \frac{1}{4}m_r$

.

Um die Diskussion der Räume, zu denen ein Diagramm wie in (11.1.a) gehört, abschließen zu können, benötigen wir eine leichte Modifizierung der für n.p.h.B. notwendigen Bedingung des Korollars 11.1.3. Diese soll nun angegeben werden:

Korollar 11.2.4 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r mit n.p.h.B. und $\mathfrak{A}$ sei die dazugehörige Algebra vom q=2-Typ, zu der das Diagramm (11.1.a)* *gehört. Sei weiter $i \in \{2, ..., t+1\}$ mit $\mathfrak{A}_{ii}^0 = [\mathcal{X}, \mu, e]$, und $\mathfrak{A}_{i1}^{\frac{1}{2}}$ sei nur ein einfacher reeller irreduzibler Darstellungsraum von $\mathfrak{A}_{ii}^0$, d.h. $f_i = 1$. Dann gilt:*

a.) *Die Dimension der Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}_{i1}^{\frac{1}{2}}$ gehören, ist mindestens so groß wie die Dimension des Raumes 2. Art, der zu $\mathfrak{A}_{ii}^0$ gehört.*

b.) *Falls die Dimension der Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}_{i1}^{\frac{1}{2}}$ gehören, echt größer ist als die Dimension des Raumes 2. Art, der zu $\mathfrak{A}_{ii}^0$ gehört, dann gilt:*

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{t+1} f_j N_j + 2N_i \leq n_r.$$

D.h. in der für n.p.h.B. notwendigen Bedingung des Korollars 11.1.3 kann der Summand $f_i N_i$ durch $2N_i$ ersetzt werden. Da $f_i = 1$ gilt, folgt, daß die neue Bedingung stärker ist als die des Korollars 11.1.3 b.).

Beweis:
Wir betrachten ein zu (11.1.a) gehörendes Diagramm der Dimensionen einer zu $\mathcal{S}$ gehörenden normalen J-Algebra. Diese Zuordnung sieht lokal, also an der uns interessierenden Stelle, wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc}
\mathbb{R} & \mathfrak{A}_{12}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{1i}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{1,t+1}^{\frac{1}{2}} \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\mathfrak{A}_{i1}^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & \mathfrak{A}_{ii}^0 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
\mathfrak{A}_{t+1,1}^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \mathfrak{A}_{t+1,t+1}^0
\end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{c|ccccc}
1 & & & & & \\
\hline
\cdot & \cdot & & & & \\
n_{p+1,r} & \cdots & 1 & & & \\
n_{pr} & \cdots & n_{p,p+1} & 1 & & \\
\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \\
n_{1r} & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & 1
\end{array}\right).$$

Nun gilt wegen Lemma 9.1.3 $n_{p+1,r} = n_{pr} \neq 0$, wobei die Verschiedenheit von Null eine direkte Folge der Irreduzibilität von $\mathcal{S}$ ist. Es gilt $p < p+1 < r$ und $n_{p+1,r} \neq 0$, deshalb ergibt Proposition 9.1.1

(11.2.s) $$n_{pr} \geq n_{p,p+1}.$$

Aus (11.2.s) folgt sofort a.).
Zu b.): Gilt nun $n_{pr} > n_{p,p+1}$ und $n_{p+1,r} \neq 0$, so folgt, daß die lineare Abbildung $Z_{pr} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_p+\alpha_r)} \to [JZ_{pr}, X_{p+1,r}] \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_p+\alpha_{p+1})}$ nicht für alle $0 \neq X_{p+1,r} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_{p+1}+\alpha_r)}$ injektiv ist. Somit folgt, daß es ein $0 \neq X_{pr} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_p+\alpha_r)}$ gibt, so daß $[JX_{pr}, X_{p+1,r}] = 0$ gilt.
Wir setzen im Beweis des Satzes 11.1.2 nun $K_i = \{X_{pr}, X_{p+1,r}\}$ und alle anderen Mengen K_j mit $i \neq j \in \{2, ..., t+1\}$ wählen wir wie dort; dann erhalten wir, daß

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{t+1} \sum_{l=1}^{f_j} n_{i_l} + \underbrace{n_p + n_{p+1}}_{\text{vom Faktor i}} \leq n_r$$

gilt. Mit den Ergebnissen von Korollar 11.1.3 a.) gilt $n_p = n_{p+1} = N_i$, und aus der notwendigen Bedingung in b.) von Korollar 11.1.3 wird nun

$$\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{t+1} f_j N_j + 2N_i \leq n_r.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung:

(11.2.δ) Falls in Korollar 11.2.4 a.) die Dimensionen der Wurzelräume 2. Art übereinstimmen, dann ist $\mathfrak{A}_{ii}^0$ isomorph zu $Sym(2,\mathbb{C})$ bzw. zu $Sym(2,\mathbb{H})$, was auch leicht der Tabelle des Falls *V.2a* (S.116) entnommen werden kann.

Wir können nun unsere Ausführungen zu dem speziellen Fall, den wir mit Satz 11.1.2 begonnen haben zu betrachten, abschließen.
Aufgrund des Satzes 11.2.1 und (11.2.α) gilt $\varphi_0 = \bigoplus_{i=2}^{t+1}\varphi_i$, wobei φ_i eine Darstellung von $\mathfrak{A}_{ii}^0$ in $Sym(W_i,\rho_i)$ ist. Durch den Beweis des Satzes 11.2.2 kennen wir den Raum $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ genau.

Satz 11.2.5 *Es existiert kein irreduzibles homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ vom Rang r mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung, bei dem die Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ ist, so daß $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$ und $\mathfrak{A}^0$ die Summe von mindestens zwei einfachen formal-reellen Jordan-Algebren ist.*

Beweis:
Wir beweisen die Aussage des Satzes, indem wir zeigen, daß die notwendige Bedingung für n.p.h.B. des Korollars 11.2.4 b.) nicht erfüllt ist.
Dazu nehmen wir an, daß $\mathfrak{A}^0$ mindestens die Summe von zwei einfachen formal-reellen Jordan-Algebren ist, d.h. $t+1 \geq 3$ (s. (11.1.a)). Wir nehmen weiter an, daß $\mathcal{S}$ ein zugehöriges, irreduzibles homogenes Siegelgebiet mit n.p.h.B. ist, und wir benutzen die in Satz 11.2.2 vorgenommene Einteilung in die Fälle *I- VI*, wobei auch hier ein Faktor, der dem Fall *VI* zugeordnet werden kann, nicht auftritt (s. dafür den Beweis des Satzes 11.2.2, Fall *VI*).
Für alle $l \in \{2,...,t+1\}$ sind die Dimensionen der Räume 2. Art, die in dem Diagramm (11.1.a) den Peirce-Räumen $\mathfrak{A}_{l1}^{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathfrak{A}_{ll}^0$ zugeordnet werden, jeweils alle gleich (s. Lemma 9.1.3 und Satz 4.1.2) und von Null verschieden. Wir notieren diese Dimensionen mit $c_l^{\frac{1}{2}}$ bzw. c_l^0. Dabei gilt $c_l^{\frac{1}{2}} > 0$, weil $\mathcal{S}$ irreduzibel ist (s. Satz 8.4.3). Wegen Korollar 11.1.3 sind die Dimensionen m_q der Räume 1. Art mit $q \in \tilde{M}_l$ alle gleich. Deshalb setzen wir $\forall q \in \tilde{M}_l,\ m_l := m_q$.
Die dem $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ Raum via (8.3.e) zugehörigen Räume 2. Art haben alle den Index r, der dem Rang von $\mathcal{S}$ entspricht (s. auch (8.3.f)), und dies sind auch die einzigen Wurzelräume, die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ zugeordnet werden.

Wir wenden Korollar 11.2.4 b.) an, indem wir über alle Faktoren einfacher formalreeller Jordan-Algebren in $\mathfrak{A}^0$ summieren und erhalten:

(11.2.t)

$$
\begin{aligned}
& \underbrace{\sum_i f_i(1+\frac{1}{2}((r_i-1)c_i^0+c_i^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}m_i)}_{\text{Summanden der Fälle } \textit{I-IV}} \\
+ \; & \underbrace{\sum_j f_j(1+\frac{1}{2}(dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_j-2)+\frac{1}{4}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_j^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}m_j)}_{\text{Summanden des Falls } V} \\
+ \; & \underbrace{\sum_s (dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_s+\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_s^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}m_s)}_{\text{Summanden des Falls } V_a} \\
+ \; & \underbrace{\sum_o (1+\frac{1}{2}(dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_o-2)+\frac{1}{4}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_0^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}m_o)}_{\text{Summanden des Falls } V_b} \\
\leq \; & 1+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_i r_i c_i^{\frac{1}{2}}}_{\textit{I-IV}}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_j dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_j^{\frac{1}{2}})}_{V}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_s dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_s^{\frac{1}{2}})}_{V_a}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_o dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}})}_{V_b}+\frac{1}{4}m_r.
\end{aligned}
$$

Beschreibung von (11.2.t) und der Veränderungen, die zu (11.2.u) führen:
Dabei bezeichnen wir in (11.2.t) mit V_a bzw. V_b diejenigen Faktoren vom Typ V, für welche die Bedingung a.) des Korollars 11.2.4 erfüllt ist, wobei V_b insbesondere solche Fälle bezeichnet, bei denen die Dimensionen der Räume 2. Art gleich sind (s. auch (11.2.δ)). Zusammengenommen sind V_a und V_b alle möglichen Fälle vom Typ V, für die $f_s = f_o = 1$ gilt (für die Indizes s, o siehe (11.2.t)).
Demzufolge und weil der Rang einer Algebra vom Typ V Zwei ist, trägt offensichtlich die mit V gekennzeichnete Summe für diejenigen Faktoren vom Typ V Rechenschaft, für die $\forall j \; f_j = 2$ gilt. Deshalb entspricht die Form eines Summanden in V der eines Summanden in V_a und umgekehrt. Aus diesem Grund bezeichnen wir diese Summanden als Summanden eines neuen Typs, den wir V_c nennen. Es gilt also $V_c = V \cup V_a$.

In der Summe über die Fälle *I-IV* gilt: Falls der Summand dem Fall *I* zugeordnet werden kann, gilt $r_j = 1$. Für die Fälle *II-IV* gilt bekanntlich immer $r_j \geq 3$. Wir bezeichnen mit k_j die Anzahl der reellen irreduziblen Darstellungen, in die $\mathfrak{A}_j^{\frac{1}{2}}$ zerfällt und mit $s_{\mathbb{K}}^j$ den entsprechenden Faktor in Abhängigkeit des Körpers $\mathbb{K}$, d.h. $s_{\mathbb{R}}^j = 1$, $s_{\mathbb{C}}^j = 2$ und $s_{\mathbb{H}}^j = 4$. Demnach gilt $c_j^{\frac{1}{2}} = s_{\mathbb{K}}^j k_j$, $c_j^0 = s_{\mathbb{K}}^j$.

Dieses setzen wir für die Fälle *I-V* in (11.2.t) ein und erhalten:

(11.2.u)

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\sum_i f_i(1+\frac{1}{2}((r_i-1)s^i_{\mathbb{K}}+s^i_{\mathbb{K}}k_i)+\frac{1}{4}m_i)}_{\text{Summanden der Fälle } I\text{-}IV} \\
+ \quad & \underbrace{\sum_d (dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_d+\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_d^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{2}m_d)}_{\text{Summanden des Falls } V_c} \\
+ \quad & \underbrace{\sum_o (1+\frac{1}{2}(dim_{\mathbb{R}}\mathcal{X}_o-2)+\frac{1}{4}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{4}m_o)}_{\text{Summanden des Falls } V_b} \\
\leq \quad & 1+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_i s^i_{\mathbb{K}}r_ik_i}_{I\text{-}IV}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_d dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_d^{\frac{1}{2}})}_{V_c}+\underbrace{\frac{1}{2}\sum_o dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}})}_{V_b}+\frac{1}{4}m_r.
\end{aligned}$$

Vergleich der beiden Seiten in (11.2.u):

Auf der rechten Seite der Ungleichung (11.2.u) kommen 1 und $\frac{1}{4}m_r$ genau einmal vor. Dazwischen stehen die Summen über Summanden, die von den Dimensionen derjenigen Wurzelräume verursacht werden, welche den $\mathfrak{A}_{l1}^{\frac{1}{2}}$ Räumen (s. auch (11.1.a)) mit $l \in \{2, ..., t+1\}$ zugeordnet werden.
Es gibt demzufolge t solcher Summanden auf der rechten Seite und jedem solchen Summanden kann in eindeutiger Weise ein bzgl. des Indexes entsprechender Summand der linken Seite zugeordnet werden; wir haben also t solcher Paare von zugeordneten Summanden.
Sei nun $l \in \{2, ..., t+1\}$ beliebig, aber fest gewählt, dann betrachten wir das zu l gehörende Paar.

Paare vom Typ V_c, V_b:

Für V_c sehen wir sofort, daß sich auf der linken und rechten Seite von (11.2.u) die Summanden vom Typ $\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{A}_d^{\frac{1}{2}}$ alle wegkürzen lassen.
Wegen Korollar 11.2.4 wissen wir, daß für die Summanden in V_b für jedes o jeweils die Dimensionen der Räume 2. Art in $\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}}$ und in $\mathfrak{A}_o$ gleich sind. Folglich gilt $dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_o)-2=\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}})$. Setzen wir dies in (11.2.u) ein, so sehen wir, daß sich $\forall o$ die Summanden $\frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{A}_o^{\frac{1}{2}}$ ebenfalls herauskürzen lassen.
Bei den Summanden in V_c unterscheiden wir künftig zwischen gerader $2u+2$ und ungerader $2u+1$ Dimension von $\mathcal{X}_d$, dabei gilt $u \geq 1$.
Auf der linken Seite bleiben schließlich für die Fälle des Typs V die zu den linken

Seiten der Ungleichungen (11.2.q) analogen Summanden stehen.

Paare vom Typ I-IV:
Wir vergleichen nun die folgenden Summanden von (11.2.u):

(11.2.v) $$f_l(1+\tfrac{1}{2}((r_l-1)s_{\mathbb{K}}^l+s_{\mathbb{K}}^l k_l)+\tfrac{1}{4}m_l)$$

$$\Leftrightarrow \qquad f_l+\tfrac{1}{2}f_l r_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{2}f_l k_l s_{\mathbb{K}}^l-\tfrac{1}{2}f_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{4}f_l m_l$$

mit

(11.2.w) $$\tfrac{1}{2}k_l r_l s_{\mathbb{K}}^l.$$

Betrachten wir die Ungleichung (11.2.b) für die Fälle *II-IV* der Situation im einfachen Fall, so sehen wir zum einen, daß sich die rechte Seite von (11.2.b) nur um zwei Summanden von (11.2.w) unterscheidet und zum anderen, daß die linke Seite von (11.2.b) bis auf den Index mit (11.2.v) übereinstimmt.
Nun gilt $f_l = k_l$ oder $f_l = r_l$. Daher ist (11.2.v) äquivalent zu

$$k_l+\tfrac{1}{2}k_l r_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{2}k_l^2 s_{\mathbb{K}}^l-\tfrac{1}{2}k_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{4}k_l m_l$$

oder zu

$$r_l+\tfrac{1}{2}k_l r_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{2}r_l^2 s_{\mathbb{K}}^l-\tfrac{1}{2}r_l s_{\mathbb{K}}^l+\tfrac{1}{4}r_l m_l.$$

Gleichgültig, welcher Fall von beiden eintritt, es kürzt sich (11.2.w) in (11.2.u) heraus. Dies lehrt auch schon (11.2.b). Auf der linken Seite von (11.2.u) bleibt dann die zu (11.2.c) analoge linke Seite übrig. Aufgrund der verschiedenen Möglichkeiten für $\mathbb{K}$ entspricht dieser Summand dann einer der linken Seiten von (11.2.r). Im Fall *I* gilt $r_l = 1 = f_l$ und wir setzen $s_{\mathbb{K}} = 1$, denn k_l soll der reellen Dimension des Darstellungsraumes $\mathfrak{A}_{ir}^{\frac{1}{2}} \cong \mathbb{R}^{k_l}$ entsprechen. Deshalb entspricht (11.2.v) nun $1+\frac{1}{2}k_l+\frac{1}{4}m_l$ und (11.2.w) wird zu $\frac{1}{2}k_l$. Offensichtlich hebt sich bei einem solchen Paar $\frac{1}{2}k_l$ in (11.2.u) heraus. Man erhält die linke Seite der ersten Ungleichung von (11.2.r).

Kürzen wir nun, wie oben beschrieben, die Ungleichung (11.2.u) für jeden einzelnen Summanden und benutzen für die möglichen verschiedenen Fälle *I-V* die analogen linken Seiten der Ungleichungen (11.2.q,r), so folgt:

(11.2.x)

$$\underbrace{\sum_i (1+\frac{1}{4}m_i)}_{\mathbb{R}\text{-Summanden}} + \underbrace{\sum_j \frac{1}{2}(f_j+f_j^2)+\frac{1}{4}f_j m_j}_{Sym(r_j,\mathbb{R})\text{-Summanden}}$$

$$
\begin{aligned}
+ \quad & \underbrace{\sum_n f_n^2 + \frac{1}{4} f_n m_n}_{Herm(r_n,\mathbb{C})\text{-Summanden}} \quad + \underbrace{\sum_p 2f_p^2 - f_p + \frac{1}{4} f_p m_p}_{Herm(r_p,\mathbb{H})\text{-Summanden}} \\
+ \quad & \underbrace{\sum_s (1 + 2u + \frac{1}{2} m_s)}_{V_c\text{-Summanden}} + \underbrace{\sum_k (2 + 2u + \frac{1}{2} m_k)}_{V_c\text{-Summanden}} + \underbrace{\sum_t (1 + \frac{1}{4} m_t)}_{V_b\text{-Summanden}} \\
\leq \quad & 1 + \frac{1}{4} m_r.
\end{aligned}
$$

$u \geq 1$ und $\forall l \in \{2, ..., t+1\}$ gilt $f_l \geq 1$. Weil für die Wurzelräume $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_r)} \neq 0$ gilt, was aus der entsprechenden Bedingung für die Peirce-Räume in $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ impliziert wird, deren Nichtverschwinden sich durch die vorausgesetzte Irreduzibilität begründet, liefert $\forall i \in \{1, ..., r-1\}$ Proposition 9.1.1 $m_i \geq m_r$.
Damit folgt, daß die Ungleichung (11.2.x) offensichtlich nicht erfüllt wird sobald $\mathfrak{A}^0$ mindestens zwei Summanden besitzt. Dies wiederum hat zur Konsequenz, daß J invariante Ebenen mit positiver holomorpher Bischnittkrümmung existieren. Folglich existiert kein irreduzibles Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B., zu dem eine solche spezielle Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ gehört und dies ist die Behauptung. □

11.3 Weitere Spezialfälle

Wir beschließen dieses Kapitel mit den Untersuchungsergebnissen zu der Frage nach der Existenz von nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung bei zwei weiteren Spezialfällen. Diese werden hier vor ihrem eigentlichen relevanten Auftreten in Kapitel 12 behandelt.

Lemma 11.3.1 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r und*

$$
\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathbb{R} & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13} \\ 0 & \mathbb{R} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{23} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{31} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{32} & \mathfrak{A}^0 \end{array} \right)
$$

sei die dazugehörige Algebra vom q=2-Typ, wobei $\mathfrak{A}^0$ eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra vom Rang r_0 ist. Des weiteren setzen wir voraus, daß die Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i3}$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $\mathfrak{A}^0$ (soweit sie in $\mathfrak{A}^0$ existieren, d.h. falls $r_0 \geq 2$ gilt) zugeordnet werden, alle die gleiche konstante Dimension c haben.
Dann folgt, daß $\mathcal{S}$ positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen besitzt.

Beweis:
Da $\mathcal{S}$ irreduzibel ist, folgt mit Lemma 9.1.3 und Satz 8.4.3 $c > 0$. Wir nehmen an, daß $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat. Dann gehen wir über zu einer normalen J-Algebra, ändern die Indizes (s. Abschnitt 8.3) und erhalten das folgende Diagramm mit den Dimensionen der entsprechenden Wurzelräume:

$$\left(\begin{array}{c|cc|cccc} m_r & 1 & & & & & \\ m_{r-1} & 0 & 1 & & & & \\ \hline m_{r-2} & n_{r-2,r} & n_{r-2,r-1} & 1 & & & \\ m_{r-3} & n_{r-3,r} & n_{r-3,r-1} & n_{r-3,r-2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ m_1 & n_{1r} & n_{1,r-1} & n_{1,r-2} & n_{1,r-3} & \cdots & 1 \end{array}\right).$$

Für die Räume 2. Art mit $i \neq j$, $i, j \in \{1, ..., r\}$ gilt $n_{ij} = c > 0$. Da $n_{i,i+1} \neq 0$ für $i = 1, ..., r-2$ gilt, ergibt Proposition 9.1.1 für die Dimensionen m_i der Räume 1. Art $m_1 \geq m_2 \geq ... \geq m_{r-1}$. Insbesondere folgt somit

(11.3.a) $$m_{r-2} \geq m_{r-1},$$

und da $n_{r-2,r-1} \neq 0$ gilt und $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat, liefert Lemma 9.2.2

(11.3.b) $$n_{r-2} \leq n_{r-1}.$$

Nun liefert die Definition 8.2.2 der Einsteinkoeffizienten

$$n_{r-2} = 1 + \tfrac{1}{2}(r-1)c + \tfrac{1}{4}m_{r-2} \text{ und } n_{r-1} = 1 + \tfrac{1}{2}(r-2)c + \tfrac{1}{4}m_{r-1}$$

und (11.3.b) ist folglich äquivalent zu

$$2c + m_{r-2} \leq m_{r-1}.$$

Nun gilt (11.3.a) und $c > 0$. Demnach ist die für n.p.h.B. notwendige Bedingung (11.3.b) nicht erfüllt; demzufolge hat das Siegelgebiet $\mathcal{S}$ auch positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen im Widerspruch zur Annahme und die Behauptung ist gezeigt. □

Wir kommen zu unserem letzten zu behandelnden speziellen Fall:

Lemma 11.3.2 *Sei $\mathcal{S}$ ein irreduzibles Siegelgebiet vom Rang r mit n.p.h.B.. Weiter sei $\mathfrak{A}$ die dazugehörige Algebra vom q=2-Typ, zu der das Diagramm*

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}^1 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right)$$

gehört. Dabei sind $\mathfrak{A}^0$ bzw. $\mathfrak{A}^1$ einfache formal-reelle Jordan-Algebren vom Rang r_0 bzw. $r_1 \geq 2$. Außerdem setzen wir voraus, daß die Dimensionen der $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{A}^0$ (soweit sie in $\mathfrak{A}^0$ existieren, d.h. $r_0 \geq 2$) zugeordneten Räume 2. Art alle gleich c sind.
Dann haben die Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}^1$ zugeordnet werden, auch die Dimension c.

Beweis:
Da $\mathcal{S}$ irreduzibel ist, folgt mit Satz 9.1.2 und Satz 8.4.3, daß $c > 0$ gilt. Wir erhalten in diesem Fall beim Übergang von $\mathfrak{A}$ zu einer zugehörigen normalen J-Algebra $\mathfrak{s}$ das Diagramm:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\mathfrak{n}^1_{rr} & \cdots & \mathfrak{n}^1_{r,r-s} & & & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & & \\
\mathfrak{n}^1_{r-s,r} & \cdots & \mathfrak{n}^1_{r-s,r-s} & & & \\
\hline
\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}_{r-s-1,r} & \cdots & \mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}_{r-s-1,r-s} & \mathfrak{n}^0_{r-s-1,r-s-1} & \cdots & \mathfrak{n}^0_{r-s-1,1} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}_{1r} & \cdots & \mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}_{1,r-s} & \mathfrak{n}^0_{1,r-s-1} & \cdots & \mathfrak{n}^0_{11}
\end{array}\right).$$

Dabei gilt $s = r_1 - 1 \geq 1$, da $r_1 \geq 2$ gilt und $r - s - 1 = r_0$. Außerdem schreiben wir abkürzend $\mathfrak{n}_{ij}$ für $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_i+\alpha_j)}$, $\forall i, j \in \{1, ..., r\}$, wobei wir diese Räume je nach Zugehörigkeit zu $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ oder $\mathfrak{A}^1$ mit einem Superskript $0, \frac{1}{2}$ oder 1 versehen. Nach Voraussetzung gilt $dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_{ij}) = c \ \forall i \neq j$ mit $i \in \{1, ..., r-s-1\}$ und $j \in \{1, ..., r\}$.
$\mathfrak{A}^1$ ist eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra mit Rang $r_1 \geq 2$, folglich haben die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^1$ gehören, alle die gleiche von Null verschiedene Dimension, die wir mit e bezeichnen (s. Satz 4.1.2). Es genügt somit zu zeigen, daß ein Raum 2. Art, der zu $\mathfrak{A}^1$ gehört, die Dimension c hat.
Es gilt $(*)$ $\mathfrak{n}^{\frac{1}{2}}_{r-s-1,r-s} \neq 0$ und wegen Proposition 9.1.1 gilt deshalb

(11.3.c) $$n_{r-s-1,r} = c \geq n_{r-s,r} = e.$$

Außerdem folgt, weil $(*)$ gilt und $\mathcal{S}$ n.p.h.B. hat, aus Lemma 9.2.2, daß die Einsteinkoeffizienten n_{r-s-1}, n_{r-s} die Ungleichung $n_{r-s-1} \leq n_{r-s}$ erfüllen. Dies ist äquivalent zu:

$$1 + \tfrac{1}{2}(r-1)c + \tfrac{1}{4}m_{r-s-1} \leq 1 + \tfrac{1}{2}(r-s-1)c + \tfrac{1}{2}se + \tfrac{1}{4}m_{r-s}.$$

Also gilt

$$2sc + m_{r-s-1} \leq 2se + m_{r-s}$$

(11.3.d) $$\Leftrightarrow 2sc + m_{r-s-1} - m_{r-s} \leq 2se.$$

Nun liefert wegen $(*)$ Proposition 9.1.1 auch, daß $m_{r-s-1} \geq m_{r-s}$ gilt und somit ist in (11.3.d) $m_{r-s-1} - m_{r-s} \geq 0$. Weiter folgt nun aus (11.3.d), daß $e \geq c$ gilt und insgesamt erhalten wir mit (11.3.c) $e = c$, was zu zeigen war. □

Korollar 11.3.3 *Sei $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet und $\mathfrak{A}$ die dazugehörige Algebra. Des weiteren sollen $\mathcal{S}$ und $\mathfrak{A}$ die Bedingungen des Lemmas 11.3.2 erfüllen. Dann folgt, daß die Räume 1. Art alle die gleiche Dimension haben.*

Beweis:
Aufgrund des Lemmas 11.3.2 gilt, daß die Räume 2. Art alle die gleiche Dimension $c > 0$ besitzen.
Sei nun $i, j \in \{1, ..., r\}$ mit $i \neq j$ beliebig, aber fest gewählt. Ohne Einschränkung

sei $i < j$. Das Siegelgebiet $\mathcal{S}$ hat nach Voraussetzung n.p.h.B.. Daraus und da $n_{ij} \neq 0$ gilt, liefert Lemma 9.2.2 $n_i \leq n_j$.
Aus $n_{ij} \neq 0$ alleine folgt wegen Proposition 9.1.1

(11.3.e)
$$m_j \leq m_i.$$

Nun gilt nach der Definition der Einsteinkoeffizienten (s. Definition 8.2.2) und weil die Dimension jedes Raumes 2. Art c entspricht

$$\begin{aligned} n_i &= 1 + \frac{1}{2}(r-1)c + \frac{1}{4}m_i \\ n_j &= 1 + \frac{1}{2}(r-1)c + \frac{1}{4}m_j. \end{aligned}$$

Die Bedingung $n_i \leq n_j$ ist für die hier betrachtete Situation deshalb offensichtlich äquivalent zu

(11.3.f)
$$m_i \leq m_j,$$

also folgt aus (11.3.e-f) $m_i = m_j$.
Insgesamt folgt, da i, j beliebig gewählt waren, daß $m_1 = m_2 = ... = m_r$ gilt und somit ist die Behauptung gezeigt. □

Wir können nun zusammenfassend formulieren:

Satz 11.3.4 *Es gibt kein homogenes Siegelgebiet, das den Bedingungen von Lemma 11.3.2 genügt.*

Beweis:
Die Räume 2. Art haben alle aufgrund des Lemmas 11.3.2 die gleiche, von Null verschiedene Dimension. Mit Korollar 11.3.3 wissen wir, daß die m_i für $i \in \{1, ..., r\}$ alle gleich sind. Aus Satz 7.2.1 folgt, daß $\mathcal{S}$ schon quasisymmetrisch ist, also gilt q=1 (s. Satz 7.1.4). Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, da q=2 gilt. □

12 Zur Krümmungsvermutung

Wir haben nun alle Ingredienzen zusammengetragen, um die Vermutung zu beweisen, daß jedes homogene Siegelgebiet mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung in der Bergmannmetrik schon ein quasisymmetrisches Siegelgebiet ist.

12.1 Reduktion

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß es genügt, die Siegelgebiete vom q=2-Typ zu betrachten, anstatt die Menge aller homogenen Siegelgebiete. Wir können also die Menge der zu untersuchenden Siegelgebiete reduzieren.

Satz 12.1.1 (q-Reduktion) *Wenn es kein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ vom q=2-Typ mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung in der Bergmannmetrik gibt, so existiert auch kein Siegelgebiet vom $q \geq 3$-Typ mit dieser Krümmungseigenschaft.*

Beweis:
Induktion nach q
Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet vom $q \geq 3$-Typ mit n.p.h.B. und

$$\mathfrak{A} \sim \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} & \cdots & \mathfrak{A}_{1q} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & \cdots & \mathfrak{A}_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}_{q1} & \mathfrak{A}_{q2} & \cdots & \mathfrak{A}_{qq} \end{pmatrix}$$

die dazugehörige Algebra. Wegen Satz 3.2.5 gilt $\mathfrak{A}_{11} \neq 0$.

Induktionsverankerung
Gilt q=3, dann realisieren wir das Gebiet $\mathcal{S}$ mit $f = Id_{\mathfrak{A}_{11}}$, dem Einselement von $\mathfrak{A}_{11}$, als Siegel-III-Gebiet via Satz 10.1.1. Der Faserraum $\mathcal{S}_0$ ist ein Siegelgebiet vom q=2-Typ. Die induzierte Metrik auf $\mathcal{S}_0$ ist nach Korollar 10.2.3 die Bergmannmetrik. Außerdem hat $\mathcal{S}_0$ nach Korollar 8.1.4 n.p.h.B., und $\mathcal{S}_0$ ist vom q=2-Typ. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes, da Siegelgebiete vom q=2-Typ mit n.p.h.B. nicht existieren.

Schluß von n nach n+1
Sei nun $q = n + 1$, so ist nach Korollar 10.2.3 und Korollar 8.1.4 der Faserraum $\mathcal{S}_0$ der Siegel-III-Realisierung des Gebietes $\mathcal{S}$ via $f = Id_{\mathfrak{A}_{11}}$, dem Einselement von $\mathfrak{A}_{11}$, vom q=n-Typ mit n.p.h.B..
Nach der Induktionsvoraussetzung existiert aber kein Siegelgebiet vom q=n-Typ mit n.p.h.B..

Mit diesem Widerspruch ist der Satz gezeigt. Es gibt also kein Siegelgebiet vom echt größeren Typ als Zwei mit n.p.h.B., wenn der q=2-Typ nicht existiert. □

Bemerkungen:

(12.1.α) Unter der Voraussetzung, daß es kein q=2 Siegelgebiet mit n.p.h.B. gibt, können wir für ein beliebiges Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B. und $q \geq 3$ auch folgendermaßen den Widerspruch herleiten:
Wir verkleinern den q-Typ sukzessive und erhalten ein Gebiet, das n.p.h.B. besitzt und vom q=2-Typ ist. Dazu wählen wir immer f gleich dem Einselement von $\mathfrak{A}_{11}$ der Ausgangsalgebra $\mathfrak{A}$ und wenden das Standardargument $\mathcal{STA}$ an (siehe den Beweis des Satzes 12.2.1). Der Faserraum $\mathcal{S}_0$ ist vom q-1-Typ mit n.p.h.B..
Die Algebra $\mathfrak{A}_0(f)$ des Faserraums nehmen wir sodann als Ausgangsalgebra $\mathfrak{A}$ und führen das gleiche wieder durch.
Daraus resultiert nach endlich vielen Schritten (q-2-Schritte) ein Siegel-III-Gebiet mit einem Faserraum vom q=2-Typ mit n.p.h.B.. Ein solches Gebiet existiert aber nicht nach Voraussetzung.

(12.1.β) Man könnte versucht sein, einen ähnlichen Beweis für den Fall der Schnittkrümmung auszuführen. Allerdings hat die Faser bei der Siegel-III-Realisierung nicht notwendig nicht-positive Schnittkrümmung, so daß man die Reduktion nicht durchführen kann.
Nach dem Ergebnis von D'Atri und Miatello ist ein Siegelgebiet mit nicht-positiver Schnittkrümmung schon symmetrisch (s. (Sym.7) im Satz 7.3.1).

12.2 Beweis der Krümmungsvermutung

Nach Satz 12.1.1 genügt es für einen Beweis der Krümmungsvermutung, die Klasse der homogenen Siegelgebiete vom q=2-Typ (s. Definition 8.4.1) zu betrachten. Demzufolge beruht schließlich der Beweis der Krümmungsvermutung darauf zu zeigen, daß keine q=2-Typ Siegelgebiete mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung existieren.
Nachdem wir dies gezeigt haben, geben wir daraus resultierende Folgerungen an.

In einigen Fällen vom q=2-Typ sind die Räume Riemannsche Produkte, bei denen dann einige oder alle Faktoren quasisymmetrische Räume sind. Es genügt dann immer, die irreduziblen Faktoren vom q=2-Typ zu betrachten (s. auch Abschnitt 6.6).
An vielen Stellen wird die Argumentation ohne die Betrachtung der zu den Räumen 1. Art einer normalen J-Algebra zugehörigen Räume U_i (s. (10.3.b)) durchgeführt, da die Argumentation nicht von diesen abhängt (s. auch Abschnitt 10.3).

Wir können nun unser *Hauptresultat* formulieren:

Satz 12.2.1 *Ist $\mathcal{S}$ ein homogenes Siegelgebiet mit nicht-positiver holomorpher Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik, dann ist das Gebiet vom q=1-Typ. Das Gebiet ist also ein quasisymmetrisches Siegelgebiet.*

Bemerkung zum Beweis:

(12.2.α) Um diesen Satz beweisen zu können, benutzen wir die Algebra $\mathfrak{A}$, die man jedem homogenen regulären Kegel zuordnen kann. Jeder solchen Algebra entspricht ein Diagramm und jedes Diagramm steht für eine Klasse von Siegelgebieten, die zu diesem Diagramm bzw. zu der Algebra gehören. Über die Algebren $\mathfrak{A}$ erhalten wir Zugriff auf alle homogenen Siegelgebiete, und wir können dadurch Aussagen über die holomorphe Bischnittkrümmung aller homogenen Siegelgebiete machen.
Eine Ausschöpfung aller möglichen Algebren und somit Siegelgebiete erhalten wir, indem wir die reelle Dimension der Algebra erhöhen. Dabei konzentriert sich die Dimensionsbetrachtung auf zwei wesentliche Fälle, nämlich auf den Fall, bei dem $\mathfrak{A}$ die Dimension Eins hat (Induktionsverankerung) und auf den Fall echt größerer Dimension als Eins (Induktionsschritt). Bei dem zweitgenannten Fall wird ein induktives Argument $\mathcal{STA}$, von dem wir eine analoge Form in (10.2.α) erläuterten, in Verbindung mit den Ergebnissen des 11. Kapitels zum Ziel führen.

Induktiver Beweis des Satzes 12.2.1 über die reelle Dimension von $\mathfrak{A}$:

Die Dimension von $\mathfrak{A}$ ist gleich Eins (Induktionsverankerung)

Gilt $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{A} = 1$, so entspricht ein beliebiges dazugehöriges Siegelgebiet $\mathcal{S}$ einem komplex-hyperbolischen Raum. $\mathcal{S}$ hat folglich n.p.h.B. (s. Satz 7.3.1), ist quasisymmetrisch und $\mathfrak{A}$ als Algebra ist wegen des ersten Struktursatzes (s. Satz 4.1.2) isomorph zur einfachen formal-reellen Jordan-Algebra $\mathbb{R}$.

Vorbereitungen

Wir formulieren nun ein wichtiges induktives Argument für den Beweis der Krümmungsvermutung, das wir im nachfolgenden ständig anwenden werden und dessen Prinzip wir auch schon für den Beweis des Satzes 12.1.1 verwendeten.

Der STANDARDSCHLUSS *oder das* STANDARDARGUMENT $\mathcal{STA}$

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra vom $q \geq 2$-Typ mit beliebiger, aber fester reeller Dimension $n < \infty$. Die Induktionsvoraussetzung lautet, daß alle homogenen Siegelgebiete mit n.p.h.B., die zu einer Algebra niedrigerer Dimension als n gehören, schon quasisymmetrisch sind. Sei nun $\mathcal{S}$ ein zu $\mathfrak{A}$ gehörendes homogenes Siegelgebiet mit n.p.h.B.. Weiter sei f ein Idempotent (s. auch (10.2.β)) aus $\mathfrak{A}_{11} \neq 0$ (s. Satz 3.2.5). Wir realisieren für dieses f nach Satz 10.1.1 $\mathcal{S}$ als Siegel-III-Gebiet. Der Faserraum $\mathcal{S}_0$ dieser Realisierung ist ein homogenes Siegelgebiet und besitzt wegen Korollar 10.2.3 und Korollar 8.1.4 n.p.h.B.. $\mathcal{S}_0$ gehört zur Algebra $\mathfrak{A}_0(f) \subset \mathfrak{A}$ (s. den Beweis des Satzes 10.2.1), einer Algebra niedrigerer Dimension als n und ist folglich nach Induktionsvoraussetzung ein quasisymmetrisches Siegelgebiet. Ist $\mathcal{S}_0$ aber quasisymmetrisch, so ist aufgrund des Satzes 10.2.1 die Algebra $\mathfrak{A}_0(f)$ eine formal-reelle Jordan-Algebra.

Von hier an können wir immer annehmen, daß jedes betrachtete Siegelgebiet $\mathcal{S}$ irreduzibel ist (s. Abschnitt 6.6), denn andernfalls kann man die Induktionsvoraussetzung auf jeden Faktor anwenden und erhält q=1, womit der Beweis dann beendet wäre.
Die Irreduzibilität von $\mathcal{S}$ ist aufgrund des Satzes 8.4.3 für Siegelgebiete vom q=2-Typ gleichbedeutend damit, daß das Diagramm der zu $\mathcal{S}$ gehörenden Algebra $\mathfrak{A}$ nicht aufspaltet.

Die Dimension von $\mathfrak{A}$ ist größer Eins (Induktionsschritt)
Sei jetzt $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{A} > 1$. Wenn q=1 gilt, dann ist jedes zu $\mathfrak{A}$ gehörende Gebiet quasisymmetrisch (s. Satz 7.1.4). Nehmen wir an, daß $q \geq 2$ gilt. Wir wählen f gleich dem Einselement von $\mathfrak{A}_{11}$ und wenden $\mathcal{STA}$ an. Die Algebra $\mathfrak{A}_0(f) = \sum\limits_{i,j\geq 2}^{q} \mathfrak{A}_{ij}$ der Faser $\mathcal{S}_0$ ist eine formal-reelle Jordan-Algebra und somit ist $\mathcal{S}_0$ vom q=1-Typ. Zudem gilt $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}(f) = \sum_{j\geq 2} \mathfrak{A}_{1j} \neq 0$, weil $\mathfrak{A}$ nicht aufspaltet, und es folgt also, daß $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ ist (s. auch Satz 12.1.1 und Definition 3.1.7).

Wir nehmen nun an, daß zu der jeweils betrachteten Algebra $\mathfrak{A}$ vom q=2-Typ ein zugehöriges irreduzibles homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit n.p.h.B. bzgl. der Bergmannmetrik existiert. Diese Annahme führen wir zu einem Widerspruch.

Der Fall q=2
Wir betrachten für $\mathfrak{A}$ das Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}^1 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right).$$

Dabei sind $\mathfrak{A}^1$ und $\mathfrak{A}^0$ formal-reelle Jordan-Algebren, die nicht einfach sein müssen. Deshalb ergeben sich die folgenden vier unterschiedlichen Fälle:

Fall	**I**	**II**	**III**	**IV**
$\mathfrak{A}^1$	nicht einfach	nicht einfach	einfach	einfach
$\mathfrak{A}^o$	nicht einfach	einfach	einfach	nicht einfach

Beweisübersicht

I Der erste Fall splittet sich wie folgt in die Fälle I.1 und I.2 auf:

I.1 $\mathfrak{A}^1$ habe mindestens drei Faktoren, dann erhalten wir ein Produkt von quasisymmetrischen Räumen, was sowohl ein Widerspruch zur Irreduzibilität, als auch zu q=2 ist.

I.2 $\mathfrak{A}^1$ habe zwei Faktoren; dieser Fall führt zu einer Algebra des II-Falls oder wir erhalten einen Widerspruch zu q=2 oder zur Irreduzibilität, d.h. insgesamt, daß dieser Fall nicht auftritt.

II Auch hier haben wir eine Aufspaltung in:

II.1 $\mathfrak{A}^1$ habe mindestens drei Faktoren einfacher formal-reeller Jordan-Algebren. Dies führt zu einem Widerspruch zur vorausgesetzten Irreduzibilität der betrachteten Siegelgebiete, denn eine Algebra $\mathfrak{A}$ mit einem solchen Diagramm spaltet immer auf.

II.2 $\mathfrak{A}^1$ habe zwei Faktoren, dann reduziert sich dieser Fall auf die Betrachtung des Spezialfalls, den wir in Lemma 11.3.1 behandelt haben.

III Das Diagramm von $\mathfrak{A}$ spaltet nicht auf (s. Definition 8.4.2). Dieser Fall teilt sich ebenfalls in zwei weitere Fälle auf:

III.1 Besitzt $\mathfrak{A}^1$ einen Rang ≥ 2, so handelt es sich aber bei $\mathfrak{A}$ schon um eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra (Satz 11.3.4).

III.2 Der Rang von $\mathfrak{A}^1$ ist gleich Eins; wir können somit Satz 11.2.2 anwenden.

IV Im vierten Fall unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

IV.1 Zu diesem Fall gehören die Algebren, bei denen der Rang von $\mathfrak{A}^1$ mindestens zwei ist. Wir erhalten immer, daß ein Diagramm dieses Falls aufspaltet, im Widerspruch zur Voraussetzung. Deshalb tritt dieser Fall nicht auf.

IV.2 Der Rang von $\mathfrak{A}^1$ ist Eins und für die holomorphe Bischnittkrümmungsuntersuchung der zu diesen Algebren assoziierten Siegelgebiete benötigen wir Satz 11.2.5.

Die Fälle im Detail

I-*Fall*

Nehmen wir zuerst an, daß $\mathfrak{A}^1$ nicht einfach ist, so gilt nach dem zweiten Struktursatz (s. Satz 4.2.1) $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^1_{11} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}^1_{nn}$, wobei die $\mathfrak{A}^1_{ii}$ einfache formal-reelle Jordan-Algebren sind. Wenn $\mathfrak{A}^0$ t-Summanden einfacher formal-reeller Jordan-Algebren besitzt, resultiert das folgende Diagramm für $\mathfrak{A}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}
\mathfrak{A}^1_{11} & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac12}_{1,n+1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{1,n+2} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{1,n+3} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{1,n+t} \\
0 & \mathfrak{A}^1_{22} & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac12}_{2,n+1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{2,n+2} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{2,n+3} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{2,n+t} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n,n+1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n,n+2} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n,n+3} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n,n+t} \\
\hline
\mathfrak{A}^{\frac12}_{n+1,1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+1,2} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{A}^{\frac12}_{n+2,1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+2,2} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+2,n} & 0 & \mathfrak{A}^0_{n+2,n+2} & 0 & \cdots & 0 \\
\mathfrak{A}^{\frac12}_{n+3,1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+3,2} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+3,n} & 0 & 0 & \mathfrak{A}^0_{n+3,n+3} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathfrak{A}^{\frac12}_{n+t,1} & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+t,2} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac12}_{n+t,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{n+t,n+t}
\end{array}\right).$$

Sei $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig, aber fest gewählt. Wir definieren nun $f_i := Id_{\mathfrak{A}^1} - Id_{\mathfrak{A}^1_{ii}}$, wobei f_i die Identität von $\mathfrak{A}^1 \ominus \mathfrak{A}^1_{ii}$ ist und wenden $\mathcal{STA}$ für diese f_i an; es folgt, daß:

$$\mathfrak{A}_0(f_i) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} \mathfrak{A}^1_{ii} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i,n+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i,n+t} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,i} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+t,i} & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{n+t,n+t} \end{array} \right)$$

eine formal-reelle Jordan-Algebra ist.
Für die Räume $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{is}$ in $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$, die zu $\mathfrak{A}_0(f_i)$ gehören, gilt bzgl. der Multiplikation $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{in_1} \circ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{in_2} \subset \mathfrak{A}^0_{n_1 n_2} = 0$ für alle n_1, n_2 mit $n_1 \neq n_2$ und $n_1, n_2 \in \{n+1, ..., n+t\}$. Mit dem zweiten Struktursatz (s. Satz 4.2.1) gilt deshalb, daß $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{in_1}$ oder $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{in_2}$ gleich Null ist. Dies führen wir für alle f_i mit $i \in \{1, ..., n\}$ durch.
Für das Diagramm von $\mathfrak{A}$ folgt nun, daß es für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ genau einen Index l_i gibt, so daß $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{il_i} \neq 0$ gilt. Wären für $i \in \{1, ..., n\}$ und $j \in \{n+1, ..., n+t\}$ alle $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{ij} = 0$, dann wäre im Widerspruch zur Annahme, $\mathcal{S}$ sei irreduzibel, ein dazugehöriges Siegelgebiet das Produkt von IQS.

I.1-*Fall*

Gilt $n \geq 3$, dann ist l_i immer ungleich l_j. Existieren nämlich doch zwei Indizes mit $l_i = l_j$ für $i \neq j$, so wählen wir f als das Einselement eines dritten einfachen Faktors und wenden $\mathcal{STA}$ an. Es folgt für die dazugehörigen Peirce-Räume des rechten oberen Blocks von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{il_i} \circ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{jl_i} \subset \mathfrak{A}^1_{ij} = 0$, wie aus dem Diagramm entnommen werden kann. Nach dem zweiten Struktursatz ist nun $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{il_i}$ oder $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{jl_i}$ gleich Null. Dies ist ein Widerspruch, denn die beiden Räume $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{il_i}$ und $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{jl_i}$ waren beide von Null verschieden.
Damit hat die rechte obere Matrix des $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ Raumes in jeder Zeile und Spalte höchstens einen Block $\neq 0$. Sei Q ein solcher Block, dann ist $Q = \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{ij}$ mit eindeutig bestimmtem Tupel (ij).
$\mathfrak{A}^1_{ii} + \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{ij} + \mathfrak{A}^0_{jj}$ ist ein direkter Summand von $\mathfrak{A}$. Wir wählen $f = Id_{\mathfrak{A}^1} - Id_{\mathfrak{A}^1_{ii}}$ und wenden dafür $\mathcal{STA}$ an. Folglich ist $\mathfrak{A}^1_{ii} + \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{ij} + \mathfrak{A}^0$ eine formal-reelle Jordan-Algebra, somit ist ebenfalls $\mathfrak{A}^1_{ii} + \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{ij} + \mathfrak{A}^0_{jj}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra. Der Raum ist demnach ein Produkt quasisymmetrischer Räume, das Diagramm spaltet auf (s. Definition 8.4.2) und es gilt q=1, im Widerspruch zur Voraussetzung.

I.2-*Fall*

Gilt nun $n = 2$, so ist die Argumentation von I.1 nicht mehr anwendbar. Es ergibt sich folgendes Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathfrak{A}_{11}^{1} & 0 & \mathfrak{A}_{13}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{14}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{1,3+t}^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \mathfrak{A}_{22}^{1} & \mathfrak{A}_{23}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{24}^{\frac{1}{2}} & \cdots & \mathfrak{A}_{2,3+t}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}_{31}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{32}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{33}^{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}_{41}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{42}^{\frac{1}{2}} & 0 & \mathfrak{A}_{44}^{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}_{3+t,1}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{3+t,2}^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}_{3+t,3+t}^{0} \end{array}\right).$$

Mit $f = Id_{\mathfrak{A}_{11}^{1}}$ wenden wir $\mathcal{STA}$ an. Aus dem zweiten Struktursatz folgt dann, daß mit einer Ausnahme alle Räume $\mathfrak{A}_{2i}^{\frac{1}{2}}$, $i \in \{3, ..., 3+t\}$ verschwinden.
Wählen wir $f = Id_{\mathfrak{A}_{22}^{1}}$ in $\mathcal{STA}$, so sind als Folge des zweiten Struktursatzes, ebenfalls bis auf einen Raum ausgenommen, alle Räume $\mathfrak{A}_{1j}^{\frac{1}{2}}$, $j \in \{3, ..., 3+t\}$ identisch Null. Folglich spaltet das Diagramm von $\mathfrak{A}$ auf, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Seien $\mathfrak{A}_{2i}^{\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{A}_{1j}^{\frac{1}{2}}$ für feste $i, j \in \{3, ..., 3+t\}$ die nicht verschwindenden Räume. Es ergeben sich also zwei Möglichkeiten, entweder gilt $i = j$ oder $i \neq j$.
Sei zuerst $i \neq j$, so können wir wie im Fall $n \geq 3$ vorgehen und das gesamte Diagramm aufspalten. Es resultiert ein Produkt quasisymmetrischer Räume, was ein Widerspruch zu q=2 ist.
Gilt nun $i = j$, dann können wir den Teil abspalten, in dem die Räume $\mathfrak{A}_{so}^{\frac{1}{2}} = 0$ für $s = 1, 2$ sind. Nach evtl. Umnummerierung resultiert ein Faktor mit der Algebra:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathfrak{A}_{11}^{1} & 0 & \mathfrak{A}_{13}^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \mathfrak{A}_{22}^{1} & \mathfrak{A}_{23}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}_{31}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{32}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{33}^{0}. \end{array}\right).$$

Könnte man diese Algebra aufspalten, so wären alle Faktoren quasisymmetrische Siegelgebiete, im Widerspruch zu q=2.
Diese Algebra gehört jedoch nicht zum I.2-Fall, was der Voraussetzung widerspricht; also tritt der I.2-Fall nicht auf.

II-*Fall*

Sei wieder $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}_{11}^1 \oplus ... \oplus \mathfrak{A}_{nn}^1$ und $\mathfrak{A}^0$ sei nun einfach; demnach gehört zu $\mathfrak{A}$ das folgende Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathfrak{A}^1_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+1} \\ 0 & \mathfrak{A}^1_{22} & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{2,n+1} \\ 0 & 0 & \mathfrak{A}^1_{33} & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+1} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,1} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,2} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,3} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} \end{array}\right).$$

II.1-*Fall*

Sei zunächst $n \geq 3$. Wir wählen in dieser Situation die Idempotenten $f_i = Id_{\mathfrak{A}^1_{ii}}$ für $i \in \{1, ..., n\}$ und wenden $\mathcal{STA}$ an. Das zu der formal-reellen Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_0(f_i)$ gehörende Diagramm entspricht:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathfrak{A}^1_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,n+1} \\ 0 & \mathfrak{A}^1_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{2,n+1} \\ . & . & \ddots & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{i-1,i-1} & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i-1,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^1_{i+1,i+1} & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{i+1,n+1} \\ . & . & \cdots & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+1} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,1} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,2} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,i-1} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,i+1} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} \end{array}\right).$$

Es gilt in $\mathfrak{A}_0(f_i)$, daß $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j_1,n+1} \circ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j_2,n+1} \subset \mathfrak{A}^1_{j_1 j_2} = 0$, für $j_1 \neq j_2$ mit $j_1, j_2 \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$. Nach dem zweiten Struktursatz gilt entweder $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j_1,n+1} = 0$ oder $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j_2,n+1} = 0$. In $\mathfrak{A}_0(f_i)$ entsprechen, bis auf eine Ausnahme, alle Räume $\{\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{j,n+1}\}$ mit $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{i\}$ dem Nullraum.
Es ergibt sich daraus nach evtl. Umnummerierung das folgende Bild für $\mathfrak{A}_0(f_i)$:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \mathfrak{A}^1_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{A}^1_{22} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \ddots & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{i-1,i-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{A}^1_{i+1,i+1} & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & \cdots & . & . & \ddots & . & . \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^1_{nn} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n,n+1} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{n+1,n} & \mathfrak{A}^0_{n+1,n+1} \end{array}\right).$$

Das Verschwinden der Räume hat die entsprechende Konsequenz im Diagramm von $\mathfrak{A}$. Folglich spaltet $\mathfrak{A}$ auf, d.h. die zugehörigen Siegelgebiete sind Produkte, im Widerspruch zur Annahme. Der Fall $n \geq 3$ tritt demzufolge nicht auf.

II.2-*Fall*
Sei nun $n = 2$, dann gehört zu der Algebra $\mathfrak{A}$ das folgende Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{cc|c} \mathfrak{A}_{11}^{1} & 0 & \mathfrak{A}_{13}^{\frac{1}{2}} \\ 0 & \mathfrak{A}_{22}^{1} & \mathfrak{A}_{23}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}_{31}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{32}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{33}^{0} \end{array}\right).$$

In einer solchen Situation können wir nicht wie im II.1-Fall reduzieren. In dem Diagramm sind $\mathfrak{A}_{11}^{1}, \mathfrak{A}_{22}^{1}, \mathfrak{A}_{33}^{0}$ einfache formal-reelle Jordan-Algebren und $\mathfrak{A}_{13}^{\frac{1}{2}} \neq 0, \mathfrak{A}_{23}^{\frac{1}{2}} \neq 0$, weil wir voraussetzen, daß die betrachteten Diagramme nicht aufspalten.
Sei zuerst der Fall betrachtet, bei dem sowohl $\mathfrak{A}_{11}^{1}$ als auch $\mathfrak{A}_{22}^{1}$ isomorph zu $\mathbb{R}$ sind. Dabei ist o.E. der Rang r_3 von $\mathfrak{A}_{33}^{0} \geq 2$, da wir sonst ein Gebiet vom Rang $= 3$ hätten; ein solches Gebiet mit n.p.h.B. ist wegen Satz 9.2.4 schon quasisymmetrisch (s. auch Abschnitt 9.2) und dies ist ein Widerspruch zu q=2.
Wir wenden $\mathcal{STA}$ für $f_i = Id_{\mathfrak{A}_{ii}^{1}}$, $i = 1, 2$ an und erhalten jeweils eine formal-reelle Jordan-Algebra

$$\mathfrak{A}_0(f_i) \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R} & \mathfrak{A}_{i3}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}_{3i}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}_{33}^{0} \end{array}\right).$$

Aufgrund des zweiten Struktursatzes (s. Satz 4.2.1) ist $\mathfrak{A}_0(f_i)$ die Summe einfacher formal-reeller Jordan-Algebren.
Da nun $\mathfrak{A}$ nicht aufspaltet, weil das zugehörige Siegelgebiet irreduzibel ist, gilt für alle Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}_{i3}^{\frac{1}{2}}$ zugeordnet werden, daß sie die gleiche von Null verschiedene Dimension haben (s. auch Lemma 9.1.4). Da $r_3 \geq 2$ gilt, gibt es mindestens einen Raum 2. Art, der $\mathfrak{A}_{33}^{0}$ zugeordnet wird. Wegen des ersten Struktursatzes 4.1.2 haben die $\mathfrak{A}_{33}^{0}$ zugeordneten Räume 2. Art alle die gleiche von Null verschiedene Dimension.
Folglich ist $\mathfrak{A}_0(f_i)$ nicht die Summe von mindestens zwei einfachen formal-reellen Jordan-Algebren, sondern $\mathfrak{A}_0(f_i)$ ist selbst eine einfache formal-reelle Jordan-Algebra. Dadurch erhalten wir aber als Folge des ersten Struktursatzes, daß alle Räume 2. Art, die $\mathfrak{A}_0(f_i)$ zugeordnet werden, die gleiche Dimension haben.
Da dies für $i = 1, 2$ gilt, folgt daraus insgesamt, daß alle Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}_{13}^{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{A}_{23}^{\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{A}_{33}^{0}$ gehören, die gleiche Dimension haben, wobei hier $r_3 \geq 2$ eingeht. Die Voraussetzungen des Lemmas 11.3.1 sind also erfüllt und somit liefert Lemma 11.3.1 einen Widerspruch zur angenommenen Existenz der n.p.h.B..

Ohne Einschränkung sei $\mathfrak{A}_{22}^{1} \neq \mathbb{R}$, folglich gibt es mindestens zwei Idempotente f_1 und $f_2 := Id_{\mathfrak{A}_{22}^{1}} - f_1$ in $\mathfrak{A}_{22}^{1}$. Für f_1 wählen wir ein primitives Idempotent eines

s-VOS von $\mathfrak{A}$, das zu $\mathfrak{A}^1_{22}$ gehört. $\mathfrak{A}_0(f_1)$ ist eine formal-reelle Jordan-Algebra wegen $\mathcal{STA}$.
Da das Diagramm von $\mathfrak{A}$ der Peirce-Zerlegung nach den Einselementen der einfachen formal-reellen Jordan-Algebren der Diagonalelemente entspricht, folgt, daß das *s-VOS* jeden Block des Diagramms von $\mathfrak{A}$ weiter zerlegt, so daß offensichtlich $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{23} \cap \mathfrak{A}_0(f_1) \neq 0$ gilt und wir $a^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{23} \cap \mathfrak{A}_0(f_1)$ beliebig, aber fest wählen können. Des weiteren sei $b^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13}$ ein beliebiges Element. Das Produkt $a^{\frac{1}{2}} \circ b^{\frac{1}{2}} = 0$, wie man aus dem Diagramm entnimmt. Daraus läßt sich schließen, daß $a^{\frac{1}{2}} \circ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13} = 0$ (symbolische Schreibweise) gilt und da $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13} \neq 0$ (sonst hätten wir ein Produkt), folgt mit dem zweiten Struktursatz $a^{\frac{1}{2}} = 0$.
Ersetzt man in diesem Argument f_1 durch f_2, so sind auch alle $a^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{23} \cap \mathfrak{A}_0(f_2)$ gleich Null. Insgesamt haben wir jetzt $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{23} = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung, denn das Diagramm von $\mathfrak{A}$ sollte nicht aufspalten. Der Rang von $\mathfrak{A}^1_{22}$ kann folglich nicht größer gleich Zwei sein.

III-*Fall*

Nun sind $\mathfrak{A}^1$ bzw. $\mathfrak{A}^0$ einfach. Deren Rang bezeichnen wir mit r_1 bzw. r_0. Wir wissen, daß das Diagramm von $\mathfrak{A}$ nicht aufspaltet, d.h. $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \neq 0$. Satz 9.1.2 liefert, daß alle Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehören, die gleiche von Null verschiedene Dimension $c_{\frac{1}{2}}$ aufweisen. Wegen Tsuji's Theorem 3 [$\mathcal{TS}$91], siehe Satz 9.2.4, genügt es, solche Algebren vom $Rang(\mathfrak{A}) > 3$, also $r_1 + r_0 > 3$, zu betrachten.

III.1-*Fall*, $r_1 \geq 2$

Gilt $r_0 = 1$, so folgt $r_1 > 2$. Wir wenden für die primitiven Idempotenten $f_i \subset \mathfrak{A}^1$, $i \in \{1, ..., r_1\}$, die eine Teilmenge eines *s-VOS* von $\mathfrak{A}$ bilden und zu $\mathfrak{A}^1$ gehören, $\mathcal{STA}$ an. Da die Faserräume quasisymmetrisch und somit die Algebren $\mathfrak{A}_0(f_i)$ formal-reelle Jordan-Algebren sind, folgt sogar, weil $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \neq 0$ gilt, daß die Algebren $\mathfrak{A}_0(f_i)$ einfache formal reelle-Jordan Algebren sind.
Deshalb können wir den ersten Struktursatz anwenden und wir sehen dadurch, daß die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ und $\mathfrak{A}^1$ gehören, die gleiche von Null verschiedene Dimension haben.
Mit den gleichen Argumenten wie in Satz 11.3.4 folgt, daß $\mathfrak{A}$ zu einem quasisymmetrischen Gebiet gehört, also gilt q=1. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung q=2.
Gilt $r_0 \geq 2$ und $r_1 \geq 2$, dann folgt mit $\mathcal{STA}$, angewandt für die primitiven Idempotenten f_i mit $i \in \{1, ..., r_1\}$ von $\mathfrak{A}^1$, daß die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^0$ und $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}$ gehören, alle die gleiche Dimension haben. Wie nun aus Satz 11.3.4 folgt, ist das Gebiet quasisymmetrisch, im Widerspruch zu q=2. Demnach tritt auch dieser Fall nicht auf.

III.2-*Fall*
Sei $r_1 = 1$ und $r_0 \geq 3$. Nach dem ersten Struktursatz ist $\mathfrak{A}^1 \cong \mathbb{R}$; es ergibt sich also das folgende Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{R} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}} & \mathfrak{A}^0 \end{array}\right).$$

Hier können wir Satz 11.2.2 anwenden und es resultiert ein Widerspruch zur Voraussetzung q=2.

IV-*Fall*
Als letzter Fall verbleibt derjenige, in dem $\mathfrak{A}^1$ einfach ist und $\mathfrak{A}^0$ mehr als zwei Faktoren besitzt; so ergibt sich das folgende Diagramm:

$$\mathfrak{A} \sim \left(\begin{array}{c|cccc} \mathfrak{A}^1_{11} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{12} & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{13} & \cdots & \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1,t+1} \\ \hline \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{21} & \mathfrak{A}^0_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{31} & 0 & \mathfrak{A}^0_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{t+1,1} & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{t+1,t+1}. \end{array}\right).$$

IV.1-*Fall*
Sei nun der Rang von $\mathfrak{A}^1 \geq 2$ und $\mathfrak{A}^0$ habe $t \geq 2$ Faktoren. Die Räume 2. Art, die einem $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i}$ mit $i \in \{2, ..., t+1\}$ zugeordnet werden, haben alle die gleiche, von Null verschiedene Dimension (s. Lemma 9.1.3). Wäre die Dimension der Räume 2. Art in einem $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i}$ Raum Null, so wäre das zugehörige Siegelgebiet ein Produkt im Widerspruch zur Annahme, da die betrachteten Siegelgebiete irreduzibel sein sollen.
Das Diagramm von $\mathfrak{A}$ spaltet nicht auf (s. Definition 8.4.2). Sei f_l ein primitives Idempotent von $\mathfrak{A}^1_{11}$ (zu einem s-*VOS* von $\mathfrak{A}$ gehörend), dann sei $f := Id_{\mathfrak{A}^1_{11}} - f_l$. Folglich ist $\mathfrak{A}_0(f)$ nach dem üblichen Reduktionsschluß $\mathcal{STA}$ eine formal-reelle Jordan-Algebra und es gilt:

$$\mathfrak{A}_0(f) \sim \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbb{R} & \tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{12} & \cdots & \tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1,t+1} \\ \hline \tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{12} & \mathfrak{A}^0_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{t+1,1} & 0 & \cdots & \mathfrak{A}^0_{t+1,t+1} \end{array}\right).$$

Wegen der besonderen Wahl von f folgt $\tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1i} \subset \mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i}$, $\forall i \in \{2, ..., t+1\}$, und $\tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1i}$ bezeichnet den entsprechenden Anteil von $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i}$, der auch in $\mathfrak{A}_0(f)$ enthalten ist.

Nun gilt $\tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1i} \circ \tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1j} \subset \mathfrak{A}^0_{ij}$, $i \neq j$ mit $i,j \in \{2,...,t+1\}$ und $\mathfrak{A}^0_{ij} = 0$. Nach dem zweiten Struktursatz gilt deshalb $\tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1i} = 0$ oder $\tilde{\mathfrak{A}}^{\frac{1}{2}}_{1j} = 0$, dann ist aber auch $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i} = 0$ oder $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1j} = 0$, da die Räume 2. Art, die zu $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1i}$ bzw. $\mathfrak{A}^{\frac{1}{2}}_{1j}$ gehören, jeweils die gleiche Dimension haben (s. Lemma 9.1.3). Es resultiert daraus, daß das Diagramm aufspaltet, im Widerspruch zur Voraussetzung.
$\mathfrak{A}^0$ ist also einfach, was der Annahme des betrachteten Falls widerspricht. Insgesamt tritt der IV.1-Fall nicht auf.

Schließlich kann $\mathfrak{A}^1$ den Rang Eins haben und somit sind wir bei unserem letzten Fall.

IV.2-*Fall*

Verbleibt als einziger Fall derjenige, bei dem der Rang von $\mathfrak{A}^1$ Eins ist und $\mathfrak{A}^0$ mehrere Faktoren besitzt. Dann können wir Satz 11.2.5 anwenden und erhalten, daß ein zugehöriges homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ positive holomorphe Bischnittkrümmungsrichtungen hat.

Damit existiert kein Siegelgebiet $\mathcal{S}$ mit q=2 und n.p.h.B.. Der Fall $q \geq 3$ kann nun wegen Satz 12.1.1 nicht mehr auftreten und der Satz ist gezeigt. $\square$

Mit Satz 12.2.1 und Satz 7.2.5 erhalten wir eine neue geometrische Charakterisierung quasisymmetrischer Siegelgebiete.
Diese entspricht der Charakterisierung der symmetrischen Siegelgebiete durch die Schnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik (s. (Sym.7) des Satzes 7.3.1).

Satz 12.2.2 *Ein homogenes Siegelgebiet $\mathcal{S}$ hat genau dann nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik, wenn es quasisymmetrisch ist.*

Eine einfache Folgerung aus Satz 12.2.2 ist:

Satz 12.2.3 *Ein Tubengebiet hat nicht-positive holomorphe Bischnittkrümmung bzgl. der Bergmannmetrik dann und nur dann, wenn es hermitesch-symmetrisch ist.*

Beweis:
„ $\Rightarrow$ “ Aus Satz 12.2.2 folgt, daß das Gebiet quasisymmetrisch ist. Jedes quasisymmetrische Tubengebiet ist aber schon symmetrisch.
„ $\Leftarrow$ “ Die Schnittkrümmung ist nicht-positiv (s. Satz 7.3.1 u. (8.1.δ)). □

Diejenigen Tubengebiete, welche hermitesch-symmetrische Räume sind, geben wir in der nachfolgenden Tabelle 3 an. Eine solche Liste erhält man z.B. durch einen Vergleich der Liste aller hermitesch-symmetrischen Räume (s. Tabelle 4 oder auch [$\mathcal{BE}$] Tabelle 3, S.315) mit der Tabelle 2, S.63.

Tabelle 3: **Hermitesch-symmetrische Tubengebiete**

Bez.	*Rang* $= r$	*Raum*
A III	≥ 3	$SU(r,r)/S(U(r)\times U(r))$
A IV	1	$SU(1,1)/S(U(1)\times U(1))$
BD I	2	$SO_0(2,2+m)/SO(2)\times SO(2+m),\ m\in\mathbb{N}$
D III	≥ 3	$SO^*(4r)/U(2r)$
C I	≥ 3	$Sp(r,\mathbb{R})/U(r)$
E VII	3	$E_7^{-25}/E_6\times SO(2)$

Tabelle 4: **Hermitesch-symmetrische Räume**

Bez.	G	H	$dim_{\mathbb{R}}(G/H)$	*Rang*	*geometrische Interpretation*
A III	$SU(p,q)$	$S(U(p)\times U(q))$ $p\leq q$ $p=1$	$2pq$ $2q$	$min\{p,q\}$ 1	komplexe Grassmannsche Mflt. komplex hyperbolischer Raum
BD I	$SO_0(2,q)$	$SO(2)\times SO(q)$	$2q$	2	reelle Grassmannsche Mflt. positiver $\mathbb{R}^2$'s in $\mathbb{R}^{2,q}$
D III	$SO^*(2r)=$ $SO(r,\mathbb{H})$	$U(r)$	$r(r-1)$	$[\frac{r}{2}]$♣	Menge der quaternionischen quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^{2r}$
C I	$Sp(r,\mathbb{R})$	$U(r)$	$r(r+1)$	r	Menge der Lagrange Unterräume von $\mathbb{R}^{2r}$
E III	E_6^{-14}	$SO(10)\times SO(2)$	32	2	Rosenfelds hyperbolische projektive Fläche $(\mathbb{C}\times\mathbb{O})P^2_{hyp}$
E VII	E_7^{-25}	$E_6\times SO(2)$	54	3	Menge der $(\mathbb{C}\times\mathbb{O})P^2_{hyp}$ in $(\mathbb{H}\times\mathbb{O})P^2_{hyp}$

(♣[.] ist die Gaußklammer).

Anhang

A Ein ausführliches Beispiel

Wir werden in diesem Abschnitt an einem Beispiel ausführen, was wir zum Teil in allgemeiner Form in dieser Arbeit erläutert haben. Dies führen wir hier mit besonderem Blickpunkt auf diejenigen Leser aus, denen die Siegelgebiete und damit verknüpfte Begriffsbildungen weniger vertraut sind. Dazu betrachten wir ein Siegelgebiet über dem Kegel $\Omega = Pos(2,\mathbb{R})$ der komplexen Dimension Fünf.

A.1 Ein $Pos(2,\mathbb{R})$ Beispiel

Wir realisieren eine Basis einer normalen J-Algebra des Beispiels als Matrizen und berechnen deren Kommutatoren und kovariante Ableitungen bzgl. einer beliebigen linksinvarianten Riemannschen Metrik.

Das Siegelgebiet $\mathcal{S}_{II}$

Sei $\Omega = Pos(2,\mathbb{R}) \subset Sym(2,\mathbb{R}) = V$ (s. auch (3.1.B1)), dann identifizieren wir V in kanonischer Weise mit dem $\mathbb{R}^3$, indem wir

$$V \ni \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$$

zuordnen. Die entsprechende Identifizierung nehmen wir für $V^{\mathbb{C}}$ mit dem $\mathbb{C}^3$ vor. Wir betrachten nun die Abbildung $F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ mit

$$(z, w) \mapsto (z_1\overline{w_1}, z_2\overline{w_2}, \tfrac{1}{2}(z_1\overline{w_2} + \overline{w_1}z_2))^t.$$

F erfüllt offensichtlich die Bedingungen (6.2.h1-h4), und wir können nun das folgende Siegelgebiet $\mathcal{S}_{II}$ (s. Definition 6.2.3) betrachten, das durch

$$\mathcal{S}_{II} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 | Imz - F(w, w) \in \Omega\}$$

gegeben ist. $\mathcal{S}_{II}$ ist ein nicht symmetrisches *IQS*.

Eine zugehörige normale J-Algebra $\mathfrak{s}$

Der Rang von $\mathcal{S}_{II}$ ist Zwei (s. (8.3.f)). Daraus und mit den Ergebnissen des Abschnitts 6.5 sieht man leicht, daß eine zu $\mathcal{S}_{II}$ gehörende normale J-Algebra $\mathfrak{s}$ (s. Definition 6.3.1 und (6.4.Z3)) gegeben ist durch:

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{n}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)} \oplus \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)} \oplus \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_1} \oplus \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_2}.$$

Den reellen Dimensionen der Wurzelräume entsprechend ordnen wir reelle Basisvektoren zu, die wir folgendermaßen bezeichnen:

$$\mathfrak{a} = span\{A_1, A_2\},\ \mathfrak{n}_{\alpha_i} = span\{X_i\}\ i = 1,2,\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)} = span\{Y_t\},$$
$$\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_2)} = span\{X_t\},\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_1} = span\{C_{11}, C_{12}\},\ \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_2} = span\{C_{21}, C_{22}\}.$$

Matrizenrealisierung der Basiselemente

Für die so bezeichneten Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{s}$ ergibt sich somit die folgende Matrizendarstellung (s. dazu (6.4.Z4)):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1(b_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2i\overline{b_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\overline{b_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_1}, \; b_1 \in \mathbb{C},$$

$$C_2(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2i\overline{b_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\overline{b_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_2}, \; b_2 \in \mathbb{C}.$$

Wir setzen $b_1 = b_{11} + ib_{12}$, $b_2 = b_{21} + ib_{22}$ mit $b_{ij} \in \mathbb{R}$, somit folgt $C_1(b_1) = C_1(b_{11}, b_{12})$ und $C_2(b_2) = C_2(b_{21}, b_{22})$. Dabei nutzten wir aus, daß

$$F_b(w) := 2iF(w,b) = 2i \begin{pmatrix} \overline{b_1} & 0 \\ 0 & \overline{b_2} \\ \frac{1}{2}\overline{b_2} & \frac{1}{2}\overline{b_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

gilt, was wir in (6.4.Z4) entsprechend eingesetzt haben.

Reellifizierung

Es gilt $\qquad LieAff(\mathcal{S}_{II}) \subset LieAff(\mathbb{C}^5) \subset Mat(6,\mathbb{C}) \subset Mat(12,\mathbb{R}),$

wobei die Einbettungen wie folgt vorgenommen werden:

$$
\begin{aligned}
LieAff(\mathcal{S}_{II}) \subset (Mat(5,\mathbb{C}),\mathbb{C}^5) &\hookrightarrow \begin{pmatrix} Mat(5,\mathbb{C}) & \mathbb{C}^5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\hookrightarrow \begin{pmatrix} ReMat(5,\mathbb{C}) & -ImMat(5,\mathbb{C}) & Re\mathbb{C}^5 & -Im\mathbb{C}^5 \\ ImMat(5,\mathbb{C}) & ReMat(5,\mathbb{C}) & Im\mathbb{C}^5 & Re\mathbb{C}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dementsprechend können wir die obigen Matrizen durch reelle 12×12 Matrizen repräsentieren. Diese geben wir hier nicht an. Wir wählen die folgenden reellen Matrizen als Repräsentanten von C_1 bzw. C_2, indem wir $C_{11} = C_1(1,0)$, $C_{12} = C_1(0,1)$ bzw. $C_{21} = C_2(1,0)$, $C_{22} = C_2(0,1)$ setzen.

Lie-Klammerprodukte

Die Berechnung der Lie-Klammerprodukte für die gewählten reellen Basiselemente ergibt (s. auch (6.4.Z2-Z3)):

Tabelle der Lie-Klammerprodukte

[,]	X_1	A_1	A_2	X_2	Y_t	X_t	C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{21}
X_1	0	$-X_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
A_1	X_1	0	0	0	$\frac{1}{2}Y_t$	$\frac{1}{2}X_t$	$\frac{1}{2}C_{11}$	$\frac{1}{2}C_{12}$	0	0
A_2	0	0	0	X_2	$-\frac{1}{2}Y_t$	$\frac{1}{2}X_t$	0	0	$\frac{1}{2}C_{22}$	$\frac{1}{2}C_{21}$
X_2	0	0	$-X_2$	0	$-X_t$	0	0	0	0	0
Y_t	0	$-\frac{1}{2}Y_t$	$\frac{1}{2}Y_t$	X_t	0	$-X_1$	0	0	C_{12}	C_{11}
X_t	0	$-\frac{1}{2}X_t$	$-\frac{1}{2}X_t$	0	X_1	0	0	0	0	0
C_{11}	0	$-\frac{1}{2}C_{11}$	0	0	0	0	0	$-4X_1$	$-2X_t$	0
C_{12}	0	$-\frac{1}{2}C_{12}$	0	0	0	0	$4X_1$	0	0	$2X_t$
C_{22}	0	0	$-\frac{1}{2}C_{22}$	0	$-C_{12}$	0	$2X_t$	0	0	$4X_2$
C_{21}	0	0	$-\frac{1}{2}C_{21}$	0	$-C_{11}$	0	0	$-2X_t$	$-4X_2$	0

Die komplexe Struktur J

Die komplexe Struktur (s. (1.1.c-d)) $J : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ ist wie folgt auf den Basiselementen definiert:

$$JY_t := X_t, JX_1 := A_1, JX_2 := -A_2, JC_{11} := C_{12}, JC_{22} := C_{21}.$$

Die so definierte komplexe Struktur erfüllt die Integrabilitätsbedingung (1.1.d). Dazu zeigt man z.B. zuerst unter Zuhilfenahme der Tabelle der Lie-Klammerprodukte, daß (1.1.d) für beliebige Paare von Basisvektoren erfüllt wird. Daraus folgt dann aufgrund der Linearität der Lie-Klammer, daß (1.1.d) für jedes Paar von Vektoren aus $\mathfrak{s}$ erfüllt wird.

Kovariante Ableitungen

Für die kovarianten Ableitungen (s. (8.1.K1)) der wie oben gewählten reellen Basiselemente erhalten wir bzgl. einer linksinvarianten Riemannschen Metrik die nachstehenden Tabellen. Dabei ist die Metrik nicht notwendigerweise eine Kählermetrik, sondern wir lassen zu, daß X und JX verschiedene Längen haben. Die den Basiselementen entsprechenden kleinen Buchstaben mit der gleichen Indizierung stehen für die Längen der Basiselemente bzgl. der jeweils betrachteten linksinvarianten Metrik.

Tabellen der kovarianten Ableitungen

∇	X_1	A_1	A_2	X_2	Y_t	X_t
X_1	$A_1\frac{x_1}{a_1}$	$-X_1$	0	0	$\frac{1}{2}X_t\frac{x_1}{x_t}$	$-\frac{1}{2}Y_t\frac{x_1}{y_t}$
A_1	0	0	0	0	0	0
A_2	0	0	0	0	0	0
X_2	0	0	$-X_2$	$A_2\frac{x_2}{a_2}$	$-\frac{1}{2}X_t$	$\frac{1}{2}Y_t\frac{x_t}{y_t}$
Y_t	$\frac{1}{2}X_t\frac{x_1}{x_t}$	$-\frac{1}{2}Y_t$	$\frac{1}{2}Y_t$	$\frac{1}{2}X_t$	$\frac{1}{2}(A_1\frac{y_t}{a_1} - A_2\frac{y_t}{a_2})$	$-\frac{1}{2}(X_1 + X_2\frac{x_t}{x_2})$
X_t	$-\frac{1}{2}Y_t\frac{x_1}{y_t}$	$-\frac{1}{2}X_t$	$-\frac{1}{2}X_t$	$\frac{1}{2}Y_t\frac{x_t}{y_t}$	$\frac{1}{2}(X_1 - X_2\frac{x_t}{x_2})$	$\frac{1}{2}(A_1\frac{x_t}{a_1} + A_2\frac{x_t}{a_2})$
C_{11}	$2C_{12}\frac{x_1}{c_{12}}$	$-\frac{1}{2}C_{11}$	0	0	$-\frac{1}{2}C_{21}\frac{c_{11}}{c_{22}}$	$C_{22}\frac{x_t}{c_{22}}$
C_{12}	$2C_{11}\frac{x_1}{c_{11}}$	$-\frac{1}{2}C_{12}$	0	0	$-\frac{1}{2}C_{22}\frac{c_{11}}{c_{22}}$	$-C_{21}\frac{x_t}{c_{21}}$
C_{22}	0	0	$-\frac{1}{2}C_{22}$	$-2C_{21}\frac{x_2}{c_{21}}$	$-\frac{1}{2}C_{12}$	$-C_{11}\frac{x_t}{c_{11}}$
C_{21}	0	0	$-\frac{1}{2}C_{21}$	$2C_{22}\frac{x_2}{c_{22}}$	$-\frac{1}{2}C_{11}$	$C_{12}\frac{x_t}{c_{12}}$

∇	C_{11}	C_{12}	C_{22}	C_{21}
X_1	$2C_{12}\frac{x_1}{c_{12}}$	$-2C_{11}\frac{x_1}{c_{11}}$	0	0
A_1	0	0	0	0
A_2	0	0	0	0
X_2	0	0	$-2C_{21}\frac{x_2}{c_{21}}$	$2C_{22}\frac{x_2}{c_{22}}$
Y_t	$\frac{1}{2}C_{21}\frac{c_{11}}{c_{21}}$	$\frac{1}{2}C_{22}\frac{c_{11}}{c_{22}}$	$\frac{1}{2}C_{12}$	$\frac{1}{2}C_{11}$
X_t	$-C_{22}\frac{x_t}{c_{22}}$	$C_{21}\frac{x_t}{c_{21}}$	$-C_{11}\frac{x_t}{c_{11}}$	$C_{12}\frac{x_t}{c_{12}}$
C_{11}	$\frac{1}{2}A_1\frac{c_{11}}{a_1}$	$-2X_1$	$-X_t$	$\frac{1}{2}Y_t\frac{c_{11}}{y_t}$
C_{12}	$2X_1$	$\frac{1}{2}A_1\frac{c_{11}}{a_1}$	$\frac{1}{2}Y_t\frac{c_{12}}{y_t}$	$2X_t$
C_{22}	X_t	$\frac{1}{2}Y_t\frac{c_{12}}{y_t}$	$\frac{1}{2}A_2\frac{c_{22}}{a_2}$	$2X_2$
C_{21}	$\frac{1}{2}Y_t\frac{c_{11}}{y_t}$	$-X_t$	$2X_2$	$\frac{1}{2}A_2\frac{c_{21}}{a_2}$

Ist die Metrik Kähler (s. Definition 1.1.1), so sind einige Koeffizienten gleich, d.h wir haben folgende Identitäten:

$$a_1 = x_1,\ a_2 = x_2,\ c_{11} = c_{12},\ c_{22} = c_{21},\ x_t = y_t.$$

Die Einsform ω

Eine zulässige 1-Form (s. Definition 6.3.1) $\omega : \mathfrak{s} \to \mathbb{R}$ ist durch $\omega = \omega_{16} + \omega_{26}$ gegeben, dabei sind die $\omega_{ij} \in \mathfrak{s}^*$, die $\omega_{ij}(E_{kt}) = \delta_{ik}\delta_{jt}$ erfüllen. Je nach Wahl der Basis von $\mathfrak{s}$ sind entsprechende Skalierungen möglich. E_{ij} mit $0 \leq i, j \leq 6$ bezeichnet die Matrix, die nur in der ij-ten Stelle (i-ten Zeile, j-ten Spalte) einen von Null verschiedenen Eintrag hat, der Eins ist. Diese Matrizen bilden eine $\mathbb{C}$-Basis für den komplexen Vektorraum der 6×6-$\mathbb{C}$-Matrizen.

Daß keine zulässige Kählermetrik nicht-positiver Krümmung auf $\mathfrak{s}$ existiert, folgt unmittelbar aus Satz A.2.1. Es ist jedoch nicht ohne weiteres klar, ob auch keine hermitesche Metrik mit nicht-positiver Schnittkrümmung existiert.

A.2 Existenz zulässiger Metriken n.p.S.

Auf den Siegelgebieten gibt es Kählermetriken (s. Definition 1.1.1), die mit einer 1-Form ω zusammenhängen. Solche Metriken nennt man zulässig. Die Bergmannmetrik gehört zu diesem Typ von Kählermetriken (s. Abschnitt 8.2).
Es werden ein paar Aussagen über das Krümmungsverhalten von $\mathcal{S}$ bzgl. einer zulässigen Metrik gemacht.

Sei $\mathcal{S}$ ein Siegelgebiet und $\mathfrak{s}$ eine dazugehörige normale J-Algebra. In [$\mathcal{DA}$80] zeigt D'Atri, daß es keine zulässige Metrik nicht-positiver Schnittkrümmung (kurz n.p.S.) geben kann, wenn die Dimensionen der Wurzelräume von $\mathfrak{s}$ gewisse Bedingungen erfüllen. Genauer zeigte er:

Satz A.2.1 *Sei $(\mathfrak{s}, \omega)$ eine normale J-Algebra eines Siegelgebiets $\mathcal{S}$, so daß die Wurzelräume $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_m}$, $\mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\alpha_n}$, $\mathfrak{n}_{\frac{(\alpha_m-\alpha_n)}{2}}$ jeweils existieren. Zudem soll gelten, daß die reelle Dimension von $\mathfrak{n}_{\frac{(\alpha_m-\alpha_n)}{2}}$ gleich Eins ist.*
Dann besitzt die zu ω korrespondierende linksinvariante Metrik auf $\mathcal{S}$ positive Schnittkrümmungsrichtungen.

Bemerkung:
(A.2.$\boldsymbol{\alpha}$) Dieses Ergebnis wurde von D'Atri mit annähernd gleichen Voraussetzungen verbessert ([$\mathcal{DA}$81] Korollar, S.13), allerdings darf nun $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{n}_{\frac{(\alpha_m-\alpha_n)}{2}}$ einer beliebigen ungeraden Natürlichen Zahl entsprechen.
Im allgemeinen können wir nicht erwarten, eine zulässige Metrik mit nicht-positiver Schnittkrümmung auf unserem Raum zu finden.

Korollar A.2.2 *Sowohl auf den echten IQS $\mathcal{S}$ (solche, die nicht symmetrisch sind), die mit den Kegeln Pos$(\nu, \mathbb{R})$, $\nu \geq 2$, als auch auf denjenigen IQS, die zu Kegeln $P(1, \nu-1)$, $\nu \geq 3$ mit $\nu - 2 \in \mathbb{N}_{ungerade}$ gehören, existieren keine zulässigen Metriken mit nicht-positiver Schnittkrümmung. Bei allen anderen echten IQS ist die Dimension der Räume 2. Art immer gerade.*

Beweis:
Nach Voraussetzung ist $\mathcal{S}$ ein echtes *IQS*; aufgrund dessen sind die Dimensionen

der Räume 1. Art alle von Null verschieden (die *IQS* Tubengebiete sind bekanntlich alle symmetrisch).
Für die irreduziblen quasisymmetrischen Siegelgebiete $\mathcal{S}$ können wir außerdem Satz 7.2.3 anwenden. Da die Dimension des Kegels $Pos(\nu, \mathbb{R})$ gleich $\frac{\nu^2+\nu}{2}$ ist und der Rang ν entspricht (s. auch (8.3.f)) folgt daraus, daß die Räume 2. Art alle die gleiche reelle Dimension haben, die Eins entspricht. Nun liefert Satz A.2.1 die Behauptung.
Für die Gebiete, die mit den angegebenen Kegeln $P(1, \nu-1)$ gebildet werden und für alle anderen ist die Argumentation analog, wobei wir auch die in (A.2.α) angegebene, für nicht-positive Schnittkrümmung notwendige Bedingung benutzten. $\square$

Bemerkung:

(A.2.β) Druetta zeigte allerdings in ihrer Arbeit [$\mathcal{DR}$96], daß es sehr wohl Siegelgebiete gibt, bei denen es möglich ist, eine zulässige Metrik und somit eine Kählermetrik mit nicht-positiver Schnittkrümmung zu konstruieren. Dies wird erreicht, indem man ω auf den $\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ geeignet festlegt bzw. variiert.
Bei dem von ihr betrachteten Siegelgebiet bzw. bei der zugehörigen normalen J-Algebra handelt es sich um eine Verallgemeinerung des Piatetsky-Shapiro Beispiels eines homogenen nicht symmetrischen Raumes (s. auch die Einleitung).

Zur Erzeugung einer zulässigen Metrik mit n.p.S. benutzt man die folgende Tatsache, die wir z.B. aus [$\mathcal{PA}$96] S.21 zitieren:

Lemma A.2.3 *Das Skalarprodukt $<\ ,\ >$ der normalen J-Algebra $(\mathfrak{s}, \omega)$ ist bereits durch seine Einschränkung auf $\sum_i \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ festgelegt.*
M.a.W. determinieren die Werte von ω auf den Basiselementen der $\mathfrak{n}_{\alpha_i}$ das Skalarprodukt.

Wir können nun den folgenden Satz formulieren:

Satz A.2.4 *Sei $\mathfrak{s}$ eine normale J-Algebra eines Siegelgebietes $\mathcal{S}$ und $S = exp(\mathfrak{s})$. Dann ist jede S-homogene Kählermetrik g eine zulässige Metrik.*

Ein elementarer Beweis:
Wir müssen zeigen, daß eine Einsform ω existiert, so daß für alle $X, Y \in \mathfrak{s}$ $\omega([JX, Y]) = g(X, Y)$ gilt.
Wir wählen dazu irgendeine Wurzelräumebasis $\{X_i\}$ aus $\mathfrak{s}$, das heißt eine solche, bei der jeder Basisvektor in einem Raum 1. oder 2. Art von $\mathfrak{s}$ enthalten ist. Diese Basen zu betrachten, ist im Kählerfall ausreichend, da bzgl. jeder Kählermetrik auf $\mathcal{S}$ die Wurzelräume jeweils senkrecht zueinander stehen (s. z.B. [$\mathcal{DO}$85*a*] S.300, [$\mathcal{PA}$96] S.17). Nachdem wir zuerst die Behauptung nur für Basiselemente zeigen, erhalten wir aufgrund der Linearitätseigenschaften von g bzw. ω die Aussage für beliebige Elemente aus $\mathfrak{s}$. Die Basisvektoren legen die Lie-Algebrenstruktur, d.h. die Strukturkonstanten, völlig fest.

Sei g nun eine beliebige Kählermetrik, dann stehen verschiedene Basisvektoren aus dem gleichen Wurzelraum nicht notwendigerweise senkrecht. Wir orthonormalisieren nun die Basis $\{X_i\}$ bzgl. g und bezeichnen die Basisvektoren wieder mit X_i. Es gilt also $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$.
Wenn g eine zulässige Metrik sein soll, dann muß eine Einsform

(1) $$\omega : \mathfrak{s} \to \mathbb{R}, \text{ mit } \omega|_{\mathfrak{s}\ominus\sum_i \mathfrak{n}_{\alpha_i}} = 0$$

existieren, bzgl. der die Basis $\{X_i\}$ orthonormal ist. Wir müssen folglich zeigen, daß wir ω so wählen können, daß $\forall X_i, X_j$ dieser Basis

(2) $$g(X_i, X_j) = \omega([JX_i, X_j])$$

gilt.
Da g eine Kählermetrik ist, gilt $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{s}$

(3) $$g([X,Y], JZ) + g([Y,Z], JX) + g([Z,X], JY) = 0.$$

Um (2) zu zeigen, führen wir die folgenden Schritte (a-c) aus:

(a) Sind X_i, X_j aus verschiedenen Wurzelräumen, dann gilt $[JX_i, X_j] \in \mathfrak{s}\ominus\sum_i \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ und wegen (1) folgt dann $g(X_i, X_j) = \omega([JX_i, X_j]) = 0$, also (2).
(b) Wenn nun $X_i \neq X_j$ von Null verschiedene Basisvektoren aus dem gleichen Wurzelraum sind, dann soll, falls sie zu einem Raum 1. Art gehören, zusätzlich $X_i \neq \pm JX_j$ gelten.
Wir wenden nun (3) für X_i, X_j an und erhalten:

$$g([JX_i, X_j], JZ) - g([X_j, Z], X_i) + g([Z, JX_i], JX_j) = 0.$$

Die letzten beiden Summanden sind aber nur dann evtl. von Null verschieden, wenn die Paare $[X_j, Z], X_i$ bzw. $[Z, JX_i], JX_j$ von Null verschieden sind und jeweils im gleichen Wurzelraum liegen. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn Z in $\mathfrak{a}$ liegt (s. Abschnitt 6.4). Aber X_i steht senkrecht auf X_j bzgl. g und $g(X_i, X_j) = g(JX_i, JX_j)$, somit verschwinden die letzten beiden Summanden. Es folgt, daß $\forall Z \in \mathfrak{s}$

$$g([JX_i, X_j], JZ) = 0,$$

gilt, woraus schließlich $[JX_i, X_j] = 0$ folgt, also auch $\omega([JX_i, X_j]) = 0$ und somit gilt auch für diese Basisvektoren (2). Dies ist offensichtlich für jedes beliebige ω erfüllt, d.h. solche Paare von Basisvektoren schränken die Wahlmöglichkeiten für ω nicht ein.
(c) Bleibt zu zeigen, daß ω so gewählt werden kann, daß für zwei beliebige o.E. verschiedene Basisvektoren X_i, X_j aus dem gleichen Wurzelraum $\omega([JX_i, X_i]) = \omega([JX_j, X_j])$ erfüllt wird.
Wir wenden wieder (3) für $X = JX_i - JX_j$ und $Y = X_i + X_j$ an und erhalten analog zu und mit (b), daß für alle $Z \in \mathfrak{s}$ $g([JX_i, X_i] - [JX_j, X_j], JZ) = 0$ gilt. Somit folgt $[JX_i, X_i] = [JX_j, X_j]$.
Da $\omega([JX_i, X_i]) = \lambda_i \omega(X_i)$ für alle Basisvektoren $X_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}$ gilt, können wir nun ω einfach definieren, via:

$$\omega(X_i) := \frac{1}{\lambda_i} g(X_i, X_i), \forall i \text{ mit } X_i \in \mathfrak{n}_{\alpha_i}.$$

Damit ist ω vollkommen bestimmt (s. Lemma A.2.3) und erfüllt alle geforderten Bedingungen.
Für alle $X, Y \in \mathfrak{s}$ folgt mit den entsprechenden Linearitätseigenschaften, daß $\omega([JX, Y]) = g(X, Y)$ gilt, und der Beweis des Satzes ist erbracht. □

Bemerkungen:

(A.2.γ) Dieser Satz wurde für jede Lie-Algebra einer einfach transitiv auf $\mathcal{S}$ operierenden Gruppe in [$\mathcal{DO}85a$] Theorem 1, S.302 gezeigt (wichtig dafür ist insbesondere Teil III in [$\mathcal{GVP}67$]). Dieses Ergebnis ergibt sich aus dem hier Angegebenen unter Zuhilfenahme der Deformationstheorie (s. auch Abschnitt 6.5). Die S-homogenen Kählermetriken eines Siegelgebietes $\mathcal{S}$ der Dimension n und des Ranges r werden folglich durch r Variable in $Pos(n, \mathbb{R}) \subset Sym^2(\mathbb{R}^n)$ parametrisiert.

(A.2.δ) Klar ist natürlich, daß jede zulässige Metrik eine S-homogene Kählermetrik ist. Demzufolge gilt die Umkehrung des Satzes A.2.4 (s. z.B. [$\mathcal{DR}96$] S.44).

(A.2.ϵ) Für Siegelgebiete ist die Theorie von Azencott & Wilson ([$\mathcal{AZWI}I$], [$\mathcal{AZWI}II$]) anwendbar. Daher wissen wir, daß mindestens eine S-homogene Riemannsche Metrik mit n.p.S. auf jedem Siegelgebiet existiert.

Bezeichnungen

B Bezeichnungen

Die angegebene Seitenzahl ist diejenige, bei der die Bezeichnung zum ersten Mal in der Arbeit benutzt, erklärt bzw. definiert wird.

Notation	Bedeutung	Seite
$\mathfrak{a}$	abelsche Lie-Algebra	52
$\mathfrak{A}$	Jordan- oder zu Ω assoziierte Algebra	10,15
$\mathfrak{A}^+, \mathfrak{A}^-$	assoziative Algebra mit speziellem Produkt	11
$\mathfrak{A}_z$	Mutation von $\mathfrak{A}$ nach z	20
$\mathfrak{A}_{ij}$	Unterraum von $\mathfrak{A}$	21
$\mathfrak{A}^{(l)}$	Unteralgebra von $\mathfrak{A}$	21
$\mathfrak{A}_{kk}$	formal-reelle Jordan-Algebren	24
$\mathfrak{A}_0(f)$	Algebra der Faser	88
$\mathfrak{A}_\nu(f)$	$\nu = 0, \frac{1}{2}, 1$ Peirce-Raum des Idempotents f	21
$Aff(\mathcal{S}_{II})$	affine Automorphismen von $\mathcal{S}_{II}$	48
$A(u)$	Linksmultiplikation in der Algebra $\mathfrak{A}$	10,17
$Aut(D)$	biholomorphe Automorphismen von D	4
$Aut(\mathcal{S}_{II})$	Automorphismen von $\mathcal{S}_{II}$	48
$Aut(TM)$	Automorphismenbündel von TM	1
$Aut(\Omega, \eta)$	Automorphismen von (Ω, η)	16
$B(v_1, u_1; v_2, u_2)$	Bergmannkern eines Siegelgebietes	25
$\mathcal{C}$	q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung	21
$\mathcal{C}^*$	duale q-$\mathfrak{K}$-Zerlegung	73
c_{ij}^k	Strukturkonstanten	69
$Cl_{p,o} = Cl_p$	Clifford-Algebra	101
D	beschränktes bzw. homogenes beschränktes Gebiet	2,4
D_e	Deformation	57
d_x	Dimension des reellen Darstellungsraumes	113
e	Einselement von $\mathfrak{A}$	21
f	Idempotent	20
F	Ω-hermitesche Form	47
$\mathfrak{g}$	Lie-Algebra der Automorphismen eines Siegelgebietes	54
$\mathfrak{g}_{aff}$	Lie-Algebra der affinen Automorphismen	54
$\mathfrak{g}_{ij}$	Teilräume der Lie-Algebra von $Y^{(1)}$	22
$GL(\mathcal{S}_{II})$	lineare Automorphismen von $\mathcal{S}_{II}$	49
$\mathfrak{H}(D)$	holomorphe Funktionen auf D, die in $L^2(D)$ liegen	3
$\mathcal{H}(n, \mathbb{K})$	hermitesche $n \times n$-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$	7
$h.b.G.$	**h**omogene **b**eschränkte **G**ebiete	4
$Hol(M)$	Holonomiegruppe von M	58
$Hol^0(M)$	Zusammenhangskomponente der Eins von $Hol(M)$	58
$Hom(TM)$	Homomorphismenbündel	1
IQS	**i**rreduzibles **q**uasisymmetrisches **S**iegelgebiet	vi,61

V	reeller Vektorraum	6,46
$V^{\mathbb{C}}$	Komplexifizierung von V	xvii,46
VOS	**v**ollständiges **o**rthogonales **S**ystem von Idempotenten	27
$[X,\nu,e]$	formal-reelle Jordan-Algebra des Lorentzlichtkegels	8,28
$\mathfrak{X}$	Vinberg-Kern	26
$Y^{(l)}$	rekonstruierter Kegel	23
$\mathcal{Z}(\mathfrak{A})$	Zentrum von $\mathfrak{A}$	13
∇	Levi-Civita-Zusammenhang	2
Δ_x^u	Richtungsableitung in x in Richtung u	16
$\Gamma(TM)$	$\mathcal{C}^\infty$-Schnitte von TM	1
Γ	diskrete Untergruppe	iii
Γ	Lie-Gruppe des aus $\mathfrak{A}$ rekonstruierten Kegels	22
Γ	zulässige Gruppe	49
σ	assoziative symmetrische Bilinearform	16
φ	Abbildung bzw. Darstellung	60
μ	Lebesgue-Maß	2
ρ	positiv-definite hermitesche Form	60
ι	Kegelinvariante	15
η	Kegelfunktion	16
η_B	η der Bergmannmetrik	25
ω	Einsform	51
Ω	regulärer bzw. homogener regulärer Kegel	6
Ω^σ	σ-dualer Kegel	6
$\Omega_\nu(f)$	Projektion des Kegels in $\mathfrak{A}_\nu(f)$	88
(Ω,η,e)	Tripel	16
Ω_V	Vinberg-Kegel	9
Ω_D	Dorfmeister-Kegel	9
Ω_3	Kegel vom q=3-Typ	37
(x,y,z)	Assoziator	13
$*$	Multiplikation in einer Mutation	20
$\circ$	Multiplikation in der Algebra $\mathfrak{A}$	10,17
II	zweite Fundamentalform	70

Literatur

Literatur

[$\mathcal{AR}$] N. Aronszajn: *Theory of reproducing kernels,* Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950) 337-404.

[$\mathcal{AZWI}I$] R. Azencott & E. N. Wilson: *Homogeneous manifolds with negative curvature. I,* Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976) 323-362.

[$\mathcal{AZWI}II$] R. Azencott & E. N. Wilson: *Homogeneous manifolds with negative curvature, Part II,* Amer. Math. Soc. **8**, No. 178 (1976) 1-101.

[$\mathcal{AZU}$85] K. Azukawa: *Curvature operator of the Bergmann metrik on a homogeneous bounded domain,* Tohoku Math. J. **37** (1985) 197-223.

[$\mathcal{AZU}$89] K. Azukawa: *Criteria for quasi-symmetricity and the holomorphic sectional curvature of homogeneous bounded domain,* Tohoku Math. J. **41** (1989) 489-506.

[$\mathcal{BE}$] A. Besse: *Einstein Manifolds,* Springer, 1987.

[$\mathcal{BO}$54] A. Borel: *Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954) 1147-1151.

[$\mathcal{BRKOE}$] H. Braun & M. Koecher: *Jordan-Algebren,* Springer, 1966.

[$\mathcal{CA}$35] E. Cartan: *Domaines bornes homogenes de l'espace de variables complexes,* Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **11** (1935) 116-162.

[$\mathcal{DA}$79] J. E. D'Atri: *Holomorphic sectional curvatures of bounded homogeneous domains and related questions,* Trans. Amer. Math. Soc. **256** (1979) 405-413.

[$\mathcal{DA}$80] J. E. D'Atri: *The curvature of homogeneous Siegel domains,* J. Differential Geom. **15** (1980) 61-80.

[$\mathcal{DA}$81] J. E. D'Atri: *Sectional curvatures and quasi-symmetric domains,* J. Differential Geom. **16** (1981) 11-18.

[$\mathcal{DDZ}$85] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister & Z. Yan Da: *The isotropie representation for homogeneous Siegel domains,* Pacific J. of Mathematics **120** (1985), No. 2, 295-236.

[$\mathcal{DADO}$88] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister: *Flat totally geodesic submanifolds of quasisymmetric Siegel domains,* Geometriae Dedicata **28** (1988) 321-336.

[$\mathcal{DADO}$90] J. E. D'Atri, J. Dorfmeister: *The biholomorphic curvature of quasisymmetric Siegel domains,* J. Differential Geom. **31** (1990) 73-99.

[$\mathcal{DAMI}$83] J. E. D'Atri & I. Dotti Miatello: *A characterisation of bounded symmetric domains by curvature,* Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), No. 2, 531-540.

[$\mathcal{DAZA}$83] J. E. D'Atri & Z. Yan Da: *Geodesics and Jacobi fields in bounded homogeneous domains,* Proc. Amer. Math. Soc. **89** (September 1983), No. 1, 55-61.

[$\mathcal{DO}$74] J. Dorfmeister: *Eine Theorie der homogenen, regulären Kegel,* Dissertation, Münster, 1974.

[$\mathcal{DO}$75] J. Dorfmeister: *Zur Konstruktion homogener Kegel,* Math. Ann. **216** (1975) 79-96.

[$\mathcal{DO}$79*a*] J. Dorfmeister: *Homogene Siegelgebiete,* Habilitation, Münster, 1979.

[$\mathcal{DO}$79*b*] J. Dorfmeister: *Inductive construction of homogeneous cones,* Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979) 321-349.

[$\mathcal{DO}$79*c*] J. Dorfmeister: *Algebraic description of homogeneous cones,* Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979) 61-89.

[$\mathcal{DO}$79*d*] J. Dorfmeister: *Peirce-Zerlegungen und Jordan-Strukturen zu homogenen Kegeln,* Math. Z. **169** (1979) 179-194.

[$\mathcal{DO}$79*e*] J. Dorfmeister: *Homogeneous Siegel domains,* Nagoya Math. J. **86** (1982) 39-83.

[$\mathcal{DO}$80] J. Dorfmeister: *Quasisymmetric Siegel domains and the automorphisms of homogeneous Siegel domains,* Amer. J. of Math. **102** No. 3 (1980) 537-563.

[$\mathcal{DO}$85*a*] J. Dorfmeister: *Simply transitive groups and Kähler structures on homogeneous Siegel domains,* Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), No. 1, 293-305.

[$\mathcal{DO}$85*b*] J. Dorfmeister: *Homogeneous Kähler manifolds admitting a transitive solvable group of automorphisms,* Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4 serie, t. **18** (1985) 143-180.

[$\mathcal{DOKO}$77] J. Dorfmeister & M. Koecher: *Relative Invarianten und nicht-assoziative Algebren,* Math. Ann. **228** (1977) 147-186.

[$\mathcal{DOKO}$79] J. Dorfmeister & M. Koecher: *Reguläre Kegel,* Jahresbericht der DMV (1979) 109-151.

[$\mathcal{DONA}$] J. Dorfmeister & K. Nakajima: *The fundamental conjecture of homogeneous Kähler manifolds,* Acta Math. **161** (1988) 23-70.

[$\mathcal{DR}$96] M. J. Druetta: *Curvature of invariant metrics on Piatetsky-Shapiro's generalized homogeneous domains,* Ann. of Global Analysis and Geometry **14** (1996) 43-59.

[$\mathcal{EDM}$] Encyclopedic Dictionary of Mathematics, MIT Press paperback edition, 1993.

[$\mathcal{FAKO}$] J. Faraut & A. Korányi: *Analysis on symmetric cones,* Oxford University Press, 1994.

[$\mathcal{FUHA}$] W. Fulton & J. Harris: *Representation Theory - A first course,* Springer, 1991.

[$\mathcal{GHL}$] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry,* Springer, 2. Auflage, 1990.

[$\mathcal{GI}$63] S. Gindikin: *Analysis in homogeneous domains,* Russian Math. Surveys **19** (1964) 1-89.

[$\mathcal{GI}$96] S. Gindikin et al: *Topics in Geometry - In Memory of Joseph D'Atri,* Birkhäuser, 1996.

[$\mathcal{GVP}$63] S. Gindikin, I. Piatetsky-Shapiro, E. B. Vinberg: *Classifikation and canonical realisation of complex bounded homogeneous domains,* Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963) 404-437.

[$\mathcal{GVP}$67] S. Gindikin, I. Piatetsky-Shapiro, E. B. Vinberg: *Homogeneous Kähler manifolds,* C.I.M.E. Edizione Cremonese, Roma, 1967.

[$\mathcal{GOWI}$88] C. Gorden & E. N. Wilson: *Isometry groups of Riemannian solvmanifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. **307**, No. 1 (1988) 245-269.

[$\mathcal{GR}$58] H. Grauert: *Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen,* Math. Ann. **135** (1958) 263-273.

[$\mathcal{HA}$57] J. Hano: *On Kählerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups,* Amer. J. Math. **79** (1957) 885-900.

[$\mathcal{HE}$] S. Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces,* Academic Press, 1978.

[$\mathcal{HISL}$] F. Hirzebruch, W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis,* B.I.-Hochschultaschenbuch, Band **296**, 1991.

[$\mathcal{JA}$] N. Jacobson: *Structure and Representations of Jordan Algebras,* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **39**, 1968.

[$\mathcal{JNW}$34] P. Jordan, J. von Neumann und E. Wigner: *On algebraic generalization of the quantum mechanical formalism,* Ann. of Math. (2) **36** (1934) 29-34.

[$\mathcal{KA}$67] S. Kanejuki: *On the automorphism groups of homogeneous bounded domains,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **14** (1967) 89-130.

[$\mathcal{KA}$] S. Kanejuki: *Homogeneous bounded domains and Siegel domains,* Springer, Lecture Notes in Mathematics **241**, 1971.

[$\mathcal{KN}$] A. W. Knapp: *Lie groups beyond an introduction,* Birkhäuser, 1996.

[$\mathcal{KO}$59] S. Kobayashi: *Geometry of bounded domains,* Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959) 267-291.

[$\mathcal{KO}$95] S. Kobayashi: *Transformation Groups in Differential Geometry,* Springer reprint, 1995.

[$\mathcal{KOE}$99] M. Koecher: *Jordan Algebras and their Applications,* Springer, Lecture Notes in Mathematics **1710**, 1999.

[$\mathcal{KOE}$60] M. Koecher: *Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I,* Math. Annalen **141** (1960) 384-432.

[$\mathcal{KONO}I$] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry,* Band 1. Wiley Interscience, 1963.

[$\mathcal{KONO}II$] S. Kobayashi, K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry,* Band 2. Wiley Interscience, 1969.

[$\mathcal{KONO}$57] S. Kobayashi, K. Nomizu: *On automorphisms of a Kählerian structure,* Nagoya Math. J. (1957) II 115-124.

[$\mathcal{KZ}$55] J. L. Koszul: *Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogenes complexes,* Canad. J. Math. **7** (1955) 562-576.

[$\mathcal{KOSH}$83] A. Kodama & H. Shima: *Characterisations of homogeneous bounded domains,* Tsukuba J. Math. **7** (1983), No. 1, 79-86.

[$\mathcal{KR}$92] S. G. Krantz: *Function theory of several complex variables,* Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1992.

[$\mathcal{LAMI}$89] H. B. Lawson, M. L. Michelsohn: *Spin Geometry,* Princeton University Press, 1989.

[$\mathcal{MC}$78] K. McCrimmon: *Jordan algebras and their applications,* Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), No.4, 612-627.

[$\mathcal{MOZH}$86] M. Mok & J.-Q. Zhong: *Curvature characterization of compact Hermitian symmetric spaces,* J. Differential Geom. **23** (1986) 15-67.

[$\mathcal{MU}$] S. Murakami: *On automorphisms of Siegel domains,* Springer, Lecture Notes in Mathematics **286**, 1979.

[$\mathcal{NA}$75] K. Nakajima: *Some studies on Siegel domains,* J. Math. Soc. Japan **27** (1975), No. 1, 54-75.

[$\mathcal{NA}$76] K. Nakajima: *On realization of Siegel domains of the second kind as those of the third kind,* J. Math. Kyoto Univ. **16** (1976), No. 1, 143-166.

[$\mathcal{NA}$85] K. Nakajima: *Homogeneous hyperbolic manifolds and homogeneous Siegel domains,* J. Math. Kyoto Univ. **15** (1985) 269-291.

[$\mathcal{PA}$96] G. Pabst: *Homogene Kählermannigfaltigkeiten nicht-positiver Krümmung,* Bonner Mathematische Schriften **291**, 1996.

[$\mathcal{PS}$59] I. Piatetsky-Shapiro: *On a problem proposed by E. Cartan,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **113** (1957) 980-983.

[$\mathcal{PS}$] I. Piatetsky-Shapiro: *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains,* Gordan and Breach, 1969.

[$\mathcal{PC}$07] H. Poincare: *Les fonctions analytiques de ux variables et la representation conforme,* Rend. Circ. Mat. Palermo **23** (1907) 185-220.

[$\mathcal{PO}$] W. A. Poor: *Differential geometric structures,* McGraw-Hill Book Company, 1981.

[$\mathcal{RE}$] R. Remmert: *Funktionentheorie II,* Springer, 1991.

[$\mathcal{SA}$76] I. Satake: *On classification of quasi-symmetric domains,* Nagoya Math. J. **62** (1976) 1-12.

[$\mathcal{SA}$] I. Satake: *Algebraic structures of symmetric domains,* Princeton University Press, 1980.

[$\mathcal{SH}$83] H. Shima: *Homogeneous Kählerian manifolds,* Japan. J. Math. **10** (1984) 71-98.

[$\mathcal{TA}$75] M. Takeuchi: *On symmetric Siegel domains,* Nagoya Math. J. **59** (1975) 9-44.

[$\mathcal{TS}$91] T. Tsuji: *Homogeneous Siegel domains of nonpositive holomorphic bisectional curvature,* Tokyo J. Math. **14** (1991), No. 2, 439-451.

[$\mathcal{VA}$] V. S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representation,* Springer, 2. Auflage, 1984.

[$\mathcal{VI}60a$] E. B. Vinberg: *Homogeneous cones,* Soviet Math. Dokl. **1** (1960) 787-790.

[$\mathcal{VI}60b$] E. B. Vinberg: *The theory of convex homogeneous cones,* Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963) 340-403.

[$\mathcal{VI}61$] E. B. Vinberg: *The Morzow-Borel theorem for real Lie groups,* Soviet Math. Dokl. **2** (1961) 1416-1419.

[$\mathcal{VI}65$] E. B. Vinberg: *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone,* Trans. Moscow Math. Soc. **13** (1965) 63-93.

[$\mathcal{WA}54$] H. C. Wang: *Closed manifolds with homogeneous complex structure,* Amer. J. Math. **76** (1954) 1-32.

[$\mathcal{WA}$] F. W. Warner: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups,* Springer, 1983.

[$\mathcal{WU}$] H. H. Wu: *Contemporary geometry,* Plenum Press, New York, 1991.

[$\mathcal{XU}81$] Y. Xu: *Tube domains over cones with dual square type,* Sci. Sinica **24** (1981) 1475-1488.

[$\mathcal{ZE}77$] R. Zelow (Lundquist): *On the differential geometry of quasi-symmetric domains,* Thesis, University of California, Berkley, 1977.

[$\mathcal{ZE}79a$] R. Zelow (Lundquist): *Curvature of quasi-symmetric Siegel domains,* J. Differential Geom. **14** (1979) 629-655.

[$\mathcal{ZE}79b$] R. Zelow (Lundquist): *Holomorphic sectional curvature of quasi-symmetric domains,* Proc. Amer. Math. Soc. **76** (1979) 299-301.