Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs # 9**

Gabriel Eduard VÎLCU

Contributions to the study of quaternionic manifolds

Contribuţii la studiul varietăţilor cuaternionice

Ph.D. Thesis, University of Bucharest

Bucharest, Romania 2006

Geometry Balkan Press

Bucharest, Romania

Contributions to the study of quaternionic manifolds
[Contribuţii la studiul varietăţilor cuaternionice] (Romanian)
Monographs # 9

Contributions to the study of quaternionic manifolds
[Contribuţii la studiul varietăţilor cuaternionice] (Romanian)
Gabriel Eduard VÎLCU
Bucharest: Differential Geometry - Dynamical Systems * Monographs, 2007

Includes bibliographical references.

Introducere

Acest volum reproduce teza de doctorat a autorului, elaborată sub conducerea ştiinţifică a domnului profesor doctor Stere Ianuş, la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Bucureşti.

Geometria diferenţială a varietăţilor cuaternionice este o teorie ce a cunoscut o dezvoltare deosebită în ultimii 50 de ani, primul articol în care au fost evidenţiate în mod distinct aceste clase de varietăţi ([29]) fiind publicat în 1955. De atunci, numeroşi matematicieni şi-au adus contribuţia la dezvoltarea acestui domeniu, care a devenit unul clasic în geometria diferenţială, fiind de remarcat în acest sens, printre altele, articolele [4]-[13], [25], [26], [31], [35], [38], [42], [64], [66], [97], [98], [102], [104], [112], [115], [120], [121]-[123], [132]-[134], [137]-[140], [141], [142], [143], [145], [147], [150], [152], [153], [159], [164], [165], [167], [184] şi [185].

Această lucrare, dedicată studiului unor aspecte privind varietăţile cuaternionice cu metrică semi-Riemann, varietăţile paracuaternionice (numite iniţial varietăţi cuaternionice de speţa a doua în [115]) şi submersiile Riemann între varietăţi diferenţiabile înzestrate cu structuri remarcabile (complexe, de contact, cuaternionice), este structurată pe cinci capitole.

În cea mai mare parte, toate capitolele se bazează pe câte o lucrare ştiinţifică scrisă de autor singur ([171]-[175]), sau în colaborare ([92]-[94], [96]).

În primul capitol sunt prezentate noţiuni şi rezultate fundamentale din geometria diferenţială a varietăţilor cuaternionice. În prima parte a capitolului se face o scurtă incursiune în istoria cuaternionilor, plecând de la descoperirea lor de către Hamilton, în 1843, evidenţiindu-se multiplele aplicaţii ale acestora în fizică, biologie, chimie, cibernetică, informatică, astronomie etc. şi ajungând până la unele conexiuni surprinzătoare ale geometriei cuaternionice cu alte domenii ale matematicii mai mult sau mai puţin înrudite cu geometria diferenţială, cum ar fi algebra computaţională, teoria numerelor, topologia algebrică etc.

În următoarele trei secţiuni ale acestui capitol este prezentată definiţia varietăţilor cuaternionice, sunt date numeroase exemple şi sunt demonstrate principalele proprietăţi ale varietăţilor cuaternionice (Propoziţiile 1.2.2, 1.2.3, 1.3.5 şi Teoremele 1.4.1, 1.4.2). În elaborarea acestor trei secţiuni am utilizat lucrările [32], [98], [142] şi [171].

În ultima secţiune a capitolului se obţine o teoremă de tip Schur pe o varietate cuaternionică Kähler cu metrică semi-Riemann (Teorema 1.5.8). Rezultatele din această secţiune sunt cuprinse în lucrarea [171].

În al doilea capitol sunt studiate hipersuprafeţele luminoase în forme spaţiale paracuaternionice. Mai întâi sunt prezentate definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale varietăţilor paracuaternionice (cf. [35], [66], [176]), precum şi conceptul de hipersuprafaţă luminoasă într-o varietate semi-Riemann (cf. [28]).

În continuare sunt prezentate rezultatele obţinute de autor în colaborare ([92], [93]) în acest domeniu: se găsesc proprietăţi ale hipersuprafeţelor luminoase în forme spaţiale paracuaternionice (Propoziţia 2.3.1, Teorema 2.3.6), este dat un exemplu (Exemplul 2.3.2), se găsesc condiţii de total geodezicitate (Teoremele 2.4.2, 2.4.3 şi 2.4.4) şi se arată că într-o formă spaţială paracuaternionică de curbura nenulă nu există hipersuprafeţe luminoase care să fie: i. total ombilicale (Teorema 2.5.3); ii. cu forma a doua fundamentală paralelă (Teorema 2.5.4); iii. de curbură secţională izotropă negativă sau pozitivă (Propoziţia 2.5.6); iv. de curbură Ricci negativă sau pozitivă (Teorema 2.5.7).

În al treilea capitol sunt studiate produsele de varietăţi paracuaternionice. Se arată că produsul a două varietăţi aproape paracuaternionice hermitiene admite o structură naturală de varietate aproape paracuaternionică hermitiană (Propoziţia 3.1.2). În plus, dacă varietăţile sunt paracuaternionice Kähler, varietatea produs nu mai păstrează această proprietate. Se obţine astfel un exemplu de varietate aproape paracuaternionică hermitiană, ce nu este paracuaternionică Kähler (Propoziţia 3.2.2).

Având în vedere similitudinea cu cazul complex şi cel cuaternionic, rezultatele obţinute în Propoziţia 3.1.2 şi în Lema 3.2.1 ne "sugerează" definirea noţiunii de varietate aproape paracuaternionică Kähler produs. Este dat un exemplu de astfel de varietate (Exemplul 3.2.6), este construit tensorul de curbură al varietăţii produs a două forme spaţiale paracuaternionice (Propoziţia 3.3.1) şi sunt găsite condiţii ca varietatea produs să fie spaţiu Einstein (Corolarul 3.3.3). În ultima parte a capitolului sunt studiate subvarietăţile F-invariante şi F-antiinvariante ale unei varietăţi paracuaternionice produs.

Rezultatele din acest capitol sunt cuprinse în lucrările [172] şi [173].

În al patrulea capitol sunt studiate submersiile Riemann de la CR şi QR-hipersuprafeţe ale varietăţilor Kähler, respectiv cuaternionice Kähler, în alte varietăţi Kähler sau cuaternionice Kähler.

Mai întâi, folosind [118], sunt prezentate definiţiile şi proprietăţile CR-submersiilor de la o hipersferă extrinsecă M a unei varietăţi Kähler $\overline{M}$, la o varietate aproape hermitiană M'. În continuare, se găsesc relaţii de legătură între tensorii Ricci, curburile scalare şi tensorii Bochner ai lui $\overline{M}$ şi M' (Propoziţiile 4.2.5, 4.2.6, 4.3.1).

În următoarea parte a capitolului, sunt studiate submersiile Riemann ale hipersferelor extrinseci într-o varietate Bochner-Kähler, găsindu-se în ce condiţii şi varietatea M' este Bochner-Kähler (Corolarul 4.3.3).

În următoarea secţiune a capitolului sunt completate rezultatele obţinute de Mangione în studiul QR-submersiilor ([119]). Se observă că orice QR-hipersuprafata a unei varietăţi cuaternionice admite o 3-structură naturală de contact metrică şi atunci, procedând asemănător ca în [119] şi [178], se poate defini o nouă clasă de submersii Riemann: QR 3-submersii. Este dat un exemplu de astfel de submersie (Exemplul 4.4.18) şi se găsesc diverse condiţii pentru ca baza submersiei să fie local hiper-Kähler (Teorema 4.4.14, Corolarul 4.4.15) şi pentru integrabilitatea distribuţiilor orizontală şi verticală (Teorema 4.4.16).

Rezultatele obţinute în acest capitol sunt cuprinse în lucrările [174] şi [175].

În ultimul capitol al lucrării sunt prezentate rezultatele obţinute de autor în colaborare ([94]) în studiul aplicaţiilor armonice şi al submersiilor Riemann între varietăţi înzestrate cu structuri aproape cuaternionice hermitiene. Mai întâi sunt prezentate definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale aplicaţiilor armonice, utilizând în general [59] şi [166].

În următoarea parte a capitolului se defineşte conceptul de aplicaţie (σ, σ')-olomorfă între două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene şi se găsesc condiţii pentru ca o astfel de aplicaţie să fie armonică (Teorema 5.2.4, Corolarul 5.2.5).

În următoarea secţiune a capitolului se defineşte noţiunea de submersie cuaternionica şi se obţin diverse proprietăţi ale acestor clase de submersii: Propoziţia 5.3.2, Teorema 5.3.3, Corolarul 5.3.6, Teorema 5.3.7. În finalul capitolului este construit un exemplu netrivial de submersie cuaternionică (Teorema 5.4.1).

Lucrarea se încheie cu o bibliografie generală.

Mulţumiri

Doresc să mulţumesc domnului prof. dr. Stere Ianuş pentru sprijinul constant acordat, pentru numeroasele discuţii şi sfaturi fără de care această lucrare nu ar fi putut fi elaborată, precum şi tuturor celor care s-au implicat cu multă competenţă în pregătirea tezei de doctorat, în comisiile de evaluare şi de analiză ale examenelor şi referatelor prevăzute în planul de pregătire individuală sau ca membrii în comisia de susţinere publică a tezei de doctorat:

- domnului prof. dr. Ion Chiţescu, Decanul Facultăţii de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii Bucureşti

- domnului prof. dr. Vasile Oproiu, şeful Catedrei de Geometrie de la Facultatea de Matematică din cadrul Universităţii "Al.I.Cuza" din Iaşi

- domnului prof. dr. Liviu Ornea, de la Facultatea de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii Bucureşti

- domnului prof. dr. Gheorghe Pitiş, de la Facultatea de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii "Transilvania" din Braşov

- doamnei prof. dr. Adriana Turtoi, de la Facultatea de Matematică şi Informatică din cadrul Universităţii Bucureşti

- domnului cerc. dr. Radu Iordănescu, de la Institutul de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române

De asemenea, doresc să mulţumesc soţiei şi părinţilor pentru înţelegerea şi sprijinul acordat.

Cuprins

1 Geometria varietăţilor cuaternionice

Geometria cuaternionică este una dintre cele mai interesante arii de cercetare din geometria diferenţială. În plus, deoarece cuaternionii sunt strâns legaţi de algebra clasică şi fizică, ei servesc ca o punte de legătură între geometria diferenţială şi diverse alte domenii de cercetare. Prima secţiune a capitolului are drept scop chiar punerea în evidenţă a acestor conexiuni dintre geometria cuaternionică pe de o parte şi alte ramuri ale matematicii şi fizicii, pe de altă parte.

Primul matematician care a evidenţiat în mod distinct varietăţile cuaternionice a fost Berger ([29]) în 1955, conceptul fiind definit în mod echivalent mai târziu, în 1974, de către Ishihara ([98]). Este de remarcat că, în 1959, Martinelli ([121]) foloseşte pentru prima oară conceptul de fibrat vectorial cuaternionic, iar Calabi ([42]) introduce în 1978 conceptele de hipercomplex şi hiper-Kähler pentru structurile cuaternionice definite global şi lasă denumirea de structuri cuaternionice doar pentru cele definite local. În a doua secţiune a capitolului este prezentată definiţia varietăţilor cuaternionice datorată lui Ishihara ([98]), sunt demonstrate consecinţe imediate ale definiţiei şi sunt date numeroase exemple. Această secţiune are la bază, în principal, lucrările lui Ishihara ([98]) şi Besse ([32]).

În secţiunile a treia şi a patra sunt prezentate proprietăţile tensorului de curbură şi ale tensorului Ricci pe o varietate cuaternionică Kähler, precum şi proprietăţi remarcabile ale acestor varietăţi. Proprietăţile sunt demonstrate în contextul metricilor semi-Riemann, autorul adaptând invariant rezultatele obţinute în coordonate locale şi în context riemannian de Ishihara ([98]).

În secţiunea a cincea, plecând de la unele rezultate obţinute de Perez şi Santos ([142]), procedând asemănător ca în cazul Kähler, se obţine o teoremă de tip Schur pe varietăţi cuaternionice Kähler cu metrică semi-Riemann. Aceste rezultate se găsesc în lucrarea [171].

1.1 Scurt istoric

Luni, 16 octombrie 1843. Royal Canal, Dublin. William Rowan Hamilton se îndreaptă, împreună cu soţia, spre sediul Academiei Regale Irlandeze, unde urmează să prezideze Consiliul General. Dintr-o dată, ceva prinde viaţă în mintea sa, după cum singur avea să declare: "*And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triples ... An electric circuit seemed to close, and a spark flashed forth.*" Şi în acea clipă nu putu rezista impulsului de a scrijeli pe piatra Podului Brougham, celebrele formule ce au revoluţionat matematica şi fizica deopotrivă: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

După mai mult de un secol şi jumătate de la descoperirea cuaternionilor, se poate spune fără teama de a greşi că aceştia au revoluţionat ştiinţa, datorită multiplelor aplicaţii nu numai în matematică, ci şi în fizică ([36], [44], [60], [75],

[86], [155], [157]), biochimie ([2], [3]), astronautică ([14], [45], [58], [63], [81], [129], [146], [158], [180]), cibernetică şi robotică industrială ([16], [17], [20], [49], [50], [53], [114], [128], [156]), mecanică ([40], [52], [82], [117]), astronomie ([22], [40], [62]), teoria deciziei ([21], [43], [95], [116], [127], [179]) şi informatică ([1], [41], [72], [73], [105], [113], [126]).

Varietăţile cuaternionice au fost introduse în geometrie pentru prima dată în 1955 de către M. Berger ([29]), care a clasificat grupurile care pot apărea drept grupuri de olonomie pentru varietăţi Riemann ireductibile. O clasă de astfel de grupuri sunt subgrupurile lui $Sp(n) \times Sp(1)$, varietăţile corespunzătoare fiind numite varietăţi cuaternionice Kähler. Ulterior au fost găsite şi alte definiţii echivalente, ce vor fi prezentate în următoarea secţiune.

Geometria cuaternionică s-a dezvoltat foarte mult în ultimele decenii, importanta acestei geometrii rezultând nu numai din legăturile evidente cu celelalte geometrii, ci şi din conexiunile surprinzătoare cu alte domenii, mai mult sau mai puţin înrudite, cum ar fi: topologia algebrică (N. Hitchin ([84]), T. Hausel, E. Hunsicker şi R. Mazzeo ([78])), teoria numerelor (T. Hausel şi F.R. Villegas ([80])) şi fizica (D. Anselmi şi P. Fre ([15]), M. Atiyah şi N. Hitchin ([19]), P. Kronheimer şi H. Nakajima ([109])).

1.2 Definiţia varietăţilor cuaternionice. Consecinţe ale definiţiei. Exemple

Definiţia 1.2.1 ([98])

Fie M o varietate diferenţiabilă. Se numeşte structură aproape cuaternionică pe M un fibrat 3-dimensional de structuri aproape complexe pe M care este local generat de o structură aproape hipercomplexă $H = (J_i)_{i=\overline{1,3}}$, i.e: $\exists\ (U_i)_{i \in I}$ o acoperire deschisă a lui M astfel încât pentru $\forall i \in I$, $\exists\{J_1, J_2, J_3\}$ trei structuri aproape complexe pe U_i, astfel încât:

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3.$$

Perechea (M, σ) se numeşte varietate aproape cuaternionică, iar $\{J_1, J_2, J_3\}$ se numeşte bază canonică locală a lui σ.

Propoziţia 1.2.2 ([98])

Orice varietate aproape cuaternionică (M, σ) este orientabilă.

Demonstraţie: Fie $\{J_1, J_2, J_3\}$ şi $\{J_1', J_2', J_3'\}$ două baze canonice locale ale lui σ definite pe vecinătăţile de coordonate U şi U', cu $U \cap U' \neq \emptyset$. Atunci J_1', J_2' şi J_3' se pot exprima drept combinaţii liniare de $\{J_1, J_2, J_3\}$:

$$J_1' = a_{11} J_1 + a_{12} J_2 + a_{13} J_3,$$

$$J_2' = a_{21} J_1 + a_{22} J_2 + a_{23} J_3$$

$$J_3' = a_{31} J_1 + a_{32} J_2 + a_{33} J_3.$$

Deoarece atât $H = (J_i)_{i=\overline{1,3}}$, cât şi $H' = (J'_i)_{i=\overline{1,3}}$ sunt structuri hipercomplexe, rezultă că matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$ este un element din grupul special ortogonal $S0(3)$. Prin urmare, rezultă că M este o varietate orientabilă. ■

Propoziţia 1.2.3 ([98])
Orice varietate aproape cuaternionică (M, σ) este de dimensiune $n = 4m$, $m \geq 1$.

Demonstraţie: Fie $p \in M$ şi $X_1 \in T_pM - \{0\}$. Atunci vom demonstra că vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1\}$ sunt liniar independenţi, unde $\{J_1, J_2, J_3\}$ este o bază canonică locală a lui σ, definită pe o vecinătate de coordonate U a lui p.

Într-adevăr, fie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$\alpha X_1 + \beta J_1X_1 + \gamma J_2X_1 + \delta J_3X_1 = 0. \tag{1.1}$$

Aplicnd pe rând J_1, J_2 şi J_3 în (1.1) obţinem:

$$-\beta X_1 + \alpha J_1X_1 - \delta J_2X_1 + \gamma J_3X_1 = 0, \tag{1.2}$$

$$-\gamma X_1 + \delta J_1X_1 + \alpha J_2X_1 - \beta J_3X_1 = 0, \tag{1.3}$$

$$-\delta X_1 - \gamma J_1X_1 + \beta J_2X_1 + \alpha J_3X_1 = 0. \tag{1.4}$$

Eliminând J_1X_1, J_2X_1 şi J_3X_1 între (1.1)-(1.4) obţinem:

$$\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2\right) X_1 = 0. \tag{1.5}$$

Aşadar, rezultă că vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1\}$ sunt liniar independenţi, deci $\dim T_pM \geq 4$.

Dacă $\dim T_pM = 4$, atunci rezultă că $\dim M = 4$ şi teorema este demonstrată.

Dacă $\dim T_pM > 4$, atunci există $X_2 \in T_pM \backslash \{0\}$ astfel încât vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2\}$ să fie liniar independenţi. Atunci demonstrăm că şi vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2, J_1X_2\}$ sunt liniar independenţi. Presupunem prin absurd că ar fi liniar dependenţi. Atunci rezultă că există $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1,5}$, astfel încât:

$$J_1X_2 = \alpha_1X_1 + \alpha_2J_1X_1 + \alpha_3J_2X_1 + \alpha_4J_3X_1 + \alpha_5X_2. \tag{1.6}$$

Aplicând J_1 în (1.6) obţinem:

$$-X_2 = \alpha_1J_1X_1 - \alpha_2X_1 + \alpha_3J_3X_1 - \alpha_4J_2X_1 + \alpha_5J_1X_2. \tag{1.7}$$

Eliminându-l pe J_1X_2 între (1.6) şi (1.7) obţinem:

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_5^2 + 1\right) X_2 + \left(\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2\right) X_1 + \left(\alpha_2\alpha_5 + \alpha_1\right) J_1X_1 \\ &\quad + \left(\alpha_3\alpha_5 - \alpha_4\right) J_2X_1 + \left(\alpha_4\alpha_5 + \alpha_3\right) J_3X_1 = 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Cum vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2\}$ sunt liniar independenţi, rezultă în particular din (1.8) că $\alpha_5^2 + 1 = 0$, contradicţie.

Prin urmare, rezultă că vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2, J_1X_2\}$ sunt liniar independenţi. Analog rezultă că vectorii $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2, J_1X_2, J_2X_2\}$ sunt liniar independenţi şi similar $\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2, J_1X_2, J_2X_2, J_3X_2\}$ sunt liniar independenţi. În consecinţă rezultă că $\dim T_pM \geq 8$.

Dacă $\dim T_pM = 8$, atunci rezultă că $\dim M = 8$ şi teorema este complet demonstrată. Dacă $\dim T_pM > 8$, atunci procedeul continu inductiv, obţinându-se o bază în T_pM de forma:

$$\{X_1, J_1X_1, J_2X_1, J_3X_1, X_2, J_1X_2, J_2X_2, J_3X_2, ..., X_m, J_1X_m, J_2X_m, J_3X_m\}$$

şi în consecinţă $\dim M = 4m$, $m \geq 1$. ■

Definiţia 1.2.4 ([98])

Fie (M, σ) o varietate aproape cuaternionică şi g o metrică (semi-)Riemann pe M astfel încât:

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3},$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y pe M şi orice bază locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ a lui σ. Atunci g se numeşte metrică adaptată structurii cuaternionice σ, iar (M, σ, g) se numeşte varietate aproape cuaternionică hermitiană cu metrică (semi-)Riemann sau (in)definită.

Observaţia 1.2.5 ([142])

Dacă (M, σ, g) este o varietate aproape cuaternionică hermitiană cu metrică semi-Riemann, atunci din Propoziţia 1.2.3 rezultă că există în spaţiul tangent o bază pseudo-ortonormată de forma $\{X_i, J_1X_i, J_2X_i, J_3X_i\}_{i=\overline{1,m}}$ (o astfel de bază se numete bază adaptată). Atunci, dacă:

$$g(E_i, E_i) = \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \forall i = \overline{1, m}$$

rezultă că avem:

$$g(J_\alpha E_i, J_\alpha E_i) = \varepsilon_i \in \{\pm 1\}, \forall \alpha = \overline{1,3}, \forall i = \overline{1, m},$$

deci signatura lui g este:

$$s = 4p - 4q = 4(p - q) = 4t$$

unde p este cardinalul mulţimii $\left\{i \in \overline{1, m} \,|\, \varepsilon_i > 0\right\}$, iar q este cardinalul mulţimii $\left\{i \in \overline{1, m} \,|\, \varepsilon_i < 0\right\}$.

Definiţia 1.2.6 ([98])

Fie (M, σ, g) o varietate aproape cuaternionică hermitiană cu metrică (semi) Riemann. Dacă ∇, conexiunea Levi-Civita indusă de g, satisface condiţiile:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(\nabla_X J_1)Y = \omega_3(X)J_2Y - \omega_2(X)J_3Y \\
(\nabla_X J_2)Y = -\omega_3(X)J_1Y + \omega_1(X)J_3Y \\
(\nabla_X J_3)Y = \omega_2(X)J_1Y - \omega_1(X)J_2Y
\end{array}
\right. \tag{1.9}
$$

pentru orice X şi Y câmpuri vectoriale pe M, unde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sunt 1-forme locale definite pe U_i, iar $\{J_1, J_2, J_3\}$ bază locală a lui σ pe U_i, atunci varietatea (M, σ, g) se numeşte varietate cuaternionică Kähler (cu metrică semi-Riemann sau indefinită).

În particular, dacă $\nabla J_\alpha = 0$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$, se spune că varietatea (M, σ, g) este local hiper-Kähler.

Condiţiile (1.9) sunt echivalente cu faptul că ∇ paralelizează subfibratul σ .

Observaţia 1.2.7

Fie (M, σ, g) o varietate aproape cuaternionică hermitiană cu metrică indefinită şi fie $\{J_1, J_2, J_3\}$ o bază locală a lui σ definită pe o vecinătate de coordonate U. Deoarece J_1, J_2 şi J_3 sunt aproape hermitiene în raport cu g, rezultă că:

$$\Omega_\alpha(X, Y) = g\left(X, J_\alpha Y\right), \forall \alpha = \overline{1,3},$$

sunt 2-forme locale pe U. Pe de altă parte, având în vedere consideraţiile făcute în cadrul demonstraţiei Propoziţiei 1.2.2, rezultă că:

$$\Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_1 + \Omega_2 \wedge \Omega_2 + \Omega_3 \wedge \Omega_3 \tag{1.10}$$

este o 4-formă global definită pe M.

Similar, rezultă că:

$$\Lambda = J_1 \otimes J_1 + J_2 \otimes J_2 + J_3 \otimes J_3 \tag{1.11}$$

este un câmp tensorial global de tip (2,2) pe M.

S. Ishihara ([98]) a arătat că o varietate aproape cuaternionică este o varietate cuaternionică Kähler dacă şi numai dacă este îndeplinită una din urmatoarele condiţii echivalente:

$$\nabla \Omega = 0, \tag{1.12}$$

respectiv:

$$\nabla \Lambda = 0. \tag{1.13}$$

Exemplul 1.2.8

1. $\mathbf{R^{4n}}$ este varietate cuaternionică Kähler (în acest caz fibratul σ este trivial).

2. Prototipul de varietate cuaternionică Kähler este spaţiul proiectiv cuaternionic $P^n(\mathbf{H})$, această varietate având grupul de olonomie chiar $Sp(n) \times Sp(1)$. Este de remarcat că în acest caz σ este netrivial. În plus, $P^n(\mathbf{H})$ nu admite nici o structură complexă globală.

3. Orice varietate Riemann orientabilă 4-dimensională admite o structură cuaternionică Kähler, deoarece grupul ei de olonomie este subgrup în $SO(4) = Sp(1) \times Sp(1)$. În consecinţă, S^4 este o varietate cuaternionică Kähler.

În particular, dacă M_1 şi M_2 sunt varietăţi Kähler de dimensiune complexă 1, care nu sunt local plate, atunci $M_1 \times M_2$ este o varietate cuaternionică Kähler, deoarece are grupul de olonomie $U(1) \times U(1)$. În consecinţă $S^2 \times S^2$ este o varietate cuaternionică Kähler.

4. Dacă (M, g, I) este o varietate aproape hermitiană, atunci fibratul tangent TM admite o structură cuaternionică (cf. V. Oproiu ([135])). L. Cordero, M. Fernandez şi M. De Leon ([51]) au găsit condiţii în care fibratul tangent al unei varietăţi aproape hermitiene este o varietate aproape cuaternionică hermitiană care nu este cuaternionică Kähler.

În particular, dacă $D^n = IntS^{2n-1}$ este discul unitate din $\mathbf{C^n}$, iar $G_p(\mathbf{C^{p+q}})$ este varietatea Grassmann complexă, rezultă că TD^n şi $T(G_p(\mathbf{C^{p+q}}))$ sunt varietăţi aproape cuaternionice.

5. S. Salamon ([152]) a extins rezultatul anterior, utilizând teoria reprezentarilor: astfel, el a arătat că dacă M este o varietate cuaternionică Kähler, atunci fibratul tangent este o varietate aproape cuaternionică, ce este cuaternionică Kähler dacă şi numai dacă M este plată.

În particular, $T(S^2 \times S^2)$ şi TS^4 sunt varietăţi aproape cuaternionice.

6. M. Tahara, L. Vanhecke şi Y. Watanabe ([163]) au arătat că fibratul tangent al unei forme spaţiale complexe de curbură secţională olomorfă pozitivă admite o structură aproape hipercomplexă naturală.

Pe de altă parte, M. Tahara, S. Marchiafava şi Y. Watanabe ([164]) au construit o familie de structuri cuaternionice Kähler pe fibratul tangent al unei forme spaţiale complexe de dimensiune reală cel puţin 6.

1.3 Tensorul de curbură şi tensorul Ricci pe o varietate cuaternionică Kähler

Lema 1.3.1 ([98])

Tensorul de curbură pe o varietate cuaternionică Kähler cu metrică (semi) Riemann (M, σ, g) satisface relaţiile:

$$(1.14)\qquad \begin{cases} [R(X,Y), J_1] = F_3(X,Y)J_2 - F_2(X,Y)J_3 \\ [R(X,Y), J_2] = -F_3(X,Y)J_1 + F_1(X,Y)J_3 \\ [R(X,Y), J_3] = F_2(X,Y)J_1 - F_1(X,Y)J_2 \end{cases}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *unde:*

$$(1.15)\qquad [R(X,Y), J_\alpha] \overset{\text{not}}{=} R(X,Y)J_\alpha - J_\alpha R(X,Y),$$

iar

$$(1.16)\qquad F_1 = d\omega_1 + \omega_2 \wedge \omega_3, F_2 = d\omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_1, F_3 = d\omega_3 + \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Demonstraţie: Fie $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. Atunci, conform notaţiei (1.15), folosind definiţia tensorului de curbură, obţinem:

$$\begin{aligned}
[R(X,Y), J_\alpha] Z &= R(X,Y)J_\alpha Z - J_\alpha R(X,Y)Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y J_\alpha Z - \nabla_Y \nabla_X J_\alpha Z - \nabla_{[X,Y]} J_\alpha Z \\
&\quad - J_\alpha \nabla_X \nabla_Y Z + J_\alpha \nabla_Y \nabla_X Z + J_\alpha \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_X \left((\nabla_Y J_\alpha) Z + J_\alpha \nabla_Y Z \right) - \nabla_Y \left((\nabla_X J_\alpha) Z + J_\alpha \nabla_X Z \right) \\
&\quad - J_\alpha \nabla_X \nabla_Y Z + J_\alpha \nabla_Y \nabla_X Z + J_\alpha \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} J_\alpha Z. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Folosind condiţiile (1.9) din definiţia varietăţilor cuaternionice Kähler în (1.17), obţinem:

$$\begin{aligned}
[R(X,Y), J_1] Z &= \nabla_X \left[\omega_3(Y) J_2 Z - \omega_2(Y) J_3 Z + J_1 \nabla_Y Z \right] \\
&\quad - \nabla_Y \left[\omega_3(X) J_2 Z - \omega_2(X) J_3 Z + J_1 \nabla_X Z \right] \\
&\quad - J_1 \nabla_X \nabla_Y Z + J_1 \nabla_Y \nabla_X Z + J_1 \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} J_1 Z \\
&= X\omega_3(Y) J_2 Z + \omega_3(Y) \nabla_X J_2 Z - X\omega_2(Y) J_3 Z \\
&\quad - \omega_2(Y) \nabla_X J_3 Z + \nabla_X (J_1 \nabla_Y Z) - Y\omega_3(X) J_2 Z \\
&\quad - \omega_3(X) \nabla_Y J_2 Z + Y\omega_2(X) J_3 Z + \omega_2(X) \nabla_Y J_3 Z \\
&\quad - \nabla_Y (J_1 \nabla_X Z) - J_1 \nabla_X \nabla_Y Z + J_1 \nabla_Y \nabla_X Z \\
&\quad + J_1 \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} J_1 Z \\
&= X\omega_3(Y) J_2 Z + \omega_3(Y) \left[(\nabla_X J_2) Z + J_2 \nabla_X Z \right] \\
&\quad - X\omega_2(Y) J_3 Z - \omega_2(Y) \left[(\nabla_X J_3) Z + J_3 \nabla_X Z \right] \\
&\quad - Y\omega_3(X) J_2 Z + \omega_3(X) \left[(\nabla_Y J_2) Z + J_2 \nabla_Y Z \right] \\
&\quad + Y\omega_2(X) J_3 Z + \omega_2(X) \left[(\nabla_Y J_3) Z + J_3 \nabla_Y Z \right] \\
&\quad + \left[(\nabla_X J_1)(\nabla_Y Z) + J_1 \nabla_X \nabla_Y Z \right] \\
&\quad - \left[(\nabla_Y J_1)(\nabla_X Z) + J_1 \nabla_Y \nabla_X Z \right] \\
&\quad - J_1 \nabla_X \nabla_Y Z + J_1 \nabla_Y \nabla_X Z + J_1 \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} J_1 Z. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Folosind din nou condiţiile (1.9) în (1.18) obţinem:

$$\begin{aligned}
[R(X,Y), J_1] Z &= \left[X\omega_3(Y) - Y\omega_3(X) - \omega_2(X)\omega_1(Y) + \omega_2(Y)\omega_1(X) \right] J_2 Z \\
&\quad - \left[X\omega_2(Y) - Y\omega_2(X) - \omega_3(Y)\omega_1(X) + \omega_3(X)\omega_1(Y) \right] J_3 Z \\
&\quad + J_1 \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[X,Y]} J_1 Z \\
&= \left[F_3(X,Y) + \omega_3 [X,Y] \right] J_2 Z \\
&\quad - \left[F_2(X,Y) + \omega_2 [X,Y] \right] J_3 Z - \left(\nabla_{[X,Y]} J_1 \right) Z. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Pe de altă parte, tot din condiţiile (1.9) avem:

$$\left(\nabla_{[X,Y]} J_1 \right) Z = \omega_3 [X,Y] J_2 Z - \omega_2 [X,Y] J_3 Z. \qquad (1.20)$$

Din (1.19) şi (1.20) obţinem:

$$[R(X,Y),J_1] = F_3(X,Y)J_2 - F_2(X,Y)J_3.$$

Procedând în mod similar, obţinem:

$$[R(X,Y),J_2] = -F_3(X,Y)J_1 + F_1(X,Y)J_3,$$
$$[R(X,Y),J_3] = F_2(X,Y)J_1 - F_1(X,Y)J_2$$

şi demonstraţia este completă. ■

Propoziţia 1.3.2 ([98])

Fie (M,σ,g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică (semi-)Riemann. Atunci:

$$\begin{aligned} R(X,Y,J_1Z,J_1W) &= R(X,Y,Z,W) + F_3(X,Y)g(J_3Z,W) + F_2(X,Y)g(J_2Z,W), \\ R(X,Y,J_2Z,J_2W) &= R(X,Y,Z,W) + F_1(X,Y)g(J_1Z,W) + F_3(X,Y)g(J_3Z,W), \\ R(X,Y,J_3Z,J_3W) &= R(X,Y,Z,W) + F_2(X,Y)g(J_2Z,W) + F_1(X,Y)g(J_1Z,W), \end{aligned} \tag{1.21}$$

pentru $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$.

Demonstraţie: Conform lemei anterioare, avem:

$$R(X,Y)J_1Z - J_1R(X,Y)Z = F_3(X,Y)J_2Z - F_2(X,Y)J_3Z. \tag{1.22}$$

Aplicând $g(\ \cdot\ , J_1W)$ în relaţia (1.22) obţinem:

$$-R(X,Y,J_1Z,J_1W)+R(X,Y,Z,W) = F_3(X,Y)g(J_2Z,J_1W)-F_2(X,Y)g(J_3Z,J_1W),$$

de unde rezultă imediat:

$$R(X,Y,J_1Z,J_1W) = R(X,Y,Z,W)+F_3(X,Y)g(J_3Z,W)+F_2(X,Y)g(J_2Z,W).$$

Similar se obţin şi celelalte două identităţi din propoziţie. ■

Propoziţia 1.3.3 ([171])

Fie (M,σ,g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune 4m. Dacă $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$ este o bază pseudo-ortonormată adaptată pentru TM atunci:

$$\begin{aligned} F_1(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m}\varepsilon_i R(X,Y,J_1E_i,E_i), \\ F_2(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m}\varepsilon_i R(X,Y,J_2E_i,E_i), \\ F_3(X,Y) &= \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m}\varepsilon_i R(X,Y,J_3E_i,E_i), \end{aligned} \tag{1.23}$$

pentru $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$*, unde* $\varepsilon_i = g(E_i,E_i)$, $\forall i = \overline{1,4m}$.

Demonstraţie: Din (1.21), luând $Z = J_1E_i$ şi $W = E_i$, obţinem:

$$\begin{aligned} R(X,Y,J_2J_1E_i,J_2E_i) &= R(X,Y,J_1E_i,E_i) \\ &\quad +F_1(X,Y)g(J_1^2E_i,E_i) + F_3(X,Y)g(J_3J_1E_i,E_i) \end{aligned}$$

de unde deducem:

$$R(X,Y,J_3E_i,J_2E_i) = -R(X,Y,J_1E_i,E_i) + \varepsilon_i F_1(X,Y). \tag{1.24}$$

Din (1.24) avem:

$$F_1(X,Y) = \varepsilon_i \left[R(X,Y,J_3E_i,J_2E_i) + R(X,Y,J_1E_i,E_i)\right]. \tag{1.25}$$

Din (1.25) deducem:

$$4mF_1(X,Y) = \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i \left[R(X,Y,J_3E_i,J_2E_i) + R(X,Y,J_1E_i,E_i)\right]. \tag{1.26}$$

Dar, deoarece $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$ este o bază pseudo-ortonormată adaptată, deci este de forma:

$$\{E_i, E_{m+i} = J_1E_i, E_{2m+i} = J_2E_i, E_{3m+i} = J_3E_i\}_{i=\overline{1,m}}$$

rezultă că avem:

$$\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,Y,J_3E_i,J_2E_i) = \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,Y,J_1E_i,E_i) \tag{1.27}$$

deoarece ambele sume au aceeaşi termeni.

În consecinţă, din (1.26) şi (1.27) obţinem:

$$F_1(X,Y) = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,Y,J_1E_i,E_i).$$

şi similar rezultă şi celelalte două relaţii din enunţul propoziţiei. ■

Propoziţia 1.3.4 ([171])

Fie (M,σ,g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m$.

Dacă $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$ este o bază pseudo-ortonormată adaptată pentru TM atunci:

$$\begin{aligned} F_1(X,Y) &= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,E_i,Y,J_1E_i), \\ F_2(X,Y) &= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,E_i,Y,J_2E_i), \\ F_3(X,Y) &= -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,E_i,Y,J_3E_i), \end{aligned} \tag{1.28}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$*, unde* $\varepsilon_i = g(E_i, E_i)$*,* $\forall i = \overline{1, 4m}$*.*

Demonstraţie: Deoarece $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$ este o bază pseudo-ortonormată adaptată pentru TM, avem:

$$\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, E_i, J_1 E_i, Y) = -\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, J_1 E_i, E_i, Y) \tag{1.29}$$

deoarece ambele sume au aceeaşi termeni, dar cu semnul opus.

Prin urmare avem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, E_i, J_1 E_i, Y) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i \left[R(X, E_i, J_1 E_i, Y) - R(X, J_1 E_i, E_i, Y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i \left[R(X, E_i, J_1 E_i, Y) + R(J_1 E_i, X, E_i, Y) \right] \end{aligned} \tag{1.30}$$

Utilizând identitatea lui Bianchi în (1.30) obţinem:

$$\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, E_i, J_1 E_i, Y) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(E_i, J_1 E_i, X, Y). \tag{1.31}$$

În final, din (1.23) şi (1.31) deducem:

$$\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, E_i, Y, J_1 E_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(E_i, J_1 E_i, X, Y) = -m F_1(X, Y),$$

deci:

$$F_1(X, Y) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X, E_i, Y, J_1 E_i).$$

În mod similar se deduc şi celelalte două relaţii din enunţul propoziţiei. ■

Propoziţia 1.3.5 ([98])

Fie (M, σ, g) *o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune 4m. Atunci:*

i. Dacă $m > 1$*, atunci:*

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= -(m+2) F_1(X, J_1 Y), \\ Ric(X, Y) &= -(m+2) F_2(X, J_2 Y), \\ Ric(X, Y) &= -(m+2) F_3(X, J_3 Y), \end{aligned} \tag{1.32}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ *.*

ii. Dacă m=1, atunci:

$$Ric(X, Y) = -\left[F_1(X, J_1 Y) + F_2(X, J_2 Y) + F_3(X, J_3 Y) \right], \tag{1.33}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$*.*

Demonstraţie: Din Propoziţia 1.3.2 avem:

$$R(X,Y,J_1Z,J_1W) = R(X,Y,Z,W)+F_3(X,Y)g(J_3Z,W)+F_2(X,Y)g(J_2Z,W).$$

Considerând $Z = Y, Y = W = E_i$ în relaţia anterioară, unde $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$ este o bază pseudo-ortonormată adaptată pentru TM, obţinem:

$$R(X,E_i,J_1Y,J_1E_i) = R(X,E_i,Y,E_i)+F_3(X,E_i)g(J_3Y,E_i)+F_2(X,E_i)g(J_2Y,E_i). \tag{1.34}$$

Înmulţind în relaţia (1.34) cu $\varepsilon_i = g(E_i,E_i)$ şi sumând după i, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{4m} \varepsilon_i R(X,E_i,J_1Y,J_1E_i) = Ric(X,Y) + F_3(X,J_3Y) + F_2(X,J_2Y). \tag{1.35}$$

Dar, din (1.28) şi (1.35) rezultă că avem:

$$Ric(X,Y) = -mF_1(X,J_1Y) - F_2(X,J_2Y) - F_3(X,J_3Y). \tag{1.36}$$

Similar obţinem:

$$Ric(X,Y) = -F_1(X,J_1Y) - mF_2(X,J_2Y) - F_3(X,J_3Y) \tag{1.37}$$

şi

$$Ric(X,Y) = -F_1(X,J_1Y) - F_2(X,J_2Y) - mF_3(X,J_3Y). \tag{1.38}$$

Dacă m=1, în mod evident, oricare din relaţiile (1.36)-(1.38) implică (1.33).
Dacă $m > 1$, atunci scăzând relaţiile (1.36) şi (1.37) obţinem:

$$F_1(X,J_1Y) = F_2(X,J_2Y). \tag{1.39}$$

Pe de altă parte, scăzând relaţiile (1.37) şi (1.38) obţinem:

$$F_2(X,J_2Y) = F_3(X,J_3Y). \tag{1.40}$$

În final, din (1.36)-(1.40) rezultă în mod evident (1.32). ■

Corolarul 1.3.6 ([98])
Fie (M,σ,g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m \geq 8$. Atunci:

i.

$$F_\alpha(X,Y) = \frac{1}{m+2} Ric(X,J_\alpha Y) \tag{1.41}$$

ii.

$$Ric(J_\alpha X,J_\alpha Y) = Ric(X,Y) \tag{1.42}$$

iii.

$$(\nabla_X Ric)(J_\alpha Y,J_\alpha Z) = (\nabla_X Ric)(Y,Z) \tag{1.43}$$

iv.

$$(\nabla_X Ric)(Y,J_\alpha Z) + (\nabla_Y Ric)(Z,J_\alpha X) + (\nabla_Z Ric)(X,J_\alpha Y) = 0 \tag{1.44}$$

pentru $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ *şi* $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

Demonstraţie:

i. Demonstraţia este evidentă din (1.32).

ii. Demonstraţia este imediată din (1.41) şi din faptul că F_α este antisimetric pentru $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

iii. Demonstraţia este imediată din (1.9) şi (1.42).

iv. Din (1.16) deducem că au loc identităţile:

$$\begin{aligned} dF_1 + \omega_2 \wedge F_3 - \omega_3 \wedge F_2 &= 0, \\ dF_2 + \omega_3 \wedge F_1 - \omega_1 \wedge F_3 &= 0, \\ dF_3 + \omega_1 \wedge F_2 - \omega_2 \wedge F_1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Demonstraţia este acum imediat din (1.9), (1.32) şi (1.45). ■

Teorema 1.3.7 ([98])

Tensorul Ricci pe o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită (M, σ, g) de dimensiune $4m \geq 8$ este paralel.

Demonstraţie: Din (1.44), pentru $\alpha = 1$, înlocuindu-l pe Z cu $J_1 Z$ obţinem:

$$-(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(J_1 Z, J_1 X) + (\nabla_{J_1 Z} Ric)(X, J_1 Y) = 0. \tag{1.46}$$

Dar, având în vedere (1.43), din (1.46) rezultă:

$$-(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(Z, X) = -(\nabla_{J_1 Z} Ric)(X, J_1 Y). \tag{1.47}$$

Folosind încă o dată (1.43) în (1.47) obţinem:

$$-(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(Z, X) = (\nabla_{J_1 Z} Ric)(J_2 X, J_3 Y). \tag{1.48}$$

Similar găsim:

$$-(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(Z, X) = (\nabla_{J_2 Z} Ric)(J_3 X, J_1 Y), \tag{1.49}$$

şi

$$-(\nabla_X Ric)(Y, Z) + (\nabla_Y Ric)(Z, X) = (\nabla_{J_3 Z} Ric)(J_1 X, J_2 Y). \tag{1.50}$$

Prin urmare, deducem:

$$(\nabla_{J_2 Z} Ric)(J_3 X, J_1 Y) = (\nabla_{J_1 Z} Ric)(J_2 X, J_3 Y). \tag{1.51}$$

Înlocuind în (1.51) pe X cu $J_1 X$, pe Y cu $J_2 Y$ şi pe Z cu $J_3 Z$, deducem:

$$(\nabla_{J_1 Z} Ric)(J_2 X, J_3 Y) = -(\nabla_{J_2 Z} Ric)(J_3 X, J_1 Y). \tag{1.52}$$

Din (1.51) şi (1.52) rezultă că avem:

$$(\nabla_{J_1 Z} Ric)(J_2 X, J_3 Y) = 0. \tag{1.53}$$

În final, înlocuind în (1.53) pe X cu $J_2 X$, pe Y cu $J_3 Y$ şi pe Z cu $J_1 Z$, obţinem:

$$(\nabla_Z Ric)(X, Y) = 0.$$

■

1.4 Proprietăţi remarcabile ale varietăţilor cuaternionice

Teorema 1.4.1 ([4], [31], [32], [98], [142], [150])
Orice varietate cuaternionică Kähler (M, σ, g) *cu metrică (semi-)Riemann, de dimensiune* $4m \geq 8$, *este spaţiu Einstein.*

Demonstraţie: Din Lema 1.3.1 avem:

$$R(X,Y)J_3Z - J_3R(X,Y)Z = F_2(X,Y)J_1Z - F_1(X,Y)J_2Z. \tag{1.54}$$

Aplicând $g(\ \cdot\ , J_2Z)$ în (1.54), obţinem:

$$R(X,Y,J_2Z,J_3Z) - g(J_3R(X,Y)Z, J_2Z) = -F_1(X,Y)g(Z,Z),$$

de unde găsim:

$$F_1(X,Y)g(Z,Z) = R(X,Y,J_1Z,Z) + R(X,Y,J_3Z,J_2Z). \tag{1.55}$$

Înlocuindu-l în (1.55) pe Y cu J_1X, deducem:

$$F_1(X,J_1X)g(Z,Z) = R(X,J_1X,J_1Z,Z) + R(X,J_1X,J_3Z,J_2Z). \tag{1.56}$$

Înlocuindu-l acum în (1.56) pe X cu J_2X, obţinem:

$$F_1(J_2X,J_3X)g(Z,Z) = R(J_2X,J_3X,J_1Z,Z) + R(J_2X,J_3X,J_3Z,J_2Z). \tag{1.57}$$

Adunând relaţiile (1.56) şi (1.57), şi ţinând cont de (1.41), găsim:

$$\begin{aligned} R(X,J_1X,J_1Z,Z) + R(X,J_1X,J_3Z,J_2Z) \\ +R(J_2X,J_3X,J_1Z,Z) + R(J_2X,J_3X,J_3Z,J_2Z) = \\ = \left[-\frac{1}{m+2}Ric(X,X) - \frac{1}{m+2}Ric(J_2X,J_2X)\right] g(Z,Z). \end{aligned} \tag{1.58}$$

Din (1.42 şi (1.58) rezultă că avem:

$$\begin{aligned} R(X,J_1X,J_1Z,Z) + R(X,J_1X,J_3Z,J_2Z) + R(J_2X,J_3X,J_1Z,Z) \\ +R(J_2X,J_3X,J_3Z,J_2Z) = -\frac{2}{m+2}Ric(X,X)g(Z,Z). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Analog obţinem:

$$\begin{aligned} R(X,J_1X,J_1Z,Z) + R(X,J_1X,J_3Z,J_2Z) + R(J_2X,J_3X,J_1Z,Z) \\ +R(J_2X,J_3X,J_3Z,J_2Z) = -\frac{2}{m+2}Ric(Z,Z)g(X,X). \end{aligned} \tag{1.60}$$

Din (1.59) şi (1.60) rezultă că avem:

$$Ric(X,X)g(Z,Z) = Ric(Z,Z)g(X,X),$$

pentru $\forall X, Z \in \Gamma(TM)$, de unde obţinem: $Ric(X,X) = \lambda g(X,X)$, deci M este spaţiu Einstein. ■

Teorema 1.4.2 ([4], [31], [32], [98], [142], [150])

Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită de dimensiune $n = 4m$.

i. Dacă $Ric = 0$, atunci M este local hiper-Kähler.

ii. Dacă $Ric \neq 0$ şi $4m \geq 8$, atunci M este ireductibilă.

Demonstraţie: i. Dacă tensorul Ricci este identic nul, atunci din Corolarul 1.3.6 rezultă că avem:

$$F_\alpha = 0, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{1.61}$$

Având în vedere însă (1.16), rezultă din (1.61) că avem:

$$\omega_\alpha = 0, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{1.62}$$

În final, din (1.9) şi (1.62) obţinem:

$$\nabla J_\alpha = 0, \forall \alpha = \overline{1,3},$$

deci M este local hiper-Kähler.

ii. Presupunem prin absurd că M este reductibilă. Atunci, deoarece $Ric \neq 0$, rezultă că M nu este plată şi cum Ric este paralel, din teorema de descompunere De Rham ([182]) rezultă că putem alege o vecinătate de coordonate U a lui M astfel încât varietatea semi-Riemann (U, g) să poată fi descompus ca un produs de $k \geq 2$ varietăţi semi-Riemann: (U_1, g_1), (U_2, g_2), $\ldots$, (U_k, g_k) astfel încât:

$$g(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} g_i (\pi_{i_*} X, \pi_{i_*} Y) \tag{1.63}$$

şi

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^{k} \rho_i g_i (\pi_{i_*} X, \pi_{i_*} Y), \tag{1.64}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TU)$, unde ρ_i este constantă, $\forall i = \overline{1,k}$, astfel încât $\rho_1 < \rho_2 < ... < \rho_k$, iar π_{i_*} este diferenţiala proiecţiei naturale π de la U la U_i.

Evident, fără a pierde generalitatea, putem presupune că avem $k = 2$.

Dar, deoarece:

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3},$$

rezultă din (1.63) că avem:

$$\begin{aligned} & g_1 (\pi_{1_*} J_\alpha X, \pi_{1_*} J_\alpha Y) + g_2 (\pi_{2_*} J_\alpha X, \pi_{2_*} J_\alpha Y) \\ & \quad = g_1 (\pi_{1_*} X, \pi_{1_*} Y) + g_2 (\pi_{2_*} X, \pi_{2_*} Y), \end{aligned} \tag{1.65}$$

pentru $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

Pe de altă parte, din (1.42) şi (1.64) obţinem:

$$\begin{aligned}&\rho_1 g_1\left(\pi_{1_*}J_\alpha X,\pi_{1_*}J_\alpha Y\right)+\rho_2 g_2\left(\pi_{2_*}J_\alpha X,\pi_{2_*}J_\alpha Y\right)\\ &=\rho_1 g_1\left(\pi_{1_*}X,\pi_{1_*}Y\right)+\rho_2 g_2\left(\pi_{2_*}X,\pi_{2_*}Y\right),\end{aligned}\tag{1.66}$$

pentru $\forall\alpha=\overline{1,3}$.

Eliminând pe $g_1\left(\pi_{1_*}J_\alpha X,\pi_{1_*}J_\alpha Y\right)$ între relaţiile (1.65) şi (1.66) rezultă că avem:

$$(\rho_1-\rho_2)\,g_2\left(\pi_{2_*}J_\alpha X,\pi_{2_*}J_\alpha Y\right)=(\rho_1-\rho_2)\,g_2\left(\pi_{2_*}X,\pi_{2_*}Y\right),\tag{1.67}$$

pentru $\forall\alpha=\overline{1,3}$.

Cum $\rho_1<\rho_2$, din (1.67) rezultă că avem:

$$g_2\left(\pi_{2_*}J_\alpha X,\pi_{2_*}J_\alpha Y\right)=g_2\left(\pi_{2_*}X,\pi_{2_*}Y\right),\tag{1.68}$$

pentru $\forall\alpha=\overline{1,3}$, şi atunci, din (1.65) şi (1.68), rezultă că avem şi:

$$g_1\left(\pi_{1_*}J_\alpha X,\pi_{1_*}J_\alpha Y\right)=g_1\left(\pi_{1_*}X,\pi_{1_*}Y\right),\tag{1.69}$$

pentru $\forall\alpha=\overline{1,3}$.

Dacă $\left(x^h\right)_{h=\overline{1,n}}=\left(\left(y^\beta\right)_{\beta=\overline{1,r}},\left(z^\gamma\right)_{\gamma=\overline{r+1,n}}\right)$ sunt coordonatele naturale pe $U=U_1\times U_2$, atunci metrica g are în raport cu $\left(x^h\right)_{h=\overline{1,n}}$ componentele de forma:

$$\left(g_{st}\right)_{s,t=\overline{1,n}}=\begin{pmatrix}\left(g_{\delta\eta}\right)_{\delta,\eta=\overline{1,r}} & 0\\ 0 & \left(g_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu=\overline{r+1,n}}\end{pmatrix},$$

unde $\left(g_{\delta\eta}\right)_{\delta,\eta=\overline{1,r}}$ sunt componentele lui g_1, independente de $\left(z^\gamma\right)_{\gamma=\overline{r+1,n}}$, iar $\left(g_{\lambda\mu}\right)_{\lambda,\mu=\overline{r+1,n}}$ sunt componentele lui g_2, independente de $\left(y^\beta\right)_{\beta=\overline{1,r}}$.

Deducem acum din (1.69) şi din Lema 1.3.1 că avem:

$$F_1(X,Y)=F_2(X,Y)=F_3(X,Y)=0.\tag{1.70}$$

În final, din Propoziţia 1.3.5 şi relaţia (1.70) rezultă că avem $Ric=0$. Am obţinut astfel o contradicţie, provenită din ipoteza că varietatea M ar fi reductibilă.

În consecinţă rezultă că M este ireductibilă. ■

1.5 Curburi secţionale ale varietăţilor cuaternionice. Teorema Schur

Definiţia 1.5.1 ([142])

Fie (M,σ,g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m$, $p\in M$ şi $X\in T_pM$ un vector nenul. Atunci 4-planul $Q(X)=Sp\{X,J_1X,J_2X,J_3X\}$ se numeşte 4-plan cuaternionic.

Definiţia 1.5.2 ([142])

Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m$ şi $p \in M$. Atunci un 2-plan $\pi = Sp\{X, Y\} \subset T_pM$ se numeşte:

i. 2-plan nedegenerat dacă:

$$\Delta(\pi) = g(X, X)\, g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \neq 0.$$

ii. 2-plan semi-cuaternionic dacă $Q(X) = Q(Y)$.

iii. 2-plan total real dacă $Q(X) \perp Q(Y)$.

Definiţia 1.5.3 ([142])

Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m$, $p \in M$ şi $\pi = Sp\{X, Y\} \subset T_pM$ un 2-plan nedegenerat. Atunci se numeşte curbura secţională a lui π:

$$K(\pi) = \frac{R(X, Y, X, Y)}{\Delta(\pi)}.$$

În particular, curbura secţională a unui 2-plan semi-cuaternionic se numeşte curbură secţională cuaternionică, iar curbura secţională a unui 2-plan total real se numeşte curbură secţională total reală.

Teorema 1.5.4 ([171])

Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită de dimensiune $4m \geq 8$.

Dacă în punctul $p \in M$ se cunosc curburile secţionale cuaternionice ale tuturor 2-planelor nedegenerate semi-cuaternionice $\pi \subset T_pM$, atunci tensorul de curbură Riemann-Christoffel R este unic determinat.

Demonstraţie: Presupunem că există doi tensori de curbură Riemann-Christoffel R şi R' astfel încât:

$$R(X, Y, X, Y) = R'(X, Y, X, Y), \tag{1.71}$$

pentru orice bază pseudo-ortonormată $\{X, Y\}$ a lui $\pi \subset T_pM$, cu $Q(X) = Q(Y)$.

Fie $S := R - R'$. Atunci, din (1.71) rezultă în mod evident că avem:

$$S(X, Y, X, Y) = 0, \tag{1.72}$$

pentru orice bază pseudo-ortonormată $\{X, Y\}$ a lui $\pi \subset T_pM$, cu $Q(X) = Q(Y)$.

Vom arăta în continuare că are loc (1.72) pentru $\forall X, Y \in T_pM$ şi atunci, via teorema corespunzătoare-varianta reală, demonstraţia va fi încheiată.

Din Lema 1.3.1 deducem că există 2-formele F_1, F_2, F_3, respectiv F_1', F_2', F_3', corespunzătoare lui R şi lui R' care satisfac relaţiile (1.14).

Fie:

$$F_\alpha^S := F_\alpha - F_\alpha', \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{1.73}$$

Având în vedere Corolarul 1.3.6, din (1.73) deducem, pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$:

$$F^S_\alpha(X,Y) = \frac{Ric_R(X,J_\alpha Y)}{m+2} - \frac{Ric_{R'}(X,J_\alpha Y)}{m+2}. \tag{1.74}$$

Pe de altă parte, din (1.74) şi Teorema 1.4.1 obţinem:

$$F^S_\alpha(X,Y) = \frac{\lambda_R g(X,J_\alpha Y)}{m+2} - \frac{\lambda_{R'} g(X,J_\alpha Y)}{m+2}. \tag{1.75}$$

Folosind notaţia:

$$k = \frac{\lambda_R - \lambda_{R'}}{m+2},$$

rezultă că (1.75) se poate rescrie:

$$F^S_\alpha(X,Y) = kg(X,J_\alpha Y). \tag{1.76}$$

Din Lema 1.3.1 avem:

$$R(X,Y)J_1Z - J_1R(X,Y)Z = F_3(X,Y)J_2Z - F_2(X,Y)J_3Z. \tag{1.77}$$

Aplicând $g(\ \cdot\ ,W)$ în (1.77) obţinem:

$$R(J_1Z,W,Y,X) = -R(Z,J_1W,Y,X)+F_3(X,Y)g(J_2Z,W)-F_2(X,Y)g(J_3Z,W) \tag{1.78}$$

şi similar găsim:

$$R(J_1Z,W,Y,X) = -R(Z,J_1W,Y,X)+F_3(X,Y)g(J_2Z,W)-F_2(X,Y)g(J_3Z,W). \tag{1.79}$$

Din (1.78) şi (1.79) rezultă:

$$S(J_1Z,W,Y,X) = -S(Z,J_1W,Y,X)+F^S_3(X,Y)g(J_2Z,W)-F^S_2(X,Y)g(J_3Z,W). \tag{1.80}$$

Distingem următoarele situaţii:

Cazul I. Presupunem că vectorii X şi Y sunt ambii neizotropi (i.e. $g(X,X) \neq 0$, $g(Y,Y) \neq 0$). Evident, fără a restrânge generalitatea îi putem presupune unitari temporali sau spaţiali.

Înlocuind în (1.80) pe Y cu J_2X (înlocuire ce are sens în acest caz), pe Z cu X şi pe W cu J_3X, obţinem:

$$S(J_1X,J_3X,J_2X,X) = -S(X,J_2X,X,J_2X) - F^S_2(X,J_2X)g(J_3X,J_3X). \tag{1.81}$$

Dar, deoarece $\pi = Sp\{X,J_2X\}$ este un 2-plan semi-cuaternionic, din (1.72) şi (1.81) rezultă că avem:

$$S(J_1X,J_3X,J_2X,X) = -F^S_2(X,J_2X)g(X,X). \tag{1.82}$$

Pe de altă parte din (1.76) şi (1.82) obţinem:

$$S(X, J_2X, J_3X, J_1X) = kg(X, X)^2. \tag{1.83}$$

Similar, găsim:

$$S(X, J_3X, J_1X, J_2X) = kg(X, X)^2 \tag{1.84}$$

şi

$$S(X, J_1X, J_2X, J_3X) = kg(X, X)^2. \tag{1.85}$$

Adunând relaţiile (1.83)-(1.85) şi folosind identitatea lui Bianchi obţinem:

$$3kg(X, X)^2 = 0. \tag{1.86}$$

Deoarece suntem în cazul în care X este un vector neizotrop, din (1.86) deducem că avem $k = 0$. Prin urmare, din (1.76) deducem:

$$F_\alpha^S = 0, \forall\alpha = \overline{1, 3}. \tag{1.87}$$

Din (1.80) şi (1.87) deducem:

$$S(X, Y, J_1Z, W) = S(X, Y, J_1W, Z). \tag{1.88}$$

Înlocuind în (1.88) pe Y cu J_2X, pe Z cu J_2Y şi pe W cu J_1Y, obţinem:

$$S(X, J_2X, J_3Y, J_1Y) = -S(X, J_2X, Y, J_2Y). \tag{1.89}$$

Analog deducem:

$$S(X, J_3X, J_1Y, J_2Y) = -S(X, J_3X, Y, J_3Y). \tag{1.90}$$

şi

$$S(X, J_1X, J_2Y, J_3Y) = -S(X, J_1X, Y, J_1Y). \tag{1.91}$$

Pe de altă parte, folosind (1.89)-(1.91) şi identitatea lui Bianchi, obţinem:

$$S(X, J_1X, J_2Y, J_3Y) = S(X, J_2Y, X, J_2Y) + S(X, J_3Y, X, J_3Y) \tag{1.92}$$

Înlocuindu-l în (1.92) pe Y cu J_2Y şi având în vedere relaţia (1.91), găsim:

$$-S(X, J_1X, J_2Y, J_3Y) = S(X, Y, X, Y) + S(X, J_1Y, X, J_1Y). \tag{1.93}$$

Din (1.92) şi (1.93) rezultă că avem:

$$S(X, Y, X, Y) + S(X, J_1Y, X, J_1Y) + S(X, J_2Y, X, J_2Y) + S(X, J_3Y, X, J_3Y) = 0. \tag{1.94}$$

Pe de altă parte, deoarece 2-planele $\pi_1 = Sp\{X+Y, J_1X+J_1Y\}$ şi $\pi_2 = Sp\{X-Y, J_1X-J_1Y\}$ sunt 2-plane nedegenerate semi-cuaternionice, din (1.72) deducem:

$$S(X+Y, J_1X+J_1Y, X+Y, J_1X+J_1Y) = 0 \tag{1.95}$$

şi:

$$S(X-Y, J_1X-J_1Y, X-Y, J_1X-J_1Y) = 0. \tag{1.96}$$

Având în vedere liniaritatea lui S în raport cu toate cele patru argumente, dezvoltând şi sumând (1.95) şi (1.96), obţinem:

$$S(X,Y,X,Y) + 3S(X, J_1Y, X, J_1Y) = 0. \tag{1.97}$$

În mod analog, deoarece 2-planele $\pi_1 = Sp\{X+J_2Y, J_1X+J_3Y\}$ şi $\pi_2 = Sp\{X-J_2Y, J_1X-J_3Y\}$ sunt 2-plane nedegenerate semi-cuaternionice, din (1.72) obţinem:

$$S(X+J_2Y, J_1X+J_3Y, X+J_2Y, J_1X+J_3Y) = 0 \tag{1.98}$$

şi:

$$S(X-J_2Y, J_1X-J_3Y, X-J_2Y, J_1X-J_3Y) = 0. \tag{1.99}$$

Având în vedere liniaritatea lui S, dezvoltând şi sumând (1.98) şi (1.99), obţinem:

$$S(X, J_3Y, X, J_3Y) + 3S(X, J_2Y, X, J_2Y) = 0. \tag{1.100}$$

În mod similar, deoarece 2-planele $\pi_1 = Sp\{X+J_3Y, J_1X-J_2Y\}$ şi $\pi_2 = Sp\{X-J_3Y, J_1X+J_2Y\}$ sunt 2-plane nedegenerate semi-cuaternionice, din (1.72) deducem:

$$S(X+J_3Y, J_1X-J_2Y, X+J_3Y, J_1X-J_2Y) = 0 \tag{1.101}$$

şi:

$$S(X-J_3Y, J_1X+J_2Y, X-J_3Y, J_1X+J_2Y) = 0. \tag{1.102}$$

Având în vedere liniaritatea lui S, dezvoltând şi sumând (1.101) şi (1.102), obţinem:

$$S(X, J_3Y, X, J_3Y) + 3S(X, J_2Y, X, J_2Y) = 0. \tag{1.103}$$

Considerând sistemul format din (1.94), (1.97), (1.100 şi (1.103) obţinem:

$$S(X,Y,X,Y) = 0.$$

Cazul II. Presupunem că vectorii X şi Y sunt unul izotrop, iar celălalt neizotrop. De exemplu presupunem că X este izotrop (i.e. $g(X,X) = 0$), iar Y neizotrop (i.e. $g(Y,Y) \neq 0$). Deoarece $g(X,X)$ este o funcţie polinomială de coordonatele lui X, rezultă că mulţimea zerourilor lui g nu poate conţine nici o mulţime deschisă şi prin urmare există un şir de vectori neizotropi $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}^*} \subset T_pM$ astfel încât $X_n \to X$. În consecinţă, din Cazul I rezultă că avem:

$$S(X_n, Y, X_n, Y) = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{1.104}$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ în (1.104), deducem că avem şi în acest caz:

$$S(X, Y, X, Y) = 0.$$

Cazul III. Presupunem că vectorii X şi Y sunt ambii izotropi (i.e. $g(X, X) = 0$, $g(Y, Y) = 0$). Atunci există două şiruri de vectori neizotropi $\{X_n\}_{n\in\mathbf{N}^*} \subset T_pM$ şi $\{Y_n\}_{n\in\mathbf{N}^*} \subset T_pM$ astfel încât $X_n \to X$ şi $Y_n \to Y$. În consecinţă, din cazul I rezultă că avem:

$$S(X_n, Y_n, X_n, Y_n) = 0, \forall n \in \mathbf{N}^*. \tag{1.105}$$

Trecând la limită când $n \to \infty$ în (1.105) deducem că şi în acest caz avem:

$$S(X, Y, X, Y) = 0$$

şi teorema este astfel complet demonstrată. ■

Definiţia 1.5.5 ([142])
Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită, de dimensiune $4m$. Atunci definim câmpul tensorial R_0 pe M prin:

$$R_0(X, Y, Z, W) = \frac{1}{4}\{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z) + \tag{1.106}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{3}[g(X, J_\alpha Z)g(Y, J_\alpha W) - g(X, J_\alpha W)g(Y, J_\alpha Z) + 2g(X, J_\alpha Y)g(Z, J_\alpha W)]\},$$

pentru $\forall X, Y, Z, W \in T_pM$, unde $\{J_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$ este o bază locală a lui σ în p, unde $p \in M$.

Observaţia 1.5.6 ([142])
Având în vedere definiţia anterioară, se verifică în mod trivial că R_0 are proprietăţile tensorului de curbură Riemann-Christoffel:
i. $R_0(X, Y, Z, W) = -R_0(Y, X, Z, W) = -R_0(X, Y, W, Z)$;
ii. $R_0(X, Y, Z, W) = R_0(Z, W, X, Y)$;
iii. $R_0(X, Y, Z, W) + R_0(X, Z, W, Y) + R_0(X, W, Y, Z) = 0$.

Observaţia 1.5.7 ([142])
Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler cu metrică indefinită de dimensiune $4m \geq 8$ având curbura secţională cuaternionică constantă c pentru orice 2-plan semi-cuaternionic $\pi \subset T_pM$. Atunci, având în vedere Definiţia 1.5.5, deducem că în punctul p avem: $R = cR_0$.

Teorema 1.5.8 ([171])

Fie (M, σ, g) o varietate cuaternionică Kähler conexă cu metrică indefinită de dimensiune $4m \geq 8$, având curbura secţională cuaternionică constantă $c = c(p)$ pentru orice 2-plan semi-cuaternionic $\pi \subset T_pM$, $p \in M$. Atunci rezultă că M este o varietate de curbură secţională cuaternionică constantă $c = \frac{\lambda}{m+2}$, unde λ este constanta Einstein.

Demonstraţie: Din Observaţia 1.5.7 rezultă că avem:

$$R' = R - cR_0 = 0.$$

Prin urmare, procedând ca în demonstraţia Teoremei 1.5.4, folosind Corolarul 1.3.6 obţinem:

$$\begin{aligned} F_\alpha^{R'}(X, Y) &= \frac{Ric_{R'}(X, J_\alpha Y)}{m+2} \\ &= \frac{Ric_R(X, J_\alpha Y)}{m+2} - \frac{cRic_{R_o}(X, J_\alpha Y)}{m+2}. \end{aligned} \tag{1.107}$$

Dar, din Teorema 1.4.1 avem pe de o parte:

$$Ric_R(X, J_\alpha Y) = \lambda g(X, J_\alpha Y) \tag{1.108}$$

iar pe de altă parte, dacă luăm o bază pseudo-ortonormată adaptată $\{E_i\}_{i=\overline{1,4m}}$, folosind (1.106) obinem:

$$\begin{aligned} Ric_{R_0}(X, J_\alpha Y) &= \sum_{i=1}^{4m} g(E_i, E_i) R_0(X, E_i, J_\alpha Y, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{4m} g(E_i, E_i)\{g(X, J_\alpha Y)g(E_i, E_i) - g(X, E_i)g(J_\alpha Y, E_i) \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{3}[g(X, J_\beta J_\alpha Y)g(E_i, J_\beta E_i) - g(X, J_\beta E_i)g(J_\alpha Y, J_\beta E_i)] \\ &\quad + 2\sum_{\beta=1}^{3} g(X, J_\beta E_i)g(J_\alpha Y, J_\beta E_i)\}. \end{aligned} \tag{1.109}$$

Dar, deoarece în (1.109) sunt sume de tipul:

$$\sum_{i=1}^{4m} g(E_i, E_i)\, g(X, J_\alpha Y)\, g(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{4m} (\pm 1)^2\, g(X, J_\alpha Y) = 4mg(X, J_\alpha Y) \tag{1.110}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{4m} g\left(E_i, E_i\right) g\left(X, E_i\right) g\left(J_\alpha Y, E_i\right) = \sum_{i=1}^{4m} g\left(E_i, E_i\right) g\left(X, g\left(J_\alpha Y, E_i\right) E_i\right) = g\left(X, J_\alpha Y\right), \tag{1.111}$$

din (1.109)-(1.111) deducem:

$$Ric_{R_0}(X, J_\alpha Y) = (4m+8) g\left(X, J_\alpha Y\right). \tag{1.112}$$

Din (1.107), (1.108) şi (1.112) obţinem:

$$F_\alpha^{R'}(X, Y) = \left(\frac{\lambda}{m+2} - c\right) g(X, J_\alpha Y). \tag{1.113}$$

Folosind notaţia:

$$k = \frac{\lambda}{m+2} - c \tag{1.114}$$

obţinem din (1.113) şi (1.114):

$$F_\alpha^{R'}(X, Y) = k g(X, J_\alpha Y). \tag{1.115}$$

Dar, cum $R' = 0$, rezultă că $F_\alpha^{R'} = 0$ şi prin urmare, din (1.115), luându-l pe X unitar temporal sau spaţial, iar pe $Y = J_\alpha X$ deducem că avem $k = 0$, deci:

$$c = \frac{\lambda}{m+2}$$

şi teorema este astfel complet demonstrată. ■

2 Hipersuprafeţe luminoase în forme spaţiale paracuaternionice

Teoria varietăţilor paracuaternionice s-a dezvoltat în ultimii 10 ani prin lucrările lui Blazic([35]), Vukmirovic([176]), Garcia-Rio, Matshushita şi Vasquez-Lorenzo ([66]), Ivanov, Minchev şi Zamkovoy ([101], [102]), Alekseevsky şi Kamishima ([6]), deşi bazele acestei teorii au fost puse încă din 1952, de către Libermann ([115]).

În acest capitol sunt prezentate rezultatele obţinute de autor în colaborare ([92], [93]), în studiul hipersuprafeţelor luminoase în forme spaţiale paracuaternionice.

În prima secţiune a capitolului sunt prezentate definiţia şi proprietăţile fundamentale ale varietăţilor paracuaternionice, folosindu-se în principal [35], [66], [96] şi [176].

În secţiunea a doua a capitolului se realizează o familiarizare cu conceptul de hipersuprafaţă luminoasă într-o varietate semi-Riemann, urmărind în general definiţiile, notaţiile şi rezultatele din Bejancu-Duggal ([27], [28]).

Ultimele trei secţiuni au la bază articolele [92] şi [93]. În secţiunea a treia sunt studiate hipersuprafeţele luminoase ale varietăţilor paracuaternionice, este dat un exemplu şi se gaseşte o interesantă corelaţie între hipersuprafeţele luminoase ale varietăţilor paracuaternionice şi structurile de contact şi paracontact.

În secţiunea a patra sunt obţinute diverse condiţii pentru ca o hipersuprafaţă luminoasă a unei varietăţi paracuaternionice să fie total geodezică. În ultima secţiune a capitolului se demonstrează că, în anumite condiţii, nu există hipersuprafeţe luminoase într-o formă spaţială paracuaternionică.

2.1 Varietăţi paracuaternionice

Definiţia 2.1.1 ([66], [176])

Fie $\overline{M}$ o varietate diferenţiabilă. Se numeşte structură aproape paracuaternionică pe $\overline{M}$ un subfibrat vectorial $\sigma \subset End\left(T\overline{M}\right)$ de rang 3, care este local generat de o structură aproape parahipercomplexă $H = (J_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$, i.e: $\exists\ (U_i)_{i\in I}$ o acoperire deschisă a lui M astfel încât pentru $\forall\ i \in I$, $\exists\ \{J_1, J_2, J_3\}$ o bază locală a lui σ definită pe U_i, astfel încât:

$$J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha \cdot Id, \forall\alpha = \overline{1,3},$$

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = -J_3,$$

unde

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

În plus, perechea $\left(\overline{M}, \sigma\right)$ se numeşte varietate aproape paracuaternionică.

Observaţia 2.1.2
Este de remarcat că Libermann ([115]) a introdus pentru prima oară în geometrie structurile paracuaternionice, numindu-le structuri cuaternionice de speţa a doua.

Definiţia 2.1.3 ([66], [176])
Fie $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ o varietate semi-Riemann şi σ o structură aproape paracuaternionică pe $\overline{M}$. Se spune că metrica $\overline{g}$ este adaptată structurii aproape paracuaternionice σ dacă :

$$\overline{g}\left(J_\alpha X, J_\alpha Y\right) = \varepsilon_\alpha \overline{g}\left(X,Y\right), \forall \alpha = \overline{1,3},$$

pentru orice câmpuri vectoriale X şi Y pe $\overline{M}$ şi orice bază locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ a lui σ.
În plus, $\left(\overline{M},\overline{g},\sigma\right)$ se numeşte varietate aproape paracuaternionică hermitiană.

Definiţia 2.1.4 ([66], [176])
O varietate aproape paracuaternionică hermitiană $\left(\overline{M},\overline{g},\sigma\right)$ se numeşte varietate paracuaternionică Kähler dacă $\overline{\nabla}$, conexiunea Levi-Civita indusă de $\overline{g}$, satisface următoarele condiţii:

$$\left\{\begin{array}{c} (\nabla_X J_1)Y = -\omega_3(X)J_2Y + \omega_2(X)J_3Y \\ (\nabla_X J_2)Y = -\omega_3(X)J_1Y + \omega_1(X)J_3Y \\ (\nabla_X J_3)Y = \omega_2(X)J_1Y - \omega_1(X)J_2Y \end{array}\right. \tag{2.1}$$

pentru orice X şi Y câmpuri vectoriale pe M, unde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ sunt 1-forme locale definite pe U_i, iar $\{J_1, J_2, J_3\}$ bază locală a lui σ pe U_i.

Definiţia 2.1.5 ([66])
Fie $\left(\overline{M},\overline{g},\sigma\right)$ o varietate paracuaternionică Kähler.
i. Un subspaţiu π al lui $T_p\overline{M}, p \in \overline{M}$, se numeşte nedegenerat dacă restricţia lui $\overline{g}$ la π este nedegenerată. În particular, un 2-plan $\pi \subset T_p\overline{M}$ este nedegenerat dacă şi numai dacă există o bază $\{X, Y\}$ a lui π astfel încât:

$$\Delta\left(\pi\right) = \overline{g}\left(X,X\right)\overline{g}\left(Y,Y\right) - \overline{g}\left(X,Y\right)^2 \neq 0. \tag{2.2}$$

ii. Dacă $X \in T_p\overline{M}$, $p \in \overline{M}$, atunci 4-planul $PQ(X) = Sp\left\{X, J_1X, J_2X, J_3X\right\}$ se numeşte 4-plan paracuaternionic.
iii. Un 2-plan $\pi = Sp\left\{X,Y\right\} \subset T_p\overline{M}$, $p \in \overline{M}$, se numeşte 2-plan semi-paracuaternionic dacă $PQ(X) = PQ(Y)$. În cazul în care $PQ(X) \perp PQ(Y)$, π se numeşte 2-plan total real.

Definiţia 2.1.6 ([66])
Fie $\left(\overline{M},\overline{g},\sigma\right)$ o varietate paracuaternionică Kähler, $p \in \overline{M}$ şi $\pi = Sp\left\{X,Y\right\} \subset T_p\overline{M}$ un 2-plan nedegenerat. Atunci se numeşte curbura secţională a lui π :

$$K\left(\pi\right) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{\Delta\left(\pi\right)}.$$

În particular, curbura secţională a unui 2-plan semi-paracuaternionic se numeşte curbură secţională paracuaternionică.

Definiţia 2.1.7 ([66])

O varietate paracuaternionică Kähler conexă având curbura secţională paracuaternionică constantă se numeşte formă spaţială paracuaternionică.

Observaţia 2.1.8

Varietăţilor paracuaternionice au următoarele proprietăţi remarcabile:

1. Orice varietate paracuaternionică $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ este de dimensiune $n = 4m$, iar signatura lui $\overline{g}$ este $s = 2m - 2m = 0$ ([35], [66], [176]).

2. Orice varietate paracuaternionică Kähler $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ de dimensiune $4m \geq 8$ este spaţiu Einstein ([35], [66], [176]).

3. Orice varietate paracuaternionică Kähler $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ de dimensiune $4m \geq 8$ având curbura scalară nulă este local o varietate para-hyper-Kähler ([35], [66], [176]).

4. Tensorul de curbură al unei forme spaţiale paracuaternionice $(\overline{M}(c), \overline{g}, \sigma)$ este:

$$\begin{aligned} &\overline{R}\,(X,Y)\,Z = \tfrac{c}{4}\left\{\bar{g}\,(Z,Y)\,X - \bar{g}\,(X,Z)\,Y + \right. \\ &\left. + \textstyle\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha \left[\bar{g}\,(Z,J_\alpha Y)\,J_\alpha X - \bar{g}\,(Z,J_\alpha X)\,J_\alpha Y + 2\,\bar{g}\,(X,J_\alpha Y)\,J_\alpha Z\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

pentru orice câmpuri vectoriale X, Y, Z pe $\overline{M}$ şi orice bază locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ a lui σ ([35], [66], [176]).

5. Orice varietate paracuaternionică nearly-Kähler de dimensiune cel puţin 8 este o varietate paraquaternionică Kähler ([96]). Varietăţile paracuaternionice nearly-Kähler sunt acele varietăţi aproape paracuaternionice hermitiene a căror 4-formă fundamentală $\Omega = \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha \Omega_\alpha \wedge \Omega_\alpha$, (unde $\Omega_\alpha(X,Y) = g\,(X, J_\alpha Y)$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$), satisface condiţia $(\nabla_X \Omega)\,(X, \cdot, \cdot, \cdot) = 0$, $\forall X \in \Gamma(TM)$.

Exemplul 2.1.9 Prototipul de varietate paracuaternionică este spaţiul proiectiv paracuaternionic $P^n\,(\mathbf{B})$. Acesta se defineşte astfel: fie $\mathbf{B}$ algebra numerelor paracuaternionice. Aceasta este o algebră asociativă, necomutativă şi unitară peste $\mathbf{R}$, de rang 3, generată de 1, i, j şi k, unde:

$$i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1, i \cdot j = -j \cdot i = -k.$$

Oricărui număr paracuaternionic $q \in \mathbf{B}$, $q = x + yi + zj + tk$, i se pot asocia:

i. conjugatul său:

$$\bar{q} = x - yi - zj - tk;$$

ii. partea reală:

$$Req = x;$$

iii. norma:

$$\|q\|^2 = x^2 + y^2 - z^2 - t^2.$$

Fie:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \{q \in \mathbf{B} \,|\|q\| \neq 0\}$$

grupul multiplicativ al paracuaternionilor inversabili şi fie:

$$\mathbf{B}^{n+1} = \left\{(q_0, q_1, ..., q_n) \left| q_i \in \mathbf{B}, \forall i = \overline{0, n} \right.\right\}.$$

Pe $\mathbf{B}^{n+1}$ avem endomorfismele J_1, J_2, J_3, definite astfel:

$$J_1(q) = iq, J_2(q) = jq, J_3(q) = kq.$$

Atunci, evident avem:

$$J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha \cdot Id, \forall \alpha = \overline{1, 3},$$

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = -J_3,$$

unde:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Un element $q \in \mathbf{B}^{n+1}$ se numeşte vector singular dacă şi numai dacă $\exists \lambda \in \mathbf{B}$, $\lambda \neq 0$, astfel încât: $\lambda \cdot q = 0$. Fie $\overset{\sim}{\mathbf{B}}^{n+1}$ mulţimea vectorilor nesingulari din $\mathbf{B}^{n+1}$ şi pe această mulţime definim o relaţie de echivalenţă $\sim$ astfel: $q \sim q' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \widetilde{\mathbf{B}}$ astfel încât $q' = \lambda q$.

Atunci spaţiul cât $\overset{\sim}{\mathbf{B}}^{n+1} / \widetilde{\mathbf{B}} \overset{not}{=} P^n(\mathbf{B})$ se numeşte spaţiu proiectiv paracuaternionic.

Pe $\mathbf{B}^{n+1}$ definim următorul produs scalar:

$$\langle q, q' \rangle = Re \sum_{i=0}^{n} q_i \cdot \overline{q'_i},$$

unde $q = (q_0, q_1, ..., q_n)$, $q' = (q'_0, q'_1, ..., q'_n)$, unde $q_i, q'_i \in \mathrm{B}, \forall i = \overline{0, n}$.

Evident, avem:

$$\langle J_\alpha q, J_\alpha q' \rangle = \varepsilon_\alpha \langle q, q' \rangle, \forall \alpha = \overline{1, 3},$$

unde $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$.

2.2 Hipersuprafeţe luminoase în varietăţi semi-Riemann

Definiţia 2.2.1 ([28])

Fie $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$ o varietate semi-Riemann de dimensiune $m + 2$ şi index $q \in \{1, 2, ..., m + 1\}$. O hipersuprafaţă (M, g) a lui $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$, cu $g = \overline{g}_{|M}$, se numeşte hipersuprafaţă luminoasă dacă g are rang constant m.

Observaţia 2.2.2
Fie fibratul $TM^{\perp}$, ale cărui fibre sunt definite prin:

$$T_pM^{\perp} = \left\{ Y_p \in T_p\overline{M} \left| \overline{g}_p \left(X_p, Y_p \right) = 0, \forall X_p \in T_pM \right. \right\}, \forall p \in M. \tag{2.4}$$

Din Definiţia 2.2.1 deducem că o hipersuprafaţă M a lui $\overline{M}$ este luminoasă dacă şi numai dacă $TM^{\perp}$ este o distribuţie de rang 1 pe M.

Fie $S\left(TM\right)$ distribuţia complementară a lui $TM^{\perp}$ în TM; această distribuţie este nedegenerată (cf. Bejancu-Duggal ([28]) şi în plus avem descompunerea în sumă directă ortogonală:

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp}. \tag{2.5}$$

Pe de altă parte, dacă $S\left(TM\right)^{\perp}$ este distribuţia complementară ortogonală a lui $S\left(TM\right)$ in $T\overline{M}_{|M}$, avem şi descompunerea în sumă directă ortogonală:

$$T\overline{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}. \tag{2.6}$$

Observaţia 2.2.3
Bejancu şi Duggal ([28]) au arătat că dacă $\left(M, g, S\left(TM\right)\right)$ este o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$, atunci există un unic fibrat vectorial $ltr\left(TM\right)$ de rang 1 peste M astfel încât pentru orice secţiune nenulă ξ a lui $TM^{\perp}$ pe o vecinătate de coordonate $U \subset M$, există o unică secţiune N a lui $ltr\left(TM\right)$ pe U satisfăcând condiţiile:

$$\overline{g}\left(N, \xi\right) = 1 \tag{2.7}$$

şi

$$\overline{g}\left(N, N\right) = \overline{g}\left(W, W\right) = 0, \forall W \in \Gamma\left(S\left(TM\right)_{|U}\right). \tag{2.8}$$

Fibratul vectorial $ltr\left(TM\right)$ se numeşte fibratul transvers nul al lui M în raport cu $S\left(TM\right)$.

Deducem astfel că avem descompunerea:

$$T\overline{M}_{|M} = S(TM) \perp \left(TM^{\perp} \oplus ltr\left(TM\right)\right) = TM \oplus ltr\left(TM\right), \tag{2.9}$$

unde semnul "$\oplus$" indică o descompunere în sumă directă, iar semnul "$\perp$" indică o descompunere în sumă directă ortogonală.

Observaţia 2.2.4
Fie $\left(M, g, S\left(TM\right)\right)$ o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\left(\overline{M}, \overline{g}\right)$. Dacă $\overline{\nabla}$ este conexiunea Levi-Civita pe $\overline{M}$, atunci avem:

$$\overline{\nabla}_XY = \nabla_XY + h\left(X, Y\right), \forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right) \tag{2.10}$$

şi

$$\overline{\nabla}_XV = -A_VX + \nabla_X^{\perp}V, \forall X \in \Gamma\left(TM\right), \forall V \in \Gamma\left(ltr\left(TM\right)\right), \tag{2.11}$$

unde $\nabla_X Y, A_V X \in \Gamma(TM)$, iar $h(X,Y), \nabla^{\perp}_X V \in \Gamma(ltr(TM))$.

Evident: ∇ este o conexiune liniară simetrică pe M, $\nabla^{\perp}$ este o conexiune liniară pe fibratul transvers nul $ltr(TM)$, h este o formă biliniară simetrică cu valori în $\Gamma(ltr(TM))$, iar A_V este operatorul formă pe M.

Dacă $\{\xi, N\}$ este o pereche de secţiuni pe $U \subset M$ ca în Observaţia 2.2.3, atunci putem defini o formă biliniară simetrică B şi o 1-formă τ pe U prin:

$$B(X,Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi), \forall X, Y \in \Gamma\left(TM_{|U}\right) \tag{2.12}$$

şi

$$\tau(X) = \overline{g}\left(\nabla^{\perp}_X N, \xi\right), \forall X \in \Gamma\left(TM_{|U}\right). \tag{2.13}$$

În consecinţă, din (2.10)-(2.13), deducem că avem:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \tag{2.14}$$

şi

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N. \tag{2.15}$$

Observaţia 2.2.5

Fie P proiecţia canonică de la TM pe $S(TM)$. Considerăm descompunerile:

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X,PY)\xi \tag{2.16}$$

şi

$$\nabla_X \xi = -A^*_{\xi} X + \varepsilon(X)\xi, \tag{2.17}$$

unde $\nabla^*_X PY, A^*_{\xi} X \in S(TM)$, iar ε este o 1-formă pe U.

Observăm că avem:

$$\varepsilon(X) = \overline{g}(\nabla_X \xi, N) = \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \xi - B(X,Y)N, N\right)$$

$$= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X \xi, N\right) = -\overline{g}(\xi, -A_N X + \tau(X)N) = -\tau(X)\overline{g}(\xi, N) = -\tau(X)$$

şi astfel, din (2.17) deducem:

$$\nabla_X \xi = -A^*_{\xi} X - \tau(X)\xi. \tag{2.18}$$

În plus, au loc şi următoarele egalităţi (cf. [28]):

$$\begin{cases} g(A_N X, PY) = C(X,PY) \\ \overline{g}(A_N X, N) = 0 \\ g\left(A^*_{\xi} X, PY\right) = B(X,PY) \\ \overline{g}\left(A^*_{\xi} X, N\right) = 0 \end{cases}, \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{2.19}$$

2.3 Hipersuprafeţe luminoase în varietăţi paracuaternionice

Fie $\left(\overline{M}, \overline{g}, \sigma\right)$ o varietate paracuaternionică, cu $\dim M = 4m > 4$ şi fie (M, g) o hipersuprafaţă luminoasă reală a lui $\overline{M}$.

Observăm că putem alege distribuţia $S(TM)$ astfel încât să conţină $J_\alpha\left(TM^\perp\right)$ ca un subfibrat vectorial, deoarece:

$$g\left(J_\alpha \xi, \xi\right) = 0, \forall \xi \in \Gamma\left(TM^\perp_{|U}\right),$$

$J_\alpha \xi$ sunt tangente la M şi astfel $J_\alpha\left(TM^\perp\right)$ este o distribuţie de rang 3 pe M astfel încât $J_\alpha\left(TM^\perp\right) \bigcap TM^\perp = \{0\}$.

Dacă $\{\xi, N\}$ este o pereche de secţiuni pe $U \subset M$ ca în Observaţia 2.2.3, atunci avem:

$$\overline{g}\left(J_\alpha N, \xi\right) = 0, \overline{g}\left(J_\alpha N, N\right) = 0,$$

şi astfel deducem că $J_\alpha N \in \Gamma\left(S\left(TM\right)\right)$.

Pe de altă parte, pentru $\forall \alpha \in \overline{1,3}$, avem:

$$\overline{g}\left(J_\alpha N, J_\alpha N\right) = \varepsilon_\alpha \overline{g}\left(N, N\right) = 0,$$

$$\overline{g}\left(J_\alpha \xi, J_\alpha \xi\right) = \varepsilon_\alpha g\left(\xi, \xi\right) = 0,$$

$$\overline{g}\left(J_\alpha N, J_\alpha \xi\right) = \varepsilon_\alpha g\left(N, \xi\right) = \varepsilon_\alpha$$

şi pentru $\forall \alpha, \beta \in \overline{1,3}, \alpha \neq \beta$, avem:

$$\overline{g}\left(J_\alpha N, J_\beta \xi\right) = \varepsilon_\beta \overline{g}\left(J_\beta J_\alpha N, J_\beta^2 \xi\right) = -\varepsilon_\beta^2 \overline{g}\left(J_\beta J_\alpha N, \xi\right)$$

$$= -\overline{g}\left(J_\beta J_\alpha N, \xi\right) = \pm \overline{g}\left(J_\gamma N, \xi\right) = 0,$$

unde $\gamma \in \{1, 2, 3\} \setminus \{\alpha, \beta\}$.

În consecinţă, rezultă că $J_\alpha\left(TM^\perp\right) \oplus J_\alpha N$ este un subfibrat vectorial al lui $S(TM)$ de rang 6 şi prin urmare rezultă că există o distribuţie nedegenerată D_0 pe M astfel încât:

$$S(TM) = \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_0, \tag{2.20}$$

unde

$$D_1 = J_1 \xi \perp J_2 \xi \perp J_3 \xi \tag{2.21}$$

şi

$$D_2 = J_1 N \perp J_2 N \perp J_3 N. \tag{2.22}$$

Propoziţia 2.3.1 ([92])
Distribuţia D_0 este invariantă n raport cu J_α, $\forall \alpha \in \overline{1,3}$.

Demonstraţie: Pentru $X \in \Gamma(D_0)$ şi $Y \in \Gamma(TM)$ avem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, Y) = -\overline{g}(X, J_\alpha Y), \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{2.23}$$

În particular, dacă luăm $Y = J_\alpha \xi \in \Gamma(D_1)$ în (2.23) obţinem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, J_\alpha \xi) = \varepsilon_\alpha \overline{g}(X, \xi) = 0 \tag{2.24}$$

şi similar, pentru $Y = J_\beta \xi \in \Gamma(D_1)$, cu $\beta \neq \alpha$, avem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, J_\beta \xi) = -\overline{g}(X, J_\alpha(J_\beta \xi)) = \pm \overline{g}(X, J_\gamma \xi) = 0, \tag{2.25}$$

unde $\gamma \in \{1,2,3\} - \{\alpha, \beta\}$

Prin urmare, din (2.24) şi (2.25) rezultă că avem:

$$J_\alpha X \perp D_1, \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{2.26}$$

Analog obţinem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, \xi) = -\overline{g}(X, J_\alpha \xi) = 0, \forall \xi \in \Gamma\left(TM^\perp\right). \tag{2.27}$$

şi prin urmare avem:

$$J_\alpha X \perp TM^\perp, \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{2.28}$$

Pe de altă parte, pentru orice secţiune N a lui $ltr(TM)$ avem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, J_\alpha N) = \varepsilon_\alpha \overline{g}(X, N) = 0, \forall \alpha \in \overline{1,3} \tag{2.29}$$

şi

$$\overline{g}(J_\alpha X, J_\beta N) = -\overline{g}(X, J_\alpha(J_\beta N)) = \pm \overline{g}(X, J_\gamma \xi) = 0, \forall \alpha \neq \beta, \tag{2.30}$$

unde $\gamma \in \{1,2,3\} - \{\alpha, \beta\}$.

Din (2.29) şi (2.30) rezultă că avem:

$$J_\alpha X \perp D_2, \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{2.31}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\overline{g}(J_\alpha X, N) = -\overline{g}(X, J_\alpha N) = 0, \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{2.32}$$

În final, din (2.26), (2.28), (2.31) şi (2.32) rezultă că avem:

$$J_\alpha X \perp \left\{(D_1 \oplus D_2) \perp TM^\perp \oplus ltr(TM)\right\}, \forall \alpha \in \overline{1,3},$$

deci rezultă că distribuţia D_0 este invariantă în raport cu J_α, $\forall \alpha \in \overline{1,3}$.

În plus, observăm că avem descompunerile:

$$TM = \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_0 \perp TM^\perp \tag{2.33}$$

şi respectiv:

$$T\overline{M} = \{D_1 \oplus D_2\} \perp D_0 \perp TM^\perp \oplus ltr(TM). \tag{2.34}$$

■

Exemplul 2.3.2 ([92])
Fie varietatea $\left(\mathbf{R}_4^8, \overline{g}, \{J_1, J_2, J_3\}\right)$, unde metrica $\overline{g}$ şi structurile $\{J_1, J_2, J_3\}$ sunt date prin:

$$\overline{g}\left((x_i)_{i=\overline{1,8}}, (y_i)_{i=\overline{1,8}}\right) = -\sum_{i=1}^{4} x_i y_i + \sum_{i=5}^{8} x_i y_i,$$

$$J_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, -x_6, x_5, -x_8, x_7),$$

$$J_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (-x_7, x_8, -x_5, x_6, -x_3, x_4, -x_1, x_2),$$

$$J_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (x_8, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1).$$

Se verifică acum imediat că avem:

$$J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha, \forall \alpha = \overline{1,3},$$

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = -J_3,$$

$$\overline{g}(J_\alpha X, J_\alpha Y) = \varepsilon_\alpha \overline{g}(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3},$$

unde:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Prin urmare rezultă că $\left(\mathbf{R}_4^8, \overline{g}, \{J_1, J_2, J_3\}\right)$ este o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. Definim în continuare hipersuprafaţa M a lui $\mathbf{R}_4^8$ prin:

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7) = (t_3 + t_6, t_4 + t_7, -t_2, t_1, t_3, t_5 + t_6, -t_2 - t_7, t_1).$$

Deducem că spaţiul tangent TM este generat de $\{W_i\}_{i \in \overline{1,7}}$, unde:

$$W_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1),$$

$$W_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, -1, 0),$$

$$W_3 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$W_4 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

$$W_5 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$W_6 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0),$$

$$W_7 = (0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0).$$

Dacă $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in TM^\perp$, atunci din condiţiile:

$$\overline{g}(X, W_i) = 0, \forall i = \overline{1,7},$$

obţinem:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = x_7 = 0 \\ x_4 = x_8 \end{cases},$$

de unde rezultă că:

$$X = (0,0,0,x_4,0,0,0,x_4) = x_4 W_1.$$

Rezultă astfel că $TM^{\perp} = SpW_1$ şi deci M este o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\mathbf{R}_4^8$.

Observaţia 2.3.3 ([92])
Considerăm câmpurile vectoriale locale:

$$V_\alpha = -J_\alpha N, U_\alpha = -J_\alpha \xi, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{2.35}$$

Atunci orice câmp vectorial local pe M se poate exprima astfel:

$$X = SX + \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha f_\alpha(X) V_\alpha, \tag{2.36}$$

unde S este proiecţia canonică pe distribuţia $D = \left\{TM^{\perp} \perp D_1\right\} \perp D_0$, iar f_α sunt 1-forme locale definite pe M prin:

$$f_\alpha(X) = g(X, U_\alpha), \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{2.37}$$

Din (2.36) şi Definiţia 2.1.1 rezultă că avem:

$$J_\alpha X = \phi_\alpha X + f_\alpha(X) N, \forall \alpha = \overline{1,3} \tag{2.38}$$

unde $\phi_\alpha X$ este componenta tangentă a lui $J_\alpha X$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

Definiţia 2.3.4
Fie M o varietate diferenţiabilă înzestrată cu un triplet (ϕ, ξ, η), unde ϕ este un câmp de endomorfisme ale spaţiului tangent, ξ este un câmp vectorial pe M, iar η este o 1-formă pe M, astfel încât:

$$\phi^2 = -\varepsilon I + \eta \circ \xi, \eta(\xi) = \varepsilon,$$

unde $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Atunci:
i. Dacă $\varepsilon = 1$, (ϕ, ξ, η) se numeşte structură aproape de contact pe M (cf. [34]).
ii. Dacă $\varepsilon = -1$, (ϕ, ξ, η) se numeşte structură Lorentziană aproape de paracontact pe M (cf. [124]).

Definiţia 2.3.5 ([92])
Fie M o varietate diferenţiabilă care admite o structură aproape de contact (ϕ_1, ξ_1, η_1) şi două structuri Lorentziene aproape de paracontact (ϕ_2, ξ_2, η_2) şi (ϕ_3, ξ_3, η_3), satisfăcând următoarele condiţii:

$$\eta_\alpha(\xi_\beta) = 0, \forall \alpha \neq \beta, \tag{2.39}$$

(2.40) $$\phi_\alpha \xi_\beta = -\phi_\beta \xi_\alpha = \varepsilon_\gamma \xi_\gamma,$$

(2.41) $$\eta_\alpha \circ \phi_\beta = -\eta_\beta \circ \phi_\alpha = \varepsilon_\gamma \eta_\gamma,$$

şi

(2.42) $$\phi_\alpha \circ \phi_\beta - \eta_\beta \circ \phi_\alpha = -\phi_\beta \circ \phi_\alpha + \eta_\alpha \circ \xi_\beta = \varepsilon_\gamma \phi_\gamma,$$

pentru orice permutare ciclică (α, β, γ) a lui $(1, 2, 3)$, unde $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$.

Atunci vom spune că M admite o 3-structură mixtă $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$.

Teorema 2.3.6 ([92])

Fie $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ o varietate paracuaternionică şi fie M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$ astfel încât ξ şi N sunt global definiţi pe M. Atunci M admite o 3-structură mixtă.

Demonstraţie: Din (2.38) avem:

(2.43) $$J_1 X = \phi_1 X + f_1(X)N.$$

Aplicând J_1 în (2.43) obţinem:

(2.44) $$-X = \phi_1^2 X - f_1(X)V_1 + f_1(\phi_1 X) N,$$

de unde deducem:

(2.45) $$f_1 \circ \phi_1 = 0$$

şi

(2.46) $$\phi_1^2 X = -X + f_1(X) V_1.$$

Pe de altă parte, avem:

(2.47) $$f_1(V_1) = g(V_1, U_1) = g(-J_1 N, -J_1 \xi) = g(N, \xi) = 1.$$

Din (2.45), (2.46) şi (2.47) rezultă că (ϕ_1, V_1, f_1) este o structură aproape de contact pe M.

Pe de altă parte, din (2.38) avem:

(2.48) $$J_2 X = \phi_2 X + f_2(X)N.$$

Aplicând J_2 în (2.48) obţinem:

(2.49) $$X = \phi_2^2 X - f_2(X)V_2 + f_2(\phi_2 X) N,$$

de unde deducem:

(2.50) $$f_2 \circ \phi_2 = 0$$

şi

(2.51) $$\phi_2^2 X = X + f_2(X) V_2.$$

Pe de altă parte, avem:

$$f_2(V_2) = g(V_2, U_2) = g(-J_2 N, -J_2\xi) = -g(N, \xi) = -1. \tag{2.52}$$

Din (2.50), (2.51) şi (2.52) rezultă că (ϕ_2, V_2, f_2) este o structură Lorentziană aproape de paracontact pe M. Analog rezultă că (ϕ_3, V_3, f_3) este o structură Lorentziană aproape de paracontact pe M.

Pentru $\forall \alpha \neq \beta$ avem:

$$\begin{aligned} f_\alpha(V_\beta) &= g(V_\beta, U_\alpha) = g(-J_\beta N, -J_\alpha \xi) \\ &= -g(N, J_\beta J_\alpha \xi) = \pm g(N, J_\gamma \xi) = 0, \end{aligned}$$

unde $\gamma \in \{1, 2, 3\} - \{\alpha, \beta\}$.

Pe de altă parte, din (2.38) obţinem:

$$\phi_\alpha V_\beta = J_\alpha V_\beta - f_\alpha(V_\beta) N = J_\alpha V_\beta.$$

Prin urmare, rezultă că avem:

$$\phi_1 V_2 = J_1 V_2 = -J_1 J_2 N = J_3 N = -V_3, \tag{2.53}$$

şi

$$\phi_2 V_1 = J_2 V_1 = -J_2 J_1 N = -J_3 N = V_3. \tag{2.54}$$

În consecinţă, din (2.53) şi (2.54) rezultă că avem:

$$\phi_1 V_2 = -\phi_2 V_1 = -V_3$$

şi similar obţinem:

$$\phi_2 V_3 = -\phi_3 V_2 = V_1$$

şi respectiv:

$$\phi_3 V_1 = -\phi_1 V_3 = -V_2.$$

Pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$ şi $\forall \alpha \neq \beta$, avem:

$$\begin{aligned} (f_\alpha \circ \phi_\beta)(X) &= f_\alpha(\phi_\beta(X)) = g(\phi_\beta X, -J_\alpha \xi) \\ &= -g(J_\beta X - f_\beta(X), J_\alpha \xi) = -g(J_\beta X, J_\alpha \xi). \end{aligned}$$

În particular, din relaţia anterioară avem:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ \phi_2)(X) &= -g(J_2 X, J_1 \xi) = g(X, J_2 J_1 \xi) \\ &= g(X, J_3 \xi) = -f_3(X) \end{aligned}$$

şi respectiv:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ \phi_1)(X) &= -g(J_1 X, J_2 \xi) = g(X, J_1 J_2 \xi) \\ &= -g(X, J_3 \xi) = f_3(X). \end{aligned}$$

În consecinţă rezultă că avem:

$$f_1 \circ \phi_2 = -f_2 \circ \phi_1 = -f_3$$

şi similar obţinem:

$$f_2 \circ \phi_3 = -f_3 \circ \phi_2 = f_1$$

şi

$$f_3 \circ \phi_1 = -f_1 \circ \phi_3 = -f_2.$$

Pe de altă parte, pentru orice $X \in \Gamma(TM)$ avem:

$$\begin{aligned}\phi_1(\phi_2 X) - f_2(X)V_1 &= J_1(\phi_2 X) - f_1(\phi_2 X)N - f_2(X)V_1 \\ &= J_1(J_2 X - f_2(X)N) + f_3(X)N - f_2(X)V_1 \\ &= -J_3 X + f_3(X)N = -\phi_3 X.\end{aligned}$$

Avem de asemenea:

$$\begin{aligned}-\phi_2(\phi_1 X) + f_1(X)V_2 &= -[J_2(\phi_1 X) - f_2(\phi_1 X)N] + f_1(X)V_2 \\ &= -J_2(J_1 X - f_1(X)N) + f_3(X)N + f_1(X)V_2 \\ &= -J_3 X + f_3(X)N = -\phi_3 X.\end{aligned}$$

Prin urmare, obţinem că:

$$\phi_1 \circ \phi_2 - f_2 \otimes V_1 = -\phi_2 \circ \phi_1 + f_1 \otimes V_2 = -\phi_3$$

şi similar găsim:

$$\phi_2 \circ \phi_3 - f_3 \otimes V_2 = -\phi_3 \circ \phi_2 + f_2 \otimes V_3 = \phi_1$$

şi

$$\phi_3 \circ \phi_1 - f_1 \otimes V_3 = -\phi_1 \circ \phi_3 + f_3 \otimes V_1 = -\phi_2.$$

În consecinţă, rezultă că (ϕ_1, V_1, f_1), (ϕ_2, V_2, f_2) şi (ϕ_3, V_3, f_3) definesc o 3-structură mixtă pe M. ■

2.4 Hipersuprafeţe luminoase total geodezice în varietăţi paracuaternionice

Lema 2.4.1 ([92])
Fie $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ o varietate paracuaternionică Kähler şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$. Atunci, pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, au loc relaţiile:

$$\begin{aligned}(\nabla_X \phi_1)Y &= -\omega_3(X)\phi_2 Y + \omega_2(X)\phi_3 Y + f_1(Y)A_N X - B(X,Y)V_1, \\ (\nabla_X \phi_2)Y &= -\omega_3(X)\phi_1 Y + \omega_1(X)\phi_3 Y + f_2(Y)A_N X - B(X,Y)V_2, \\ (\nabla_X \phi_3)Y &= \omega_2(X)\phi_1 Y - \omega_1(X)\phi_2 Y + f_3(Y)A_N X - B(X,Y)V_3.\end{aligned}$$

(2.55)

şi

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X f_1)\, Y &= -f_2(Y)\omega_3\,(X) + f_3(Y)\omega_2\,(X) - B\,(X, \phi_1 Y) - f_1\,(Y)\,\tau\,(X)\,,\\
(\nabla_X f_2)\, Y &= -f_1(Y)\omega_3\,(X) + f_3(Y)\omega_1\,(X) - B\,(X, \phi_2 Y) - f_2\,(Y)\,\tau\,(X)\,,\\
(\nabla_X f_3)\, Y &= f_1(Y)\omega_2\,(X) - f_2(Y)\omega_1\,(X) - B\,(X, \phi_3 Y) - f_3\,(Y)\,\tau\,(X)\,.
\end{aligned}
\tag{2.56}
$$

Demonstraţie: Din (2.1) şi (2.38) obţinem:

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_X J_1\right)(Y) &= -\omega_3\,(X)\, J_2 Y + \omega_2\,(X)\, J_3 Y\\
&= -\omega_3\,(X)\,(\phi_2 Y + f_2(Y) N) + \omega_2\,(X)\,(\phi_3 Y + f_3(Y) N)\\
&= [\omega_2\,(X)\,\phi_3 Y - \omega_3\,(X)\,\phi_2 Y] + [f_3(Y)\omega_2(X) - f_2(Y)\omega_3\,(X)]\, N
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Pe de altă parte, utilizând (2.14), (2.15) şi (2.38), obţinem:

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{\nabla}_X J_1\right)(Y) &= \overline{\nabla}_X J_1 Y - J_1\left(\overline{\nabla}_X Y\right)\\
&= \overline{\nabla}_X\,(\phi_1 Y + f_1\,(Y)\, N) - J_1\,(\nabla_X Y + B\,(X, Y)\, N)\\
&= \nabla_X \phi_1 Y + B\,(X, \phi_1 Y)\, N\\
&\quad + X\,(f_1\,(Y))\, N + f_1(Y)\,(-A_N X + \tau\,(X)\, N)\\
&\quad - (\phi_1\,(\nabla_X Y) + f_1\,(\nabla_X Y)\, N) + B\,(X, Y)\, V_1\\
&= [(\nabla_X \phi_1)\, Y - f_1(Y) A_N X + B\,(X, Y)\, V_1]\\
&\quad + [B\,(X, \phi_1 Y) + (\nabla_X f_1)\, Y + f_1(Y)\tau\,(X)]\, N
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

Identificând componentele tangenţiale şi componentele transversale din (2.57) şi (2.58), obţinem:

$$
(\nabla_X \phi_1)\, Y = -\omega_3(X)\phi_2 Y + \omega_2(X)\phi_3 Y + f_1\,(Y)\, A_N X - B\,(X, Y)\, V_1
$$

şi

$$
(\nabla_X f_1)\, Y = -f_2(Y)\omega_3\,(X) + f_3(Y)\omega_2\,(X) - B\,(X, \phi_1 Y) - f_1\,(Y)\,\tau\,(X)\,.
$$

În mod similar deducem celelalte două ecuaţii din (2.55) şi (2.56). ■

Teorema 2.4.2 ([92])
Fie $\left(\overline{M}, \overline{g}, \sigma\right)$ o varietate paracuaternionică Kähler şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$. Atunci M este total geodezică dacă şi numai dacă:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
C\,(X, U_\alpha) = 0\\
(\nabla_X f_\alpha)\, Y = 0
\end{array}
\right. ,
\tag{2.59}
$$

pentru $\forall \alpha \in \overline{1,3}$, $\forall X \in \Gamma\,(TM)$ şi $\forall Y \in \Gamma\,(D)$.

Demonstraţie: Din Lema 2.4.1 avem:

$$(\nabla_X \phi_1) Y = -\omega_3(X)\phi_2 Y + \omega_2(X)\phi_3 Y + f_1(Y) A_N X - B(X,Y) V_1. \tag{2.60}$$

În particular, luând în (2.60) pe $Y = V_1 \in \Gamma(D_2)$, utilizând (2.39) şi (2.40), obţinem:

$$-\phi_1 \nabla_X V_1 = -\omega_3(X) V_3 - \omega_2(X) V_2 + A_N X - B(X, V_1) V_1. \tag{2.61}$$

Din (2.19) şi (2.61), obţinem pentru $U_1 \in \Gamma(D_1)$:

$$-g(\phi_1 \nabla_X V_1, U_1) = C(X, U_1) - B(X, V_1). \tag{2.62}$$

Pe de altă parte:

$$g(\phi_1 \nabla_X V_1, U_1) = g(J_1 \nabla_X V_1, U_1) - f_1(\nabla_X V_1) g(N, U_1) = 0. \tag{2.63}$$

Din (2.62) şi (2.63) rezultă:

$$C(X, U_1) = B(X, V_1) \tag{2.64}$$

şi similar găsim:

$$C(X, U_2) = B(X, V_2), C(X, U_3) = B(X, V_3). \tag{2.65}$$

Din Lema 2.4.1 avem:

$$(\nabla_X f_1) Y = -f_2(Y)\omega_3(X) + f_3(Y)\omega_2(X) - B(X, \phi_1 Y) - f_1(Y)\tau(X). \tag{2.66}$$

În particular, luând în (2.66) pe $Y \in \Gamma(D_2)$, având în vedere definiţia lui f_α, obţinem:

$$(\nabla_X f_1) Y = -B(X, \phi_1 Y) \tag{2.67}$$

şi similar găsim:

$$(\nabla_X f_2) Y = -B(X, \phi_2 Y), (\nabla_X f_3) Y = -B(X, \phi_3 Y). \tag{2.68}$$

Prin urmare, din (2.64), (2.65), (2.67) şi (2.68) demonstraţia este completă. ■

Teorema 2.4.3 ([92])
Fie $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ o varietate paracuaternionică Kähler şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$. Atunci M este total geodezică dacă şi numai dacă:

$$A_N X, A^*_\xi X, \nabla^*_X Z_0 \notin \Gamma(D_2), \tag{2.69}$$

pentru $\forall X \in \Gamma(TM), \forall N \in \Gamma(ltr(TM)), \forall \xi \in \Gamma(TM^\perp), \forall Z_0 \in \Gamma(D_0)$.

Demonstraţie: Pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$, din (2.14) avem:

$$\overline{\nabla}_X J_\alpha N = \nabla_X J_\alpha N + B(X, J_\alpha N) N, \forall \alpha = \overline{1,3} \tag{2.70}$$

şi prin urmare, din (2.15) şi (2.70), obţinem:

$$B(X, V_\alpha) = f_\alpha(A_N X), \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{2.71}$$

Pe de altă parte, din (2.1) şi (2.18) avem:

$$\begin{aligned} h(X, U_1) &= \omega_3(X) J_2 \xi - \omega_2(X) J_3 \xi - J_1 \left(-A^*_\xi X - \tau(X) \xi\right) \\ & -J_1 h(X, \xi) - \nabla_X U_1 \end{aligned} \tag{2.72}$$

şi deoarece:

$$B(X, \xi) = \overline{g}(h(X, \xi), \xi) = 0 \tag{2.73}$$

deducem din (2.72) şi (2.73):

$$\begin{aligned} h(X, U_1) &= -\omega_3(X) U_2 + \omega_2(X) U_3 \\ & +J_1 \left(A^*_\xi X\right) - \tau(X) U_1 - \nabla_X U_1. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Similar obţinem:

$$\begin{aligned} h(X, U_2) &= -\omega_3(X) U_1 + \omega_1(X) U_3 \\ &+ \ J_2 \left(A^*_\xi X\right) - \tau(X) U_2 - \nabla_X U_2 \end{aligned} \tag{2.75}$$

şi

$$\begin{aligned} h(X, U_3) &= \omega_2(X) U_1 - \omega_1(X) U_2 \\ &+ \ J_3 \left(A^*_\xi X\right) - \tau(X) U_3 - \nabla_X U_3. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Pe de altă parte, pentru $\forall Z_0 \in \Gamma(D_0)$, avem:

$$\begin{aligned} h(X, J_1 Z_0) &= -\omega_3(X) J_2 Z_0 + \omega_2(X) J_3 Z_0 \\ & +J_1 (\nabla_X Z_0 + h(X, Z_0)) - \nabla_X J_1 Z_0. \end{aligned} \tag{2.77}$$

Deoarece:

$$J_1 h(X, Z_0) = -B(X, Z_0) V_1, \tag{2.78}$$

având în vedere (2.16) găsim:

$$\begin{aligned} h(X, J_1 Z_0) &= -\omega_3(X) J_2 Z_0 + \omega_2(X) J_3 Z_0 + J_1 (\nabla^*_X Z_0) \\ & -C(X, Z_0) U_1 - B(X, Z_0) V_1 - \nabla_X J_1 Z_0 \end{aligned} \tag{2.79}$$

şi similar obţinem:

$$\begin{aligned} h(X, J_2 Z_0) &= -\omega_3(X) J_1 Z_0 + \omega_1(X) J_3 Z_0 + J_2 (\nabla^*_X Z_0) \\ & -C(X, Z_0) U_2 - B(X, Z_0) V_2 - \nabla_X J_2 Z_0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

şi

$$h(X, J_3Z_0) = \omega_2(X)J_1Z_0 - \omega_1(X)J_2Z_0 + J_3(\nabla^*_X Z_0) - \tag{2.81}$$
$$- C(X, Z_0)U_3 - B(X, Z_0)V_3 - \nabla_X J_3 Z_0.$$

Dar, pe de altă parte, M este total geodezică dacă şi numai dacă:

$$\begin{cases} h(X, U_\alpha) = 0 \\ h(X, V_\alpha) = 0 \\ h(X, Z_0) = 0 \\ h(X, \xi) = 0 \end{cases}, \tag{2.82}$$

pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$, $\forall Z_0 \in \Gamma(D_0)$, $\forall\xi \in \Gamma(TM^\perp)$.

Demonstraţia este acum completă din (2.71), (2.74)-(2.76), (2.79)-(2.81) şi (2.82). ■

Teorema 2.4.4 ([92])

Fie $(\overline{M}, \overline{g}, \sigma)$ *o varietate paracuaternionică Kähler şi* M *o hipersuprafaţă luminoasă a lui* $\overline{M}$. *Atunci distribuţia* D_0 *este integrabilă dacă şi numai dacă:*

$$\begin{cases} C(X, Y) = C(Y, X) \\ C(X, J_\alpha Y) = C(Y, J_\alpha X) \\ B(X, J_\alpha Y) = B(Y, J_\alpha X) \end{cases}, \tag{2.83}$$

pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$ *şi* $\forall X, Y \in \Gamma(D_0)$.

Demonstraţie: Distribuţia D_0 este integrabilă dacă şi numai dacă:

$$\forall X, Y \in D_0 \Rightarrow [X, Y] \in D_0$$

şi având în vedere descompunerea (2.33) deducem că D_0 este integrabilă dacă şi numai dacă:

$$\begin{cases} \bar{g}([X, Y], N) = 0 \\ \bar{g}([X, Y], V_\alpha) = 0 \\ \bar{g}([X, Y], U_\alpha) = 0 \end{cases}, \tag{2.84}$$

pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$, $\forall X, Y \in \Gamma(D_0)$ şi $\forall N \in \Gamma(ltr(TM))$.

Pentru $\forall X, Y \in \Gamma(D_0)$ şi $\forall N \in \Gamma(ltr(TM))$, utilizând (2.15) obţinem:

$$\overline{g}([X, Y], N) = \overline{g}(Y, A_N X) - \overline{g}(X, A_N Y)$$

şi având în vedere (2.19) găsim:

$$\overline{g}([X, Y], N) = C(X, Y) - C(Y, X). \tag{2.85}$$

Din (2.1) şi (2.16), avem:

$$
\begin{aligned}
\overline{g}\left([X,Y],V_\alpha\right) &= -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X, J_\alpha N\right)\\
&= \overline{g}\left(J_\alpha\overline{\nabla}_X Y, N\right)-\overline{g}\left(J_\alpha\overline{\nabla}_Y X, N\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X J_\alpha Y-\left(\overline{\nabla}_X J_\alpha\right)Y, N\right)-\overline{g}\left(\overline{\nabla}_Y J_\alpha X-\left(\overline{\nabla}_Y J_\alpha\right)X, N\right)\\
&= \overline{g}\left(\nabla_X J_\alpha Y+h\left(X,J_\alpha Y\right),N\right)-\overline{g}\left(\nabla_Y J_\alpha X+h\left(Y,J_\alpha X\right),N\right)\\
&= \overline{g}\left(\nabla_X J_\alpha Y,N\right)-\overline{g}\left(\nabla_Y J_\alpha X,N\right)\\
&= \overline{g}\left(\nabla^*_X J_\alpha Y+C\left(X,J_\alpha Y\right)\xi,N\right)-\overline{g}\left(\nabla^*_Y J_\alpha X+C\left(Y,J_\alpha X\right)\xi,N\right)
\end{aligned}
$$

Aşadar, avem:

$$\overline{g}\left([X,Y],V_\alpha\right)=C\left(X,J_\alpha Y\right)-C\left(Y,J_\alpha X\right),\forall\alpha=\overline{1,3}. \tag{2.86}$$

Analog, obţinem:

$$\overline{g}\left([X,Y],U_\alpha\right)=B\left(X,J_\alpha Y\right)-B\left(Y,J_\alpha X\right),\forall\alpha=\overline{1,3}. \tag{2.87}$$

Demonstraţia este acum completă din (2.85), (2.86) şi (2.87). ■

Corolarul 2.4.5 ([92])
Fie $\left(\overline{M},\overline{g},\sigma\right)$ o varietate paracuaternionică Kähler şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}$. Atunci distribuţia D este paralelă.

Demonstraţie: Având în vedere descompunerea:

$$D=\left\{TM^{\perp}\perp D_1\right\}\perp D_0$$

rezultă că distribuţia D este paralelă dacă şi numai dacă:

$$g\left(\nabla_X Y,Z\right)=0,\forall Z\in\Gamma\left(D_1\right),\forall X,Y\in\Gamma\left(D\right). \tag{2.88}$$

Deoarece M este total geodezică, deducem că pentru $\forall\alpha=\overline{1,3}$, avem:

$$
\begin{aligned}
g\left(\nabla_X Y,U_\alpha\right) &= -\overline{g}\left(\overline{\nabla}_X Y,J_\alpha\xi\right)=\overline{g}\left(J_\alpha\overline{\nabla}_X Y,\xi\right)\\
&= \overline{g}\left(\overline{\nabla}_X J_\alpha Y-\left(\overline{\nabla}_X J_\alpha\right)Y,\xi\right)=0.
\end{aligned}
$$

În consecinţă, rezultă că distribuţia D este paralelă. ■

2.5 Inexistenţa hipersuprafeţelor luminoase în forme spaţiale paracuaternionice

Definiţia 2.5.1 ([28])
Fie M o hipersuprafaţă luminoasă a unei varietăţi semi-Riemann. Atunci se spune că M este total ombilicală dacă există $\rho\in\mathbf{R}$ astfel încât:

$$B\left(X,Y\right)=\rho g\left(X,Y\right) \tag{2.89}$$

pentru $\forall X,Y\in\Gamma\left(TM\right)$, unde B este dat de (2.12).

Lema 2.5.2 ([93])
Fie $\overline{M}(c)$ *o formă spaţială paracuaternionică şi* M *o hipersuprafaţă luminoasă a lui* $\overline{M}(c)$. *Atunci:*
i.

$$R(X,Y)Z = B(Y,Z)A_N X - B(X,Z)A_N Y + \frac{c}{4}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y) +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)\Phi_\alpha X - g(Z,J_\alpha X)\Phi_\alpha Y + 2g(X,J_\alpha Y)\Phi_\alpha Z]\} \tag{2.90}$$

ii.

$$\frac{c}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)f_\alpha(X) - g(Z,J_\alpha X)f_\alpha(Y) + 2g(X,J_\alpha Y)f_\alpha(Z)] =$$
$$= B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y) + (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z). \tag{2.91}$$

pentru $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$.

Demonstraţie: Din (2.3) şi (2.38) avem:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \frac{c}{4}\{g(Z,Y)X - g(X,Z)Y\\ &+\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)\Phi_\alpha X - g(Z,J_\alpha X)\Phi_\alpha Y + 2g(X,J_\alpha Y)\Phi_\alpha Z]\}\\ &+\frac{c}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)f_\alpha(X) - g(Z,J_\alpha X)f_\alpha(Y) + 2g(X,J_\alpha Y)f_\alpha(Z)]N.\end{aligned} \tag{2.92}$$

Pe de altă parte, utilizând (2.14) şi (2.15), obţinem:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= [R(X,Y)Z - B(Y,Z)A_N X + B(X,Z)A_N Y]\\ &+[B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y) + (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z)]N.\end{aligned} \tag{2.93}$$

Din (2.92) şi (2.93), identificând componentele tangente şi respectiv transverse obţinem (2.90) şi (2.91). ■

Teorema 2.5.3 ([93])
Nu există hipersuprafeţe luminoase total ombilicale într-o formă spaţială paracuaternionică $\overline{M}(c)$, *cu* $c \neq 0$.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că M este o hipersuprafaţă luminoasă total ombilicala a lui $\overline{M}(c)$, cu $c \neq 0$. Din (2.89) şi (2.93) obţinem:

$$-\frac{3c}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha f_\alpha(PZ)\, f_\alpha(PX) = \left(\rho^2 - \rho\tau(\xi) - \nabla_\xi \rho\right) g(PX,PZ). \tag{2.94}$$

Luând în (2.94): $PX = PZ = V_1$, găsim:

$$-\frac{3c}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha f_\alpha^2 (V_1) = 0. \tag{2.95}$$

Dar, din (2.39) şi (2.95) rezultă că avem $c = 0$ şi astfel am obţinut o contradicţie. Teorema este astfel complet demonstrată. ■

Teorema 2.5.4 ([93])
i. Nu există hipersuprafeţe luminoase ale lui $\overline{M}(c)$ $(c \neq 0)$ cu forma a doua fundamentală paralelă.
ii. Nu există hipersuprafeţe luminoase ale lui $\overline{M}(c)$ $(c \neq 0)$ cu distribuţia $S(TM)$ paralelă.

Demonstraţie:
i. Presupunem prin absurd că există M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}(c)$ cu $c \neq 0$, astfel încât: $\nabla h = 0$. Atunci, cf. Bejancu-Duggal ([27]) avem:

$$\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,\xi\right) = \overline{g}\left(\left(\nabla_X h\right)(Y,Z),N\right) - \overline{g}\left(\left(\nabla_Y h\right)(X,Z),N\right) = 0. \tag{2.96}$$

Pe de altă parte, din Lema 2.5.2 avem:

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)Z,\xi\right) &= \frac{c}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)f_\alpha(X)\\ &- g(Z,J_\alpha X)f_\alpha(Y) + 2g(X,J_\alpha Y)f_\alpha(Z)].\end{aligned} \tag{2.97}$$

Din (2.96) şi (2.97) deducem:

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[g(Z,J_\alpha Y)f_\alpha(X) - g(Z,J_\alpha X)f_\alpha(Y) + 2g(X,J_\alpha Y)f_\alpha(Z)\right] = 0 \tag{2.98}$$

Luând în (2.98) pe $X = Z = V_1$ şi pe $Y = \xi$, obţinem:

$$g(N,\xi) = 0,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.
ii. Presupunem prin absurd că există M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}(c)$ $(c \neq 0)$, cu distribuţia $S(TM)$ paralelă. Atunci, cf. Bejancu-Duggal ([27]) avem $C = 0$ şi

$$\begin{aligned}\overline{g}\left(\overline{R}(X,Y)PZ,N\right) &= \left(\nabla_X C\right)(Y,PZ) - \left(\nabla_Y C\right)(X,PZ)\\ &+ \tau(Y)C(X,PZ) - \tau(X)C(Y,PZ) = 0.\end{aligned} \tag{2.99}$$

Pe de altă parte, din (2.91) avem:

$$g(Y,Z)\overline{g}(X,N) - g(X,Z)\overline{g}(Y,N) + \sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)\overline{g}(\phi_\alpha X,N)$$

$$-g(Z,J_\alpha X)\overline{g}(\phi_\alpha Y,N) + 2g(X,J_\alpha Y)\overline{g}(\phi_\alpha Z,N)] = 0 \tag{2.100}$$

Considerând acum în (2.100) $X=\xi, Y=V_1, Z=U_1$ obţinem:

$$g\left(N,\xi\right)=0,$$

ceea ce reprezintă o contradicţie.

Teorema este astfel complet demonstrată. ■

Definiţia 2.5.5 ([28])

Fie $\overline{M}\left(c\right)$ o formă spaţială paracuaternionică şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}\left(c\right)$. Atunci se numeşte curbură secţională izotropă a lui M în punctul $p\in M$, în raport cu ξ_p, numărul real $K_{\xi_p}\left(M\right)$ definit prin:

$$K_{\xi_p}\left(M\right)=\frac{R\left(X_p,\xi_p,X_p,\xi_p\right)}{g\left(X_p,X_p\right)}, \tag{2.101}$$

unde X_p este un vector neizotrop din T_pM.

Propoziţia 2.5.6 ([93])

Nu există hipersuprafeţe luminoase de curbură secţională izotropă negativă sau pozitivă în forme spaţiale paracuaternionice.

Demonstraţie: Din (2.90) şi (2.101) avem:

$$K_\xi\left(M\right)=\frac{3c}{4\left\|X\right\|^2}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha f_\alpha^2\left(X\right). \tag{2.102}$$

Dacă luăm acum $X\in\Gamma\left(D_0\right)$ în (2.102) obţinem:

$$K_\xi\left(M\right)=0,$$

şi teorema este astfel complet demonstrată. ■

Teorema 2.5.7 ([93])

Nu există hipersuprafeţe luminoase în forme spaţiale paracuaternionice având curbura Ricci negativă sau pozitivă.

Demonstraţie: Fie $\overline{M}\left(c\right)$ o formă spaţială paracuaternionică şi M o hipersuprafaţă luminoasă a lui $\overline{M}\left(c\right)$. Atunci, avem:

$$Ric(X,Y)=\sum_{i=1}^{4m-8}g(Z_i,Z_i)g(R(X,Z_i)Y,Z_i)+g(R(X,\xi)Y,N)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{3}[g(R(X,U_\alpha)Y,V_\alpha)+g(R(X,V_\alpha)Y,U_\alpha)] \tag{2.103}$$

unde $\{\{Z_i\}_{i=\overline{1,4m-8}}, \{U_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}, \{V_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}\}$ este o o bază a lui $S(TM)_{|U}$, $\xi \in \Gamma\left(TM^\perp\right)$, iar N este dat în Observaţia 2.2.3.

Prin calcul direct, din (2.14)-(2.17), (2.90) şi (2.91) obţinem:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{4m-8} g(Z_i,Z_i)g(R(X,Z_i)Y,Z_i) &= (2-m)cg(X,Y)+ \\
&+\sum_{i=1}^{4m-8} g(Z_i,Z_i)[B(Y,Z_i)C(X,Z_i)-B(X,Y)C(Z_i,Z_i)]+ \\
&+\frac{c}{4}\sum_{i=1}^{4m-8} g(Z_i,Z_i)[g(Z_i,Y)g(X,Z_i)-3\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha g(X,J_\alpha Z_i)g(Y,J_\alpha Z_i)]
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,\xi)Y,N) &= -\frac{c}{4}\{g(X,Y)+ \\
&+\sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Y,J_\alpha\xi)g(X,J_\alpha N)+2g(X,J_\alpha\xi)g(Y,J_\alpha N)]\}
\end{aligned}
\tag{2.105}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{3} g(R(X,J_\alpha\xi)Y,J_\alpha N) &= \sum_{\alpha=1}^{3}\{B(J_\alpha\xi,Y)C(X,J_\alpha N)- \\
&-B(X,Y)C(J_\alpha\xi,J_\alpha N)+\frac{c}{4}g(J_\alpha\xi,Y)g(X,J_\alpha N)\}+ \\
&+\frac{c}{4}[g(X,Y)+2g(Y,J_1\xi)g(X,J_1N)+4g(X,J_1\xi)g(Y,J_1N)]
\end{aligned}
\tag{2.106}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^{3} g(R(X,J_\alpha N)Y,J_\alpha\xi) &= \sum_{\alpha=1}^{3}\{B(J_\alpha N,Y)C(X,J_\alpha\xi)- \\
&-B(X,Y)C(J_\alpha N,J_\alpha\xi)+\frac{c}{4}g(J_\alpha N,Y)g(X,J_\alpha\xi)\}+ \\
&+\frac{c}{4}[g(X,Y)+2g(Y,J_1N)g(X,J_1\xi)+4g(X,J_1N)g(Y,J_1\xi)]
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

În final, din (2.103)-(2.107), obţinem $Ric\,(X,\xi)=0$, şi teorema este complet demonstrată. $\blacksquare$

3 Varietăţi aproape paracuaternionice produs

În acest capitol sunt prezentate rezultatele obţinute de autor în studiul produselor de varietăţi paracuaternionice ([172], [173]).

Yano şi Kon ([183]) au arătat că produsul a două varietăţi Kähler este tot o varietate Kähler, iar Kang şi Nam ([106]) au studiat produsul a două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene. În prima secţiune a capitolului autorul investighează ce se întâmplă în geometria paracuaternionică.

În secţiunea a doua se defineşte noţiunea de varietate aproape paracuaternionică produs şi se dă un exemplu de astfel de varietate.

În secţiunea a treia a capitolului, utilizând rezultatele obţinute anterior, se construieşte tensorul de curbură al varietăţii produs a două forme spaţiale paracuaternionice.

În secţiunea a patra sunt extinse rezultatele obţinute de Atceken în cazul Kähler ([18]), fiind studiate subvarietăţile F-invariante şi F-antiinvariante ale unei varietăţi paracuaternionice aproape produs.

3.1 Produse de varietăţi paracuaternionice

O varietate diferenţiabilă M de dimensiune n se numeşte varietate aproape produs dacă există un tensor F de tip (1,1) pe M astfel încât:

$$F^2 = Id. \tag{3.1}$$

Dacă în plus varietatea aproape produs (M, F) poate fi înzestrată cu o metrica semi-Riemann g astfel încât:

$$g(FX, FY) = g(X, Y), \tag{3.2}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, atunci (M, F, g) se numeşte varietate semi-Riemann aproape produs.

Fie (M_1, g_1, σ_1) o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. Atunci, conform Definiţiilor 2.1.1 şi 2.1.3, rezultă că în orice vecinătate de coordonate $U_i^{(1)}$ a lui M_1 există o bază locală $\left\{J_1^1, J_2^2, J_3^3\right\}$ a lui σ_1 astfel încât:

$$\left(J_\alpha^{(1)}\right)^2 = -\varepsilon_\alpha \cdot Id, \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.3}$$

$$J_1^{(1)} J_2^{(1)} = -J_2^{(1)} J_1^{(1)} = -J_3^{(1)} \tag{3.4}$$

şi

$$g_1\left(J_\alpha^{(1)} X, J_\alpha^1 Y\right) = \varepsilon_\alpha g_1(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.5}$$

unde:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Fie (M_2, g_2, σ_2) o altă varietate aproape paracuaternionică hermitiană. Atunci, în orice vecinătate de coordonate $U_i^{(2)}$ a lui M_2 există o bază locală $\left\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}\right\}$ a lui σ_2 astfel încât:

$$\left(J_\alpha^{(2)}\right)^2 = -\varepsilon_\alpha \cdot Id, \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.6}$$

$$J_1^{(2)} J_2^{(2)} = -J_2^{(2)} J_1^{(2)} = -J_3^{(2)}, \tag{3.7}$$

şi

$$g_2\left(J_\alpha^{(2)} X, J_\alpha^{(2)} Y\right) = \varepsilon_\alpha g_2(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.8}$$

unde:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Fie $M = M_1 \times M_2$ varietatea produs a varietăţilor paracuaternionice Kähler M_1 şi M_2. Definim o metrică semi-Riemann g pe M prin:

$$g(X, Y) = g_1(\Pi_1 X, \Pi_1 Y) + g_2(\Pi_2 X, \Pi_2 Y) \tag{3.9}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, unde:

$$\Pi_1 : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM_1), \Pi_2 : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM_2)$$

sunt proiecţiile canonice.

Lema 3.1.1 ([172])
Varietatea produs a varietăţilor paracuaternionice (M_1, g_1, σ_1) şi (M_2, g_2, σ_2) este o varietate semi-Riemann aproape produs.

Demonstraţie: Considerăm pe varietatea produs $M = M_1 \times M_2$ metrica semi-Riemann definită prin (3.9) şi fie:

$$F := \Pi_1 - \Pi_2. \tag{3.10}$$

Deoarece avem:

$$\Pi_1^2 = \Pi_1, \Pi_2^2 = \Pi_2, \Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0 \tag{3.11}$$

obţinem din (3.10) şi (3.11):

$$F^2 = (\Pi_1 - \Pi_2)(\Pi_1 - \Pi_2) = \Pi_1 - \Pi_2 = F. \tag{3.12}$$

Pe de altă parte, pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, avem:

$$g(FX, FY) = g_1(\Pi_1 FX, \Pi_1 FY) + g_2(\Pi_2 FX, \Pi_2 FY) =$$

$$= g_1(\Pi_1(\Pi_1 - \Pi_2) X, \Pi_1(\Pi_1 - \Pi_2) Y) + g_2(\Pi_2(\Pi_1 - \Pi_2) X, \Pi_2(\Pi_1 - \Pi_2) Y) =$$

$$= g_1(\Pi_1 X, \Pi_1 Y) + g_2(\Pi_2 X, \Pi_2 Y) = g(X, Y).$$

Prin urmare, rezultă că (M, F, g) este o varietate semi-Riemann aproape produs. ■

Propoziţia 3.1.2 ([172])
Varietatea produs $M = M_1 \times M_2$ *a două varietăţi paracuaternionice* (M_1, g_1, σ_1) *şi* (M_2, g_2, σ_2) *admite o structură naturală de varietate aproape paracuaternionică hermitiană.*

Demonstraţie: Definim trei endomorfisme ale lui TM prin:

$$J_\alpha X = J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X + J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X, \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.13}$$

şi considerăm fibratul vectorial σ pe M generat de $\{J_1, J_2, J_3\}$, unde $\left\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}\right\}$ şi $\left\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}\right\}$ sunt baze locale ale lui σ_1, respectiv σ_2.

Pe orice vecinătate de coordonate $U_1 \times U_2$ a lui M avem astfel o bază locală $\{J_1, J_2, J_3\}$ definită prin (3.13).

Pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$ avem:

$$J_\alpha^2 X = J_\alpha \left(J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X + J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_\alpha^{(1)} \Pi_1 \left(J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X + J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X \right) + J_\alpha^{(2)} \Pi_2 \left(J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X + J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_\alpha^{(1)} \left(J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X \right) + J_\alpha^{(2)} \left(J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= -\varepsilon_\alpha \Pi_1 X - \varepsilon_\alpha \Pi_2 X = -\varepsilon_\alpha X.$$

Pe de altă parte, avem:

$$J_1 J_2 X = J_1 \left(J_2^{(1)} \Pi_1 X + J_2^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_1^{(1)} \Pi_1 \left(J_2^{(1)} \Pi_1 X + J_2^{(2)} \Pi_2 X \right) + J_1^{(2)} \Pi_2 \left(J_2^{(1)} \Pi_1 X + J_2^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_1^{(1)} \left(J_2^{(1)} \Pi_1 X \right) + J_1^{(2)} \left(J_2^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= -J_3^{(1)} \Pi_1 X - J_3^{(2)} \Pi_2 X = -J_3 X$$

şi similar:

$$J_2 J_1 X = J_2 \left(J_1^{(1)} \Pi_1 X + J_1^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_2^{(1)} \Pi_1 \left(J_1^{(1)} \Pi_1 X + J_1^{(2)} \Pi_2 X \right) + J_2^{(2)} \Pi_2 \left(J_1^{(1)} \Pi_1 X + J_1^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_2^{(1)} \left(J_1^{(1)} \Pi_1 X \right) + J_2^{(2)} \left(J_1^{(2)} \Pi_2 X \right) =$$
$$= J_3^{(1)} \Pi_1 X + J_3^{(2)} \Pi_2 X = J_3 X.$$

Prin urmare, rezultă că sunt îndeplinite condiţiile din Definiţia 2.1.1, deci σ este o structură aproape paracuaternionică pe M.

Pe de altă parte, deoarece:

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g_1 (\Pi_1 J_\alpha X, \Pi_1 J_\alpha Y) + g_2 (\Pi_2 J_\alpha X, \Pi_2 J_\alpha Y) =$$

$$= g_1 \left(J_\alpha^{(1)} \Pi_1 X, J_\alpha^{(1)} \Pi_1 Y\right) + g_2 \left(J_\alpha^{(2)} \Pi_2 X, J_\alpha^{(2)} \Pi_2 Y\right) =$$

$$= \varepsilon_\alpha g_1 (\Pi_1 X, \Pi_1 Y) + \varepsilon_\alpha g_2 (\Pi_2 X, \Pi_2 Y) = \varepsilon_\alpha g(X, Y),$$

rezultă că metrica g este adaptată structurii paracuaternionice σ pe M.

În consecinţă, rezultă că (M, g, σ) este o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. ■

3.2 Produse de varietăţi paracuaternionice Kähler

Fie (M_1, g_1, σ_1) o varietate paracuaternionică Kähler. Atunci, conform Definiţiei 2.1.4, conexiunea Levi-Civita $\nabla^{(1)}$ indusă de g_1, satisface următoarele condiţii:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla_X^{(1)} J_1\right) Y = -\omega_3^{(1)} (X) J_2^{(1)} Y + \omega_2^{(1)} (X) J_3^{(1)} Y \\ \left(\nabla_X^{(1)} J_2\right) Y = -\omega_3^{(1)} (X) J_1^{(1)} Y + \omega_1^{(1)} (X) J_3^{(1)} Y \\ \left(\nabla_X^{(1)} J_3\right) Y = \omega_2^{(1)} (X) J_1^{(1)} Y - \omega_1^{(1)} (X) J_2^{(1)} Y \end{array} \right. , \tag{3.14}$$

pentru orice X şi Y câmpuri vectoriale pe M_1, unde $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}$ sunt 1-forme locale definite pe $U_i^{(1)}$, $\left\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}\right\}$ este o bază locală a lui σ_1 pe $U_i^{(1)}$, iar $U_i^{(1)}$ este o vecinătate de coordonate a lui M_1.

Fie (M_2, g_2, σ_2) o altă varietate paracuaternionică Kähler. Atunci $\nabla^{(2)}$, conexiunea Levi-Civita indusă de g_2, satisface următoarele condiţii:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla_X^{(2)} J_1\right) Y = -\omega_3^{(2)} (X) J_2^{(2)} Y + \omega_2^{(2)} (X) J_3^{(2)} Y \\ \left(\nabla_X^{(2)} J_2\right) Y = -\omega_3^{(2)} (X) J_1^{(2)} Y + \omega_1^{(2)} (X) J_3^{(2)} Y \\ \left(\nabla_X^{(2)} J_3\right) Y = \omega_2^{(2)} (X) J_1^{(2)} Y - \omega_1^{(2)} (X) J_2^{(2)} Y \end{array} \right. , \tag{3.15}$$

pentru orice X şi Y câmpuri vectoriale pe M_2, unde $\omega_1^{(2)}, \omega_2^{(2)}, \omega_3^{(2)}$ sunt 1-forme locale definite pe $U_i^{(2)}$, $\left\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}\right\}$ este o bază locală a lui σ_2 pe $U_i^{(2)}$, iar $U_i^{(2)}$ este o vecinătate de coordonate a lui M_2.

Fie $M = M_1 \times M_2$ varietatea produs a varietăţilor paracuaternionice Kähler M_1 şi M_2, g metrica semi-Riemann pe M definită prin (3.9), F structura aproape produs pe M definită prin (3.10), $\{J_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$ endomorfismele definite prin (3.13) şi σ fibratul vectorial pe M generat de $\{J_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$. Evident, conexiunea Levi-Civita ∇ pe M este dată de:

$$\nabla_X Y = \nabla^{(1)}_{\Pi_1 X} (\Pi_1 Y) + \nabla^{(2)}_{\Pi_2 X} (\Pi_2 Y), \tag{3.16}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Pe orice vecinătate de coordonate $U_1 \times U_2$ a lui M definim 1-formele locale:

$$\omega_\alpha(X) = \omega_\alpha^{(1)}(\Pi_1 X) + \omega_\alpha^{(2)}(\Pi_2 X), \forall \alpha = \overline{1,3} \tag{3.17}$$

pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$.

Lema 3.2.1 ([172])

Fie $M = M_1 \times M_2$ varietatea produs a două varietăţi paracuaternionice Kähler (M_1, g_1, σ_1) şi (M_2, g_2, σ_2) înzestrată cu metrica semi-Riemann g definită prin (3.9). Atunci conexiunea Levi-Civita indusă de g satisface condiţiile:

$$\begin{cases} \nabla_X J_1 = \frac{1}{2}\left[-\omega_3(X) J_2 + \omega_2(X) J_3 - \omega_3(FX) J_2 F + \omega_2(FX) J_3 F\right] \\ \nabla_X J_2 = \frac{1}{2}\left[-\omega_3(X) J_1 + \omega_1(X) J_3 - \omega_3(FX) J_1 F + \omega_1(FX) J_3 F\right] \\ \nabla_X J_3 = \frac{1}{2}\left[\omega_2(X) J_1 - \omega_1(X) J_2 + \omega_2(FX) J_1 F - \omega_1(FX) J_2 F\right] \end{cases}, \tag{3.18}$$

pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$.

Demonstraţie: Pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ avem:

$$\begin{aligned} (\nabla_X J_1) Y &= \nabla_X J_1 Y - J_1 \nabla_X Y = \\ &= \nabla^{(1)}_{\Pi_1 X}(\Pi_1 J_1 Y) + \nabla^{(2)}_{\Pi_2 X}(\Pi_2 J_1 Y) \\ &\quad - J_1 \nabla^{(1)}_{\Pi_1 X}(\Pi_1 Y) - J_1 \nabla^{(2)}_{\Pi_2 X}(\Pi_2 Y) \\ &= \nabla^{(1)}_{\Pi_1 X}\left(J_1^{(1)} \Pi_1 Y\right) + \nabla^{(2)}_{\Pi_2 X}\left(J_1^2 \Pi_2 Y\right) \\ &\quad - J_1^{(1)} \nabla^{(1)}_{\Pi_1 X}(\Pi_1 Y) - J_1^{(2)} \nabla^{(2)}_{\Pi_2 X}(\Pi_2 Y) \\ &= \left(\nabla^{(1)}_{\Pi_1 X} J_1^{(1)}\right)(\Pi_1 Y) + \left(\nabla^{(2)}_{\Pi_2 X} J_1^2\right)(\Pi_2 Y). \end{aligned}$$

Având în vedere (3.14) şi (3.15), obţinem:

$$\begin{aligned} (\nabla_X J_1) Y &= -\omega_3^{(1)}(\Pi_1 X) J_2^{(1)}(\Pi_1 Y) + \omega_2^{(1)}(\Pi_1 X) J_3^{(1)}(\Pi_1 Y) - \\ &\quad -\omega_3^{(2)}(\Pi_2 X) J_2^{(2)}(\Pi_2 Y) + \omega_2^{(2)}(\Pi_2 X) J_3^{(2)}(\Pi_2 Y). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pe de altă parte, utilizând (3.17), găsim:

$$\begin{aligned} -\omega_3(X) J_2 Y + \omega_2(X) J_3 Y - \omega_3(FX) J_2 FY + \omega_2(FX) J_3 FY = \\ = 2[-\omega_3^{(1)}(\Pi_1 X) J_2^{(1)}(\Pi_1 Y) + \omega_2^{(1)}(\Pi_1 X) J_3^{(1)}(\Pi_1 Y) \\ -\omega_3^{(2)}(\Pi_2 X) J_2^{(2)}(\Pi_2 Y) + \omega_2^{(2)}(\Pi_2 X) J_3^{(2)}(\Pi_2 Y)] \end{aligned} \tag{3.20}$$

Din (3.19) şi (3.20) deducem:

$$\nabla_X J_1 = \frac{1}{2}\left[-\omega_3(X) J_2 + \omega_2(X) J_3 - \omega_3(FX) J_2 F + \omega_2(FX) J_3 F\right]$$

şi în mod similar găsim şi celelalte două identităţi din (3.18).

Lema este astfel complet demonstrată. ■

Propoziţia 3.2.2 ([172])
Varietatea produs $M = M_1 \times M_2$ a două varietăţi paracuaternionice Kähler (M_1, g_1, σ_1) şi (M_2, g_2, σ_2) admite o structură de varietate aproape paracuaternionică hermitiană non-Kähler.

Demonstraţie: Demonstraţia este evidentă din Propoziţia 3.1.2 şi Lema 3.2.1.
Acest rezultat se poate obţine şi direct, folosind definiţia echivalentă a varietăţilor paracuaternionice Kähler cu ajutorul grupului de olonomie ([66], [101], [176]). ■

Observaţia 3.2.3
Având în vedere similitudinea cu cazul Kähler ([183]) şi cu cazul cuaternionic ([106]), rezultatele obţinute anterior conduc la necesitatea de a introduce şi studia noi clase de varietăţi diferenţiabile: varietăţile aproape paracuaternionice produs şi varietăţile aproape paracuaternionice Kähler produs.

Definiţia 3.2.4 ([173])
Fie (M, F, g) o varietate semi-Riemann aproape produs. Presupunem că există un fibrat vectorial 3-dimensional σ constând din tensori de tip (1,1) pe M astfel încât, în orice vecinătate de coordonate U a lui M există o bază locală a lui σ formată din $\{J_1, J_2, J_3\}$ astfel încât:

$$J_\alpha^2 = -\varepsilon_\alpha \cdot Id, \forall \alpha = \overline{1,3} \tag{3.21}$$

$$J_1 J_2 = -J_2 J_1 = -J_3, \tag{3.22}$$

şi

$$g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = \varepsilon_\alpha g(X, Y), \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{3.23}$$

unde:

$$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1.$$

Atunci (M, F, σ, g) se numeşte varietate aproape paracuaternionică produs.
În plus, dacă există 1-formele locale $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ pe U astfel încât ∇, conexiunea Levi Civita indusă de g pe M, satisface relaţiile:

$$\begin{cases} (\nabla_X J_1) Y = k\left[-\omega_3(X) J_2 Y + \omega_2(X) J_3 Y - \omega_3(FX) J_2(FY) + \omega_2(FX) J_3(FY)\right] \\ (\nabla_X J_2) Y = k\left[-\omega_3(X) J_1 Y + \omega_1(X) J_3 Y - \omega_3(FX) J_1(FY) + \omega_1(FX) J_3(FY)\right] \\ (\nabla_X J_3) Y = k\left[\omega_2(X) J_1 Y - \omega_1(X) J_2 Y + \omega_2(FX) J_1(FY) - \omega_1(FX) J_2(FY)\right] \end{cases} \tag{3.24}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, unde k este o constantă reală, atunci (M, F, σ, g) se numeşte varietate aproape paracuaternionică Kähler produs.

Exemplul 3.2.5 ([173])
Din Lema 3.1.1 şi Propoziţia 3.1.2 deducem că varietatea produs a două varietăţi paracuaternionice (M_1, g_1, σ_1) şi (M_2, g_2, σ_2) admite o structură naturală de varietate aproape paracuaternionică produs.

Exemplul 3.2.6 ([173])

Din Lema 3.2.1 rezultă că ∇, conexiunea Levi Civita pe varietatea produs a varietăţilor paracuaternionice Kähler (M_1, g_1, σ_1) şi (M_2, g_2, σ_2), satisface condiţiile (3.24) pentru $k = \frac{1}{2}$, şi deci $M = M_1 \times M_2$ admite o structură naturală de varietate aproape paracuaternionică Kähler produs.

3.3 Tensorul de curbură pe varietatea produs a două forme spaţiale paracuaternionice

Fie $M_1(c_1)$ şi $M_2(c_2)$ două forme spaţiale paracuaternionice. Atunci, din (2.3) rezultă că tensorii de curbură pe cele două varietăţi au expresiile:

$$\begin{array}{c} R_1\left(X,Y\right)Z = \frac{c_1}{4}\left\{g_1\left(Z,Y\right)X - g_1\left(X,Z\right)Y + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[g_1\left(Z, J_\alpha^{(1)}Y\right)J_\alpha^{(1)}X - g_1\left(Z, J_\alpha^{(1)}X\right)J_\alpha^{(1)}Y + 2g_1\left(X, J_\alpha^{(1)}Y\right)J_\alpha^{(1)}Z\right]\right\} \end{array} \tag{3.25}$$

pentru $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM_1)$ şi $\left\{J_1^{(1)}, J_2^{(1)}, J_3^{(1)}\right\}$ bază locală a lui σ_1, respectiv:

$$\begin{array}{c} R_2\left(X,Y\right)Z = \frac{c_2}{4}\left\{g_2\left(Z,Y\right)X - g_2\left(X,Z\right)Y + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[g_2\left(Z, J_\alpha^{(2)}Y\right)J_\alpha^{(2)}X - g_2\left(Z, J_\alpha^{(2)}X\right)J_\alpha^{(2)}Y + 2g_2\left(X, J_\alpha^{(2)}Y\right)J_\alpha^{(2)}Z\right]\right\}, \end{array} \tag{3.26}$$

pentru $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM_2)$ şi $\left\{J_1^{(2)}, J_2^{(2)}, J_3^{(2)}\right\}$ bază locală a lui σ_2.

Propoziţia 3.3.1 [172]

Fie M varietatea aproape paracuaternionică Kähler produs a două forme spaţiale paracuaternionice $M_1(c_1)$ şi $M_2(c_2)$. Atunci tensorul de curbură al lui M este dat de:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = {} & \frac{c_1+c_2}{16}\{g(Z,Y)X - g(X,Z)Y + g(Z,FY)FX - g(X,FZ)FY \\ & + \sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha[g(Z,J_\alpha Y)J_\alpha X - g(Z,J_\alpha X)J_\alpha Y + 2g(X,J_\alpha Y)J_\alpha Z \\ & + g(Z,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha X - g(Z,FJ_\alpha X)FJ_\alpha Y + 2g(X,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha Z]\ \} \\ & + \frac{c_1-c_2}{16}\{g(Z,FY)X - g(X,FZ)Y + g(Z,Y)FX - g(X,Z)FY \\ & + \sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha[g(Z,FJ_\alpha Y)J_\alpha X - g(Z,FJ_\alpha X)J_\alpha Y + 2g(X,FJ_\alpha Y)J_\alpha Z \\ & + g(Z,J_\alpha Y)FJ_\alpha X - g(Z,J_\alpha X)FJ_\alpha Y + 2g(X,J_\alpha Y)FJ_\alpha Z]\ \} \end{aligned} \tag{3.27}$$

pentru $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, unde F este structura aproape produs pe M definită prin (3.10), iar $\{J_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$ sunt definite prin (3.13).

Demonstraţie: Prin calcul direct, obţinem că tensorul de curbură pe M are expresia:

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= R_1(\Pi_1 X, \Pi_1 Y)\Pi_1 Z + R_2(\Pi_2 X, \Pi_2 Y)\Pi_2 Z \\
&= \frac{c_1}{4}\{g_1(\Pi_1 Z, \Pi_1 Y)\Pi_1 X - g_1(\Pi_1 X, \Pi_1 Z)\Pi_1 Y \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha [g_1(\Pi_1 Z, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 X - g_1(\Pi_1 Z, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 X)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y \\
&\quad + 2g_1(\Pi_1 X, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Z]\} + \frac{c_2}{4}\{g_2(\Pi_2 Z, \Pi_2 Y)\Pi_2 X \\
&\quad - g_2(\Pi_2 X, \Pi_2 Z)\Pi_2 Y + \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha [g_2(\Pi_2 Z, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 X \\
&\quad - g_2(\Pi_2 Z, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 X)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y + 2g_2(\Pi_2 X, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Z]\}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Pe de altă parte obţinem:

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1+c_2}{16}\left[g(Z,Y)X - g(X,Z)Y + g(Z,FY)FX - g(X,FZ)FY\right] + \\
&+\frac{c_1-c_2}{16}\left[g(Z,FY)X - g(X,FZ)Y + g(Z,Y)FX - g(X,Z)FY\right] = \\
&\qquad = \frac{c_1}{4}\left[g_1\left(\Pi_1 Z, \Pi_1 Y\right)\Pi_1 X - g_1\left(\Pi_1 X, \Pi_1 Z\right)\Pi_1 Y\right] + \\
&\qquad + \frac{c_2}{4}\left[g_2\left(\Pi_2 Z, \Pi_2 Y\right)\Pi_2 X - g_2\left(\Pi_2 X, \Pi_2 Z\right)\Pi_2 Y\right],
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1+c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[g(Z,J_\alpha Y)J_\alpha X + g(Z,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha X\right] + \\
&+\frac{c_1-c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[g(Z,FJ_\alpha Y)J_\alpha X + g(Z,J_\alpha Y)FJ_\alpha X\right] = \\
&\qquad = \frac{c_1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_1\left(\Pi_1 Z, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y\right)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 X + \\
&\qquad + \frac{c_2}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_2\left(\Pi_2 Z, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y\right)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 X,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1+c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[-g(Z,J_\alpha X)J_\alpha Y - g(Z,FJ_\alpha X)FJ_\alpha Y\right] + \\
&+\frac{c_1-c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[-g(Z,FJ_\alpha X)J_\alpha Y - g(Z,J_\alpha X)FJ_\alpha Y\right] =
\end{aligned}$$

$$= -\frac{c_1}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_1\left(\Pi_1 Z, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 X\right)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y -$$

$$-\frac{c_2}{4}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_2\left(\Pi_2 Z, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 X\right)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y \tag{3.31}$$

şi:

$$\frac{c_1+c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[2g(X,J_\alpha Y)J_\alpha Z + 2\,g(X,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha Z\right] +$$

$$+\frac{c_1-c_2}{16}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha\left[2g(X,FJ_\alpha Y)J_\alpha Z + 2g(X,J_\alpha Y)FJ_\alpha Z\right] =$$

$$= \frac{c_1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_1\left(\Pi_1 X, J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Y\right)J_\alpha^{(1)}\Pi_1 Z +$$

$$+\frac{c_2}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\varepsilon_\alpha g_2\left(\Pi_2 X, J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Y\right)J_\alpha^{(2)}\Pi_2 Z \tag{3.32}$$

Din (3.28)-(3.32) obţinem imediat relaţia (3.27) şi propoziţia este astfel complet demonstrată. ■

Corolarul 3.3.2 ([172])

Fie M varietatea aproape paracuaternionică Kähler produs a două forme spaţiale paracuaternionice $M_1^{4n_1}(c_1)$ şi $M_2^{4n_2}(c_2)$. Atunci tensorul Ricci pe M este dat de:

$$Ric\,(X,Y) = \frac{c_1+c_2}{16}\left[(4n+16)g(X,Y) + g(FX,Y)\sum_{i=1}^{4n}\varepsilon_i g(FE_i,E_i)\right] +$$

$$+\frac{c_1-c_2}{16}\left[(4n+16)g(FX,Y) + g(X,Y)\sum_{i=1}^{4n}\varepsilon_i g(FE_i,E_i)\right] \tag{3.33}$$

pentru $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$, unde $4n=\dim M$, iar $\{E_i\}_{i=\overline{1,4n}}$ este o bază pseudo-ortonormată pentru $\Gamma(TM)$, cu $g(E_i,E_i)=\varepsilon_i\in\{-1,1\}$, $\forall i=\overline{1,4n}$.

Demonstraţie: Demonstraţia este evidentă din Propoziţia 3.3.1 şi definiţia tensorului Ricci pe o varietate semi-Riemann. ■

Corolarul 3.3.3 ([172])

Fie M varietatea aproape paracuaternionică Kähler produs a două forme spaţiale paracuaternionice $M_1(c)$ şi $M_2(c)$.

Dacă $\dim M_1 = \dim M_2$, atunci M este spaţiu Einstein.

Demonstraţie: Deoarece $c_1 = c_2 = c$, din (3.33) rezultă că avem:

$$Ric\,(X,Y) = \frac{c}{8}\left[(4n+16)g(X,Y) + g(FX,Y)\sum_{i=1}^{4n}\varepsilon_i g(FE_i,E_i)\right]. \tag{3.34}$$

Pe de altă parte, deoarece $\dim M_1 = \dim M_2$, rezultă că avem:

$$\sum_{i=1}^{4n}\varepsilon_i g(FE_i,E_i) = 0. \tag{3.35}$$

Din (3.34) şi (3.35) rezultă că avem:

$$Ric\,(X,Y) = \frac{c(n+4)}{2}g(X,Y), \tag{3.36}$$

deci M este spaţiu Einstein. ■

3.4 Subvarietăţi F-invariante în varietăţi aproape paracuaternionice produs

Definiţia 3.4.1 ([46])
Fie $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ o varietate semi-Riemann. O subvarietate (M,g) a lui $\overline{M}$, cu $g = \overline{g}_{|M}$, se numeşte de curbură invariantă, dacă:

$$\overline{R}\,(X,Y)\,Z \in \Gamma\,(TM)\,, \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM). \tag{3.37}$$

Definiţia 3.4.2 ([106])
Fie $\left(\overline{M},F,\overline{g}\right)$ o varietate semi-Riemann aproape produs. O subvarietate M a lui $\overline{M}$, cu $g = \overline{g}_{|M}$ se numeşte:
i. F-invariantă dacă:

$$F\,(T_pM) \subset T_pM, \forall p \in M. \tag{3.38}$$

ii. F-antiinvariantă dacă:

$$F\,(T_pM) \subset T_pM^{\perp}, \forall p \in M, \tag{3.39}$$

unde $T_pM^{\perp}$ este spaţiul normal al lui T_pM în $T_p\overline{M}$, $\forall p \in M$.

Definiţia 3.4.3 ([173])
Fie $\left(\overline{M},\sigma,\overline{g}\right)$ o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. O subvarietate (M,g) a lui $\overline{M}$, cu $g = \overline{g}_{|M}$, se numeşte subvarietate paracuaternionică dacă:

$$J\,(T_pM) \subset T_pM, \forall J \in \sigma_p, \forall p \in M. \tag{3.40}$$

Teorema 3.4.4 ([173])

Fie $\overline{M}$ varietatea aproape paracuaternionică Kähler produs a două forme spaţiale paracuaternionice $\overline{M}_1(c)$ şi $\overline{M}_2(c)$, $c \neq 0$. Dacă M este o subvarietate paracuaternionică de curbură invariantă a lui $\overline{M}$, atunci M este F-invariantă sau F-antiinvariantă.

Demonstraţie: Din (3.27), deoarece $c_1 = c_2 = c$, rezultă că tensorul de curbură pe $\overline{M}$ este:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= \frac{c}{8}\{\overline{g}(Z,Y)X - \overline{g}(X,Z)Y + \overline{g}(Z,FY)FX - \overline{g}(X,FZ)FY \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[\overline{g}(Z,J_\alpha Y)J_\alpha X - \overline{g}(Z,J_\alpha X)J_\alpha Y + 2\overline{g}(X,J_\alpha Y)J_\alpha Z \\ &+ \overline{g}(Z,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha X - \overline{g}(Z,FJ_\alpha X)FJ_\alpha Y + 2\overline{g}(X,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha Z]\}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Cum M este o subvarietate paracuaternionică de curbură invariantă a lui $\overline{M}$, din (3.41) rezultă că avem:

$$\begin{aligned}&g(Z,FY)FX - g(X,FZ)FY + \sum_{\alpha=1}^{3}\epsilon_\alpha[g(Z,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha X \\ &-g(Z,FJ_\alpha X)FJ_\alpha Y + 2g(X,FJ_\alpha Y)FJ_\alpha Z] \in T_pM\end{aligned} \tag{3.42}$$

pentru $\forall X,Y,Z \in T_pM$, $\forall p \in M$.

Luând $Z = X$ în (3.42) obţinem:

$$\begin{aligned}&g(X,FY)FX - g(X,FX)FY + 3[g(FX,J_1Y)FJ_1X \\ &-g(FX,J_2Y)FJ_2X - g(FX,J_3Y)FJ_3X] \in T_pM.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Înlocuindu-l pe X cu J_1X, J_2X şi J_3X în (3.43) obţinem:

$$\begin{aligned}&g(J_1X,FY)FJ_1X - g(X,FX)FY + 3[-g(FX,Y)FX \\ &-g(FX,J_3Y)FJ_3X - g(FX,J_2Y)FJ_2X] \in T_pM,\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}&g(J_2X,FY)FJ_2X + g(X,FX)FY + 3[g(FX,J_3Y)FJ_3X \\ &+g(FX,Y)FX - g(FX,J_1Y)FJ_1X] \in T_pM\end{aligned} \tag{3.45}$$

şi:

$$\begin{aligned}&g(J_3X,FY)FJ_3X + g(X,FX)FY + 3[g(FX,J_2Y)FJ_2X \\ &-g(FX,J_1Y)FJ_1X + g(FX,Y)FX] \in T_pM.\end{aligned} \tag{3.46}$$

Adunând relaţiile (3.44)-(3.46) obţinem:

$$\begin{aligned}&g(X,FX)FY + 3g(FX,Y)FX - [7g(FX,J_1Y)FJ_1X \\ &+g(FX,J_2Y)FJ_2X + g(FX,J_3Y)FJ_3X] \in T_pM.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Din (3.44) şi (3.47) găsim:

$$g(X, FX)FY + 3g(FX, Y)FX - 5g(FX, J_1Y)FJ_1X \in T_pM. \tag{3.48}$$

Pe de altă parte, din (3.43) şi (3.44) găsim:

$$g(FX, Y)FX + g(FX, J_1Y)FJ_1X \in T_pM. \tag{3.49}$$

Din (3.48) şi (3.49) obţinem:

$$g(X, FX)FY + 8g(FX, Y)FX \in T_pM. \tag{3.50}$$

Luând $Y = X$ în (3.50) obţinem:

$$g(X, FX)FX \in T_pM. \tag{3.51}$$

Din (3.51) rezultă că $FX \in T_pM$ sau $g(X, FX) = 0$. Dacă $g(X, FX) = 0$, atunci din (3.50) rezultă:

$$g(FX, Y)FX \in T_pM, \tag{3.52}$$

şi prin urmare $FX \in T_pM$ sau $FX \in T_pM^{\perp}$.

În consecinţă, cum X a fost ales arbitrar, rezultă că $F(T_pM) \subset T_pM$ sau $F(T_pM) \subset T_pM^{\perp}$, $\forall p \in M$ şi teorema este astfel complet demonstrată. ■

Corolarul 3.4.5 ([173])
Fie $\overline{M}$ varietatea aproape paracuaternionică Kähler produs a două forme spaţiale paracuaternionice $\overline{M}_1(c)$ şi $\overline{M}_2(c)$, $c \neq 0$. Dacă M este o subvarietate total geodezică a lui $\overline{M}$, atunci M este F-invariantă sau F-antiinvariantă.

Demonstraţie: Deoarece M este o subvarietate total geodezică a lui $\overline{M}$, rezultă că M este de curbură invariantă şi atunci demonstraţia este evidentă din teorema anterioară. ■

Observaţia 3.4.6 ([173])
Fie $\left(\overline{M} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_2, F, \sigma, \overline{g}\right)$ o varietate aproape paracuaternionică Kähler produs şi o subvarietate (M, g) a lui $\overline{M}$, cu $g = \overline{g}_{|M}$ nedegenerată. Pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$ avem descompunerea:

$$FX = fX + nX, \tag{3.53}$$

unde fX este componenta tangentă a lui FX, iar nX este componenta normală a lui FX.

Similar, pentru $\forall \xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ avem descompunerea:

$$F\xi = t\xi + s\xi \tag{3.54}$$

unde $t\xi$ este componenta tangentă a lui FX, iar $s\xi$ este componenta normală a lui $F\xi$.

Din (3.53) şi (3.54) obţinem:

$$F^2X = f(fX) + n(fX) + t(nX) + s(nX). \tag{3.55}$$

Din (3.1) şi (3.55), deducem:

$$f^2X = X - s(nX). \tag{3.56}$$

Pe de altă parte, pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, din (3.53) obţinem:

$$\overline{g}(FX, FY) = g(fX, fY) + \overline{g}(nX, nY) \tag{3.57}$$

Din (3.2) şi (3.57) rezultă că avem:

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - \overline{g}(nX, nY). \tag{3.58}$$

Teorema 3.4.7 ([173])

Fie $\left(\overline{M} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_2, F, \sigma, \overline{g}\right)$ o varietate aproape paracuaternionică Kähler produs. Dacă M este o subvarietate nedegenerată F-invariantă a lui $\overline{M}$, atunci $M = M_1 \times M_2$, unde M_1 este o subvarietate a lui $\overline{M}_1$, M_2 este o subvarietate a lui $\overline{M}_2$, ambele fiind subvarietăţi total geodezice în M.

Demonstraţie: Deoarece M este F-invariantă, rezultă că:

$$nX = 0, \forall X \in \Gamma(TM). \tag{3.59}$$

Din (3.56), (3.57) şi (3.59) obţinem:

$$f^2X = X \tag{3.60}$$

şi respectiv:

$$g(fX, fY) = g(X, Y) \tag{3.61}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

Aşadar (f, g) defineşte o structură semi-Riemann aproape produs pe M şi prin urmare distribuţia verticală şi distribuţia orizontală sunt date de:

$$T_1 = \{X \in \Gamma(TM) \,|\, fX = X\} \tag{3.62}$$

şi respectiv:

$$T_2 = \{X \in \Gamma(TM) \,|\, fX = -X\}. \tag{3.63}$$

Fie M_1 şi M_2 varietăţile integrale corespunzătoare distribuţiilor verticală şi respectiv orizontală.

Cum:

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y \tag{3.64}$$

din (3.64) rezultă că pentru $\forall X_1 \in T_1$ şi $\forall Y \in \Gamma(TM)$ avem:

$$f\nabla_Y X_1 = \nabla_Y f X_1 = \nabla_Y X_1 \tag{3.65}$$

deci distribuţia T_1 este paralelă.

Pe de altă parte, pentru $\forall X_1, Y_1 \in T_1$ avem:

$$\begin{aligned} f[X_1, Y_1] &= f\nabla_{X_1} Y_1 - f\nabla_{Y_1} X_1 = \nabla_{X_1} f Y_1 - \nabla_{Y_1} f X_1 \\ &= \nabla_{X_1} Y_1 - \nabla_{Y_1} X_1 = [X_1, Y_1] \end{aligned} \tag{3.66}$$

deci distribuţia T_1 este involutivă.

Analog rezultă că distribuţia T_2 este paralelă şi involutivă.

Deoarece distribuţiile T_1 şi T_2 sunt ortogonale, avem:

$$g\left(\nabla_{X_1} Y_1, Z_2\right) = -g\left(Y_1, \nabla_{X_1} Z_2\right) = 0, \tag{3.67}$$

deci M_1 este o subvarietate total geodezică a lui M. Analog rezultă că şi M_2 este o subvarietate total geodezică a lui M.

Pe de altă parte, pentru $\forall X_1 \in T_1$ avem:

$$\begin{aligned} \Pi_1 X_1 &= \frac{1}{2}(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_1 - \Pi_2)(X_1) \\ &= \frac{1}{2}(Id + F)(X_1) = X_1 \end{aligned} \tag{3.68}$$

şi

$$\begin{aligned} \Pi_2 X_1 &= \frac{1}{2}[\Pi_1 + \Pi_2 - (\Pi_1 - \Pi_2)](X_1) \\ &= \frac{1}{2}(Id - F)(X_1) = 0. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Din (3.68) şi (3.69) rezultă că M_1 este o subvarietate a lui $\overline{M}_1$ şi similar obţinem că M_2 este o subvarietate a lui $\overline{M}_2$.

În consecinţă, rezultă că avem: $M = M_1 \times M_2$, unde M_1 şi M_2 sunt subvarietăţile integrale corespunzătoare distribuţiilor verticală şi respectiv orizontală, M_1 fiind o subvarietate a lui $\overline{M}_1$ iar M_2 o subvarietate a lui $\overline{M}_2$, ambele fiind total geodezice în M. ■

Teorema 3.4.8 ([173])
Fie $\left(\overline{M} = \overline{M}_1 \times \overline{M}_2, F, \sigma, \overline{g}\right)$ *o varietate aproape paracuaternionică Kähler produs şi* M *o subvarietate paracuaternionică nedegenerată* F*-invariantă a lui* $\overline{M}$. *Atunci* $M = M_1 \times M_2$, *unde* M_1 *şi* M_2 *sunt subvarietăţi paracuaternionice ale lui* $\overline{M}_1$ *şi respectiv* $\overline{M}_2$.

Demonstraţie:

Din Teorema 3.4.7 rezultă că dacă M este F-invariantă, atunci M este o varietate semi-Riemann produs: $M = M_1 \times M_2$, unde M_1 este o subvarietate a lui $\overline{M}_1$, iar M_2 este o subvarietate a lui $\overline{M}_2$.

Fie $\{J_1, J_2, J_3\}$ o bază locală a lui σ, definită prin (3.13) şi fie $X \in T_pM_1$. Pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$ avem:

$$J_\alpha X = J_\alpha^{(1)}\Pi_1 X + J_\alpha^{(2)}\Pi_2 X = J_\alpha^{(1)} X \in T_p\overline{M_1} \bigcap T_pM = T_pM_1 \tag{3.70}$$

deci M_1 este o subvarietate paracuaternionică a lui $\overline{M}_1$. Analog rezultă că M_2 este o subvarietate paracuaternionică a lui $\overline{M}_2$. ∎

4 Submersii Riemann ale hipersuprafeţelor în varietăţi complexe şi cuaternionice

În acest capitol sunt prezentate rezultatele obţinute de autor în studiul submersiilor Riemann ([174], [175]). Mai exact, sunt extinse rezultatele obţinute de Mangione ([118]) asupra submersiilor Riemann ale hipersferelor extrinseci ale unei varietăţi Einstein-Kähler în cazul unei varietăţi Bochner-Kähler şi, de asemenea, sunt completate rezultatele obţinute de Mangione ([119]) asupra QR-hipersuprafeţelor unei varietăţi cuaternionice şi QR-submersiilor, fiind definită o nouă clasă de submersii Riemann: QR 3-submersii.

În prima secţiune a capitolului sunt prezentate definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale tensorului Bochner pe o varietate Kähler, ale hipersferelor extrinseci în varietăţi Kähler şi ale CR-submersiilor.

În secţiunea a doua se consideră o hipersferă extrinsecă M a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}, J, \overline{g})$ şi $\pi : M \to M'$ o CR-submersie a lui M într-o varietate aproape hermitiană (M', g', J'). Sunt prezentate mai întâi proprietăţile fundamentale ale acestei submersii ([118]), iar apoi sunt găsite relaţii de legătură între tensorii Ricci şi curburile scalare ale lui $\overline{M}$ şi M' ([174]).

În secţiunea a treia a capitolului sunt studiate submersiile Riemann ale hipersferelor extrinseci ale unei varietăţi Bochner-Kähler ([174]).

În secţiunea a patra sunt prezentate mai întâi proprietăţile QR-submersiilor date de Mangione ([119]). În continuare se observă că orice QR-hipersuprafaţă a unei varietăţi cuaternionice admite o 3-structură de contact metrică, este definit conceptul de QR 3-submersie şi sunt studiate aceste clase de submersii Riemann ([175]).

4.1 Tensorul Bochner pe o varietate Kähler şi CR-submersii

Fie (M^{2n}, J) o varietate aproape complexă. O metrică hermitiană pe M este o metrică riemanniană g-invariantă faţă de J, i.e:

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

În plus, dacă ∇ - conexiunea Levi-Civita indusă de metrica g, satisface condiţia:

$$(\nabla_X J) Y = 0,$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, atunci (M^{2n}, J, g) se numeşte varietate Kähler.

În anul 1949, Salomon Bochner ([37]) a introdus un analog complex al tensorului de curbură Weyl pe o varietate Riemann. Astfel, dacă notăm cu ρ curbura scalară, tensorul Bochner de tip (1,3) pe o varietate Kähler (M^{2n}, J, g) se defineşte prin:

$$
\begin{aligned}
B(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{2n+4}\{g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY \\
&+ g(QY,Z)X - g(QX,Z)Y + g(JY,Z)QJX - g(JX,Z)QJY \\
&+ g(QJY,Z)JX - g(QJX,Z)JY - 2g(JX,QY)JZ \\
&- 2g(JX,Y)QJZ\} + \frac{\rho}{(2n+2)(2n+4)}\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \\
&+ g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY - 2g(JX,Y)JZ\}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

Dacă utilizăm notaţia:

$$
L(X,Y) = \frac{1}{2n+4}Ric(X,Y) - \frac{\rho}{2(2n+2)(2n+4)}g(X,Y) \qquad (4.2)
$$

obţinem următoarea expresie pentru tensorul de curbură Bochner de tip (0,4) pe M (cf. [161]):

$$
\begin{aligned}
B(X,Y,Z,W) &= R(X,Y,Z,W) - L(Y,Z)g(X,W) + L(X,Z)g(Y,W) \\
&- L(X,W)g(Y,Z) + L(Y,W)g(X,Z) \\
&- L(JY,Z)g(JX,W) + L(JX,Z)g(JY,W) \\
&- L(JX,W)g(JY,Z) + L(JY,W)g(JX,Z) \\
&+ 2L(JX,Y)g(JZ,W) + 2L(JZ,W)g(JX,Y). \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

Definiţia 4.1.1 ([24])

O subvarietate reală M, imersată izometric într-o varietate Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ se numeşte CR-subvarietate dacă există pe M o distribuţie diferenţiabilă D astfel încât:

i. D este olomorfă, i.e:

$$JD_p = D_p, \forall p \in M.$$

ii. Distribuţia complementară ortogonală $D^{\perp}$ este anti-invariantă, i.e:

$$JD_p^{\perp} \subset T_p^{\perp}M, \forall p \in M,$$

unde $T_p^{\perp}M$ este spaţiul normal în punctul $p \in M$.

Definiţia 4.1.2 ([107])

Fie M o CR-subvarietate a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ şi (M', J', g') o varietate aproape hermitiană. O submersie Riemann $\pi : M \to M'$ se numeşte CR-submersie dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

i. $Ker\pi_* = D^{\perp}$;

ii. $\pi_* : D_p \to T_{\pi(p)}M'$ este o izometrie complexă pentru orice $p \in M$.

Observaţia 4.1.3

Secţiunile lui $D^{\perp}$ se numesc câmpuri vectoriale verticale, iar secţiunile lui D se numesc câmpuri vectoriale orizontale.

Pentru orice submersie Riemann $\pi : (M, g) \rightarrow (M', g')$ se pot defini două câmpuri tensoriale T şi A prin:

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \tag{4.4}$$

şi respectiv:

$$A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \tag{4.5}$$

pentru $\forall E, F \in \Gamma(TM)$, unde h şi v sunt proiecţiile pe D şi respectiv $D^{\perp}$.

Un câmp vectorial orizontal X pe M se spune că este bazic dacă este π-corelat cu un câmp vectorial X' pe M'. Este evident că orice câmp vectorial X' pe M' admite un unic lift orizontal X pe M, acesta fiind bazic.

Dacă X şi Y sunt câmpuri vectoriale bazice pe M, π-corelate cu X' şi respectiv Y', atunci au loc următoarele proprietăţi (a se vedea, de exemplu [32], [61], [131]):

i. $h[X, Y]$ este un câmp vectorial bazic π-corelat cu $[X', Y'] \circ \pi$;

ii. $h\left(\nabla_X Y\right)$ este un câmp vectorial bazic π-corelat cu $\nabla'_{X'} Y'$, unde ∇ şi ∇' sunt conexiunile Levi-Civita induse de g şi g', pe M şi respectiv M';

iii. $[X, U] \in \Gamma(D^{\perp})$, $\forall U \in \Gamma(D^{\perp})$.

Definiţia 4.1.4 ([108])

Fie M o subvarietate orientabilă a unei varietăţi Riemnann $(\overline{M}, \overline{g})$. Se spune că M este o subvarietate total ombilicală a lui $\overline{M}$ dacă α, forma a doua fundamentală a lui M, satisface:

$$\alpha(E,F) = g(E,F)H \tag{4.6}$$

pentru $\forall E, F \in \Gamma(TM)$, unde H este cmpul vectorial curbură medie al lui M. În plus, dacă H este nenul şi paralel în fibratul normal $TM^{\perp}$, atunci M se numeşte sferă extrinsecă.

Observaţia 4.1.5 ([118])

Dacă M este o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, atunci remarcăm:

i. $k = \|H\|$ este o funcţie constantă nenulă pe hipersfera extrinsecă M.

ii. Dacă N este un câmp vectorial unitar global şi normal la M, atunci $\xi = -JN$ este un câmp vectorial unitar global pe M şi în plus $N = J\xi$. Observăm că dacă D este subspaţiul J-invariant maximal al spaţiului tangent T_pM, pentru $\forall p \in M$, atunci M este o CR-subvarietate a lui $\overline{M}$, astfel încât:

$$TM = D \oplus D^{\perp}$$

unde $D^{\perp}$ este distribuţia anti-invariantă 1-dimensională, generată de ξ. Mai mult, $D^{\perp}$ este integrabilă şi foile sale sunt total geodezice în M.

4.2 CR-submersii ale hipersferelor extrinseci într-o varietate Kähler

Observaţia 4.2.1 ([118])

Fie M o CR-subvarietate a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, (M', J', g') o varietate aproape hermitiană şi $\pi : M \to M'$ o CR-submersie.

Cum $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ este o varietate Kähler, avem:

$$\overline{\nabla}_X JY = J\overline{\nabla}_X Y, \tag{4.7}$$

pentru orice câmpuri vectoriale bazice X şi Y pe M.

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X, Y) \\ &= h\nabla_X Y + v\nabla_X Y + \overline{h}\alpha(X, Y) + \overline{v}\alpha(X, Y) \end{aligned} \tag{4.8}$$

unde $\overline{v}$ şi $\overline{h}$ sunt proiecţiile pe μ şi respectiv $J(D^{\perp})$, μ fiind complementul ortogonal al lui $J(D^{\perp})$ în $T^{\perp}M$.

Similar, găsim:

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X JY &= \nabla_X JY + \alpha(X, JY) \\ &= h\nabla_X JY + v\nabla_X JY + \overline{h}\alpha(X, JY) + \overline{v}\alpha(X, JY). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Din (4.7), (4.8) şi (4.9) obţinem:

$$\begin{aligned} &h\nabla_X JY + v\nabla_X JY + \overline{h}\alpha(X, JY) + \overline{v}\alpha(X, JY) = \\ &= Jh\nabla_X Y + Jv\nabla_X Y + J\overline{h}\alpha(X, Y) + J\overline{v}\alpha(X, Y) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Identificând acum componentele din D în membrul stâng şi respectiv drept al relaţiei (4.10) obţinem:

$$Jh\nabla_X Y = h\nabla_X JY \tag{4.11}$$

pentru orice câmpuri vectoriale bazice X şi Y pe M.

Teorema 4.2.2 ([118])

Fie M o CR-subvarietate a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ şi $\pi : M \to M'$ o CR-submersie a lui M într-o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci M' este o varietate Kähler.

Demonstraţie: Demonstraţia este imediată din (4.7) şi Observaţia 4.1.3. ∎

Observaţia 4.2.3 ([118])

Fie M o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ şi considerăm $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci, din ecuaţia Gauss şi (4.6) avem:

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + k^2\left\{g(X,Z)g(Y,W) - g(X,W)g(Y,Z)\right\} \tag{4.12}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y, Z, W pe M, unde R şi $\overline{R}$ sunt tensorii de curbură pe M şi respectiv $\overline{M}$.

Pe de altă parte, deoarece $A_X Y = v\nabla_X Y$ este un câmp vectorial vertical, avem:

$$A_X Y = g\left(A_X Y, \xi\right)\xi$$

de unde deducem:

$$\begin{aligned} A_X Y &= g\left(\bar{\nabla}_X Y, \xi\right)\xi = g\left(\bar{\nabla}_X JY, N\right)\xi \\ &= g\left(\alpha(X, JY), N\right)\xi = kg(X, JY)\xi. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Prin urmare, avem:

$$g(A_X Y, A_Z W) = g(A_X Y, \xi)g(A_Z W, \xi) = k^2 g(X, JY)g(Z, JW). \tag{4.14}$$

În consecinţă, din (4.14) şi ecuaţia Gray-O'Neill ([32], [61], [131]):

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= R'(X',Y',Z',W') - 2g(A_X Y, A_Z W) \\ &\quad + g(A_Y Z, A_X W) - g(A_X Z, A_Y W) \end{aligned} \tag{4.15}$$

obţinem:

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) &= R'(X',Y',Z',W') - k^2\{2g(X,JY)g(Z,JW) \\ &\quad - g(Y,JZ)g(X,JW) + g(X,JZ)g(Y,JW)\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Din (4.12) şi (4.16) rezultă că avem:

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y,Z,W) &= R'(X',Y',Z',W') - k^2\{2g(X,JY)g(Z,JW) \\ &\quad - g(Y,JZ)g(X,JW) + g(X,JZ)g(Y,JW) \\ &\quad - g(X,Z)g(Y,W) + g(X,W)g(Y,Z)\} \end{aligned} \tag{4.17}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y, Z, W pe M.

Observaţia 4.2.4 ([174])

Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g').

Considerăm un reper local ortonormat $\{e_1, ..., e_{n-1}, Je_1, ..., Je_{n-1}\}$ pentru distribuţia orizontală D, format din câmpuri vectoriale bazice. Atunci

$$\left\{e'_1, ..., e'_{n-1}, J'e'_1, ..., J'e'_{n-1}\right\}$$

este de asemenea un reper local ortonormat pe TM'.

În plus, dacă $D^\perp$ este generată de câmpul vectorial unitar ξ, atunci

$$\{e_1, ..., e_{n-1}, Je_1, ..., Je_{n-1}, \xi\}$$

este un reper local ortonormat pentru TM, iar

$$\{e_1, ..., e_{n-1}, Je_1, ..., Je_{n-1}, \xi, J\xi\}$$

este un reper local ortonormat pentru $T\overline{M}$.

Propoziţia 4.2.5 ([174])
Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci tensorii Ricci ai lui $\overline{M}$ şi respectiv M' sunt legaţi prin formula:

$$\overline{Ric}(X,Y) = Ric'(X',Y') + 2(n-3)k^2 g'(X',Y') \tag{4.18}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y pe M.

Demonstraţie: Avem:

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n-1}[\overline{R}(X,e_i,Y,e_i) + \overline{R}(X,Je_i,Y,Je_i)] \\ &\quad +\overline{R}(X,\xi,Y,\xi) + \overline{R}(X,J\xi,Y,J\xi).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dar, deoarece $\overline{R}(X,\xi,Y,\xi) = 0$ şi $\overline{R}(X,J\xi,Y,J\xi) = 0$, pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y pe M (cf. [118]), din (4.17) şi (4.19) obţinem:

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(X,Y) &= Ric'(X',Y') + 2k^2(n-1)g'(Y',Z') \\ &\quad -4k^2\sum_{i=1}^{n-1}[g'(X',e'_i)g'(Y',e'_i) + g'(X',J'e'_i)g'(Y',J'e'_i)].\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n-1}[g'(X',e'_i)g'(Y',e'_i) + g'(X',J'e'_i)g'(Y',J'e'_i)] = \\ &= g'(X', \sum_{i=1}^{n-1}[g'(Y',e'_i)e'_i + g'(Y',J'e'_i)J'e'_i]) = g'(X',Y')\end{aligned} \tag{4.21}$$

Din (4.20) şi (4.21) obţinem imediat (4.18). ∎

Propoziţia 4.2.6 ([174])

Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci curburile scalare $\overline{\rho}$ şi ρ', ale lui $\overline{M}$ şi respectiv M', sunt legate prin formula:

$$\overline{\rho} = \rho' + 4(n-3)(n-1)k^2 + 2H^{\overline{M}}(\xi) \tag{4.22}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y pe M, unde:

$$H^{\bar{M}}(\xi) = \bar{R}(\xi, J\xi, \xi, J\xi).$$

Demonstraţie: Avem:

$$\overline{\rho} = \sum_{i=1}^{n-1}[\overline{Ric}(e_i, e_i) + \overline{Ric}(Je_i, Je_i)] + \overline{Ric}(\xi, \xi) + \overline{Ric}(J\xi, J\xi). \tag{4.23}$$

Utilizând Propoziţia 4.2.5, obţinem:

$$\overline{Ric}(e_i, e_i) = Ric'(e'_i, e'_i) + 2k^2(n-3) \tag{4.24}$$

şi respectiv

$$\overline{Ric}(Je_i, Je_i) = Ric'(J'e'_i, J'e'_i) + 2k^2(n-3). \tag{4.25}$$

Pe de altă parte, deoarece avem:

$$\begin{aligned}\overline{Ric}(\xi, \xi) &= \sum_{i=1}^{n-1}[\overline{R}(\xi, e_i, \xi, e_i) + \overline{R}(\xi, Je_i, \xi, Je_i)] \\ &\quad + \overline{R}(\xi, \xi, \xi, \xi) + \overline{R}(\xi, J\xi, \xi, J\xi)\end{aligned}$$

deducem:

$$\overline{Ric}(\xi, \xi) = \overline{R}(\xi, J\xi, \xi, J\xi) = H^{\overline{M}}(\xi) \tag{4.26}$$

şi similar găsim:

$$\overline{Ric}(J\xi, J\xi) = \overline{R}(J\xi, \xi, J\xi, \xi) = H^{\overline{M}}(\xi). \tag{4.27}$$

Din (4.23)-(4.27) rezultă imediat (4.22). ■

Exemplul 4.2.7 ([118])

Fie S^{2n+1} hipersfera standard în $\mathbf{C}^{n+1}$. Atunci S^{2n+1} este o hipersferă extrinsecă în varietatea Kähler $\mathbf{C^{n+1}}$ şi fibrarea Hopf $\pi : S^{n+1} \to P^n(\mathbf{C})$, echipată cu metricile canonice, ne furnizează o CR-submersie.

4.3 CR-submersii ale hipersferelor extrinseci într-o varietate Bochner-Kähler

Fie $(\overline{M}^{2n}, J, \bar{g})$ o varietate Kähler. Dacă tensorul Bochner B pe M este identic nul, atunci se spune că $(\overline{M}^{2n}, J, \bar{g})$ este o varietate Bochner-Kähler.

Din (4.3) deducem că tensorul de curbură $\overline{R}$ al unei varietăţi Bochner-Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \bar{g})$ este dat prin:

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,Z,W) &= \overline{L}(Y,Z)\overline{g}(X,W) - \overline{L}(X,Z)\overline{g}(Y,W) + \overline{L}(X,W)\overline{g}(Y,Z) \\ &\quad -\overline{L}(Y,W)\overline{g}(X,Z) + \overline{L}(JY,Z)\overline{g}(JX,W) - \overline{L}(JX,Z)\overline{g}(JY,W) \\ &\quad +\overline{L}(JX,W)\overline{g}(JY,Z) - \overline{L}(JY,W)\overline{g}(JX,Z) \\ &\quad -2\overline{L}(JX,Y)\overline{g}(JZ,W) - 2\overline{L}(JZ,W)\overline{g}(JX,Y). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Propoziţia 4.3.1 ([174])

Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \bar{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci tensorii Bochner $\overline{B}$ şi B', ai lui $\overline{M}$ şi respectiv M', sunt legaţi prin formula:

$$\begin{aligned}\overline{B}(X,Y,Z,W) &= B'(X',Y',Z',W') + (2\theta - k^2)[g'(X',Z')g'(Y',W') \\ &\quad -g'(X',W')g'(Y',Z') + g'(X',JZ')g'(Y',J'W') \\ &\quad -g'(X',J'W')g'(Y',J'Z') + 2g'(X',JY')g'(Z',J'W')]\end{aligned} \tag{4.29}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X, Y, Z, W pe M, unde:

$$\theta = \frac{\rho' - 2nH^{\overline{M}}(\xi) + 4n(n^2-9)k^2}{2n(2n+2)(2n+4)}.$$

Demonstraţie: Din (4.2) avem:

$$\overline{L}(X,Y) = \frac{1}{2n+4}\overline{Ric}(X,Y) - \frac{\overline{\rho}}{2(2n+2)(2n+4)}\overline{g}(X,Y). \tag{4.30}$$

Introducând (4.18) şi (4.22) în (4.30) obţinem:

$$\overline{L}(X,Y) = \frac{1}{2n+4}Ric'(X',Y') - \frac{\rho' + 2H^{\overline{M}}(\xi) - 4k^2(n^2-9)}{2(2n+2)(2n+4)}g'(X',Y') \tag{4.31}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X şi Y pe M.

Din (4.31) obţinem imediat:

$$\overline{L}(X,Y) = \frac{2n+2}{2n+4}L'(X',Y') + \theta g'(X',Y') \tag{4.32}$$

pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X şi Y pe M.

Pe de altă parte, din (4.3) avem că tensorul Bochner de tip (0,4) pe $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ este:

$$\begin{aligned}\overline{B}(X,Y,Z,W) &= \overline{R}(X,Y,Z,W) - \overline{L}(Y,Z)\overline{g}(X,W) + \overline{L}(X,Z)\overline{g}(Y,W)\\ &\quad -\overline{L}(X,W)\overline{g}(Y,Z) + \overline{L}(Y,W)\overline{g}(X,Z) - \overline{L}(JY,Z)\overline{g}(JX,W)\\ &\quad +\overline{L}(JX,Z)\overline{g}(JY,W) - \overline{L}(JX,W)\overline{g}(JY,Z) + \overline{L}(JY,W)\overline{g}(JX,Z)\\ &\quad +2\overline{L}(JX,Y)\overline{g}(JZ,W) + 2\overline{L}(JZ,W)\overline{g}(JX,Y). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Înlocuind acum (4.32) în (4.33) obţinem (4.29). ∎

Corolarul 4.3.2 ([174])
Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Bochner-Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Atunci tensorul Bochner pe M' este dat prin:

$$\begin{aligned}B'(X',Y',Z',W') &= (k^2 - 2\theta)[g'(X',Z')g'(Y',W')\\ &\quad -g'(X',W')g'(Y',Z') + g'(X',JZ')g'(Y',J'W')\\ &\quad -g'(X',J'W')g'(Y',J'Z') + 2g'(X',JY')g'(Z',J'W')]\end{aligned} \tag{4.34}$$

pentru $\forall X', Y', Z', W' \in \Gamma(TM')$.

Demonstraţie: Cum varietatea $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$ este Bochner-Kähler, avem că $\overline{B} = 0$ şi atunci (4.34) rezultă imediat din (4.29). ∎

Corolarul 4.3.3 ([174])
Fie $\pi : M \to M'$ o CR-submersie de la M, o hipersferă extrinsecă a unei varietăţi Bochner-Kähler $(\overline{M}^{2n}, J, \overline{g})$, la o varietate aproape hermitiană (M', J', g'). Dacă are loc egalitatea $k^2 = 2\eta$, atunci (M', J', g') este o varietate Bochner-Kähler.

Demonstraţie: Din Teorema 4.2.2 avem că (M', J', g') este o varietate Kähler, iar din (4.34) şi condiţia $k^2 = 2\theta$ deducem că:

$$B'(X',Y',Z',W') = 0, \forall X', Y', Z', W' \in \Gamma(TM'),$$

şi în consecinţă (M', J', g') este o varietate Bochner-Kähler. ∎

4.4 QR-submersii ale hipersuprafeţelor orientabile în varietăţi cuaternionice Kähler

Definiţia 4.4.1 ([25])
Fie $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ o varietate cuaternionică Kähler şi M o subvarietate reală a lui $\overline{M}$. Se spune că M este o QR-subvarietate a lui $\overline{M}$ dacă există un subfibrat vectorial D în fibratul normal satisfăcând următoarele condiţii :
i. $J_\alpha D_p = D_p$, $\forall p \in M$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$;
ii. $J_\alpha D_p^\perp \subset T_pM$, $\forall p \in M$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$, unde $D^\perp$ este fibratul complementar ortogonal al lui D în $TM^\perp$.

Observaţia 4.4.2

Fie M o hipersuprafaţă orientabilă a varietăţii cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi ξ un câmp vectorial unitar normal la M. Dacă luăm $D = \{0\}$, atunci $D^{\perp} = TM^{\perp}$ şi sunt verificate în mod evident condiţiile i. şi ii. din definiţia anterioară. Aşadar, orice hipersuprafaţă orientabilă a unei varietăţi cuaternionice Kähler este o QR-hipersuprafaţă.

Fie $\overline{U}$ şi $\overline{U}'$ două vecinătăţi de coordonate ale lui M, cu $\overline{U} \bigcap \overline{U}' \neq \Phi$. Atunci, pe $\overline{U}$:

$$\xi_{\alpha} := -J_{\alpha}\xi, \forall \alpha = \overline{1,3}$$

definesc câmpuri vectoriale tangente la M, şi similar, pe $\overline{U}'$:

$$\xi'_{\alpha} := -J'_{\alpha}\xi, \forall \alpha = \overline{1,3},$$

definesc câmpuri vectoriale tangente la M.

În plus, pe $\overline{U} \bigcap \overline{U}'$ avem:

$$\xi'_{\alpha} := \sum_{\beta=1}^{3} c_{\alpha\beta}\xi_{\beta}, \forall \alpha = \overline{1,3},$$

iar $C = (c_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=\overline{1,3}} \in SO(3)$.

În consecinţă, se obţine o distribuţie $\mathcal{V}$ pe M care este local generată de $\{\xi_{\alpha}\}_{\alpha=\overline{1,3}}$. Fie $\mathcal{H}$ distribuţia ortogonală complementară a lui $\mathcal{V}$ în raport cu $g = \overline{g}|_M$, pe M. Observăm că pentru $\forall p \in M$, $\mathcal{H}_p$ este J_{α}-invariantă, $\forall \alpha = \overline{1,3}$. Într-adevăr, pentru $\forall X$ orizontal, avem:

$$\overline{g}(J_1X, \xi_1) = \overline{g}(J_1X, -J_1\xi) = -\overline{g}\,(X, \xi) = 0,$$

$$\overline{g}(J_1X, \xi_2) = \overline{g}(J_1X, -J_2\xi) = \overline{g}\,(X, J_3\xi) = -\overline{g}\,(X, \xi_3) = 0,$$

$$\overline{g}(J_1X, \xi_3) = \overline{g}(J_1X, -J_3\xi) = \overline{g}\,(X, J_2\xi) = \overline{g}\,(X, \xi_2) = 0,$$

$$\overline{g}(J_1X, \xi) = -\overline{g}(X, J_1\xi) = \overline{g}\,(X, \xi_1) = 0,$$

deci $J_1\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$, $\forall p \in M$, şi similar obţinem $J_2\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$ şi $J_3\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}_p$, $\forall p \in M$.

Definiţia 4.4.3 ([26])

O QR-hipersuprafaţă M a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ se numeşte mixt geodezică dacă forma a doua fundamentală α a subvarietăţii satisface condiţia:

$$\alpha(U, X) = 0,$$

pentru $\forall U \in \Gamma(\mathcal{V})$, $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$.

Exemplul 4.4.4

Orice QR-hipersuprafaţă total ombilicală M a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ este mixt geodezică, deoarece, pentru $\forall U \in \Gamma(\mathcal{V})$, $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$ avem:

$$\alpha(U, X) = g(U, X)H = 0,$$

deci M este o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică.

În particular, S^{4n+3} este o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică în $\mathbf{R}^{4n+4}$.

Observaţia 4.4.5

A. Bejancu ([25]) a studiat integrabilitatea distribuţiilor $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{H}$. El a arătat că $\mathcal{V}$ este integrabilă $\Leftrightarrow M$ este mixt geodezică.

Definiţia 4.4.6 ([119])

Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană.

O submersie Riemann $\pi : M \rightarrow M'$ se numeşte QR-submersie dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

i. $Ker\pi_* = \mathcal{V}$;

ii. $\pi_* : \mathcal{H}_p \rightarrow T_{\pi(p)}M'$ este o izometrie complexă în orice punct $p \in M$.

Teorema 4.4.7 ([119])

Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi (M', σ', g') o varietate aprope cuaternionică hermitiană. Dacă $\pi : M \rightarrow M'$ este o QR-submersie atunci (M', σ', g') este o varietate cuaternionică Kähler.

Demonstraţie: Demonstraţia se obţine imediat folosind definiţia varietăţii cuaternionice Kähler şi faptul că π_* este o izometrie complexă. ■

Definiţia 4.4.8 ([111])

Fie M o varietate diferenţiabilă şi 3 structuri aproape de contact pe M: $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, $\alpha = \overline{1,3}$, astfel încât sunt satisfăcute condiţiile:

i. $\eta_\alpha(\xi_\beta) = 0$, pentru $\forall \alpha \neq \beta$;

ii. $\phi_\alpha(\xi_\beta) = -\phi_\beta(\xi_\alpha) = \xi_\gamma$, pentru orice permutare ciclică (α, β, γ) a lui $(1, 2, 3)$;

iii. $\eta_\alpha \circ \phi_\beta = -\eta_\beta \circ \phi_\alpha = \eta_\gamma$, pentru orice permutare ciclică (α, β, γ) a lui $(1, 2, 3)$;

iv. $\phi_\alpha \circ \phi_\beta - \eta_\beta \otimes \xi_\alpha = -\phi_\beta \circ \phi_\alpha + \eta_\alpha \otimes \xi_\beta = \phi_\gamma$, pentru orice permutare ciclică (α, β, γ) a lui $(1, 2, 3)$.

Atunci se spune că M admite o 3-structură aproape de contact.

Definiţia 4.4.9 ([111])

Fie (M, g) o varietate Riemann înzestrată cu o 3-structură aproape de contact $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, $\alpha = \overline{1,3}$, astfel încât sunt îndeplinite condiţiile:

i. $\eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha)$, $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$.
ii. $g(\phi_\alpha X, \phi_\alpha Y) = g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)$, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$.
Atunci se spune că M admite o 3-structură aproape de contact metrică.

Definiţia 4.4.10 ([34], [111])
O 3-structură aproape de contact metrică $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, $\alpha = \overline{1,3}$, se numeşte:
i. 3-cosimplectică dacă:

$$(\nabla_X \phi_\alpha)(Y) = 0, (\nabla_X \eta_\alpha)(Y) = 0, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.35}$$

ii. 3-Sasaki dacă:

$$(\nabla_X \phi_\alpha)(Y) = \eta_\alpha(Y)X - g(X,Y)\xi_\alpha, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.36}$$

Observaţia 4.4.11 ([175])
Fie M o hipersuprafaţă orientabilă a varietăţii cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$, $\mathcal{V}$ distribuţia pe M care este local generată de $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$ şi $\mathcal{H}$ distribuţia ortogonală complementară a lui $\mathcal{V}$ în raport cu $g = \overline{g}|_M$, pe M.
Fie $S : TM \to \mathcal{H}$ proiecţia canonică. Atunci pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$ avem:

$$X = SX + \sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha(X)\xi_\alpha, \tag{4.37}$$

unde:

$$\eta_\alpha(X) = g(X, \xi_\alpha). \tag{4.38}$$

Din (4.37) obţinem:

$$J_\beta X = J_\beta SX + \sum_{\alpha=1}^{3} \eta_\alpha(X) J_\beta \xi_\alpha, \forall \beta = \overline{1,3}. \tag{4.39}$$

Din (4.39) deducem că avem:

$$J_1 X = J_1 SX + \eta_1(X)\xi + \eta_2(X)\xi_3 - \eta_3(X)\xi_2. \tag{4.40}$$

Aşadar componenta tangenta a lui $J_1 X$ este:

$$\phi_1 X = J_1 SX + \eta_2(X)\xi_3 - \eta_3(X)\xi_2. \tag{4.41}$$

iar componenta normală a lui $J_1 X$ este:

$$F_1 X = \eta_1(X)\xi. \tag{4.42}$$

Aşadar, pentru $\forall X \in \Gamma(TM)$ avem:

$$J_1 X = \phi_1 X + F_1 X. \tag{4.43}$$

Similar obţinem:

$$J_2X = \phi_2X + F_2X, J_3X = \phi_3X + F_3X \tag{4.44}$$

unde

$$\phi_2X = J_2SX - \eta_1(X)\xi_3 + \eta_3(X)\xi_1, \phi_3X = J_3SX + \eta_1(X)\xi_2 - \eta_2(X)\xi_1 \tag{4.45}$$

şi respectiv:

$$F_2X = \eta_2(X)\xi, F_3X = \eta_3(X)\xi. \tag{4.46}$$

Remarcăm acum că $(\phi_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha)$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$, sunt structuri aproape de contact pe M, deoarece avem:

$$\phi_\alpha^2X = -X + \eta_\alpha(X)\xi_\alpha, \eta_\alpha \circ \phi_\alpha = 0, \eta_\alpha(\xi_\alpha) = 1. \tag{4.47}$$

Pe de altă parte, pentru $\forall \alpha \neq \beta$ avem:

$$\eta_\alpha(\xi_\beta) = g(\xi_\beta, \xi_\alpha) = 0. \tag{4.48}$$

În plus, pentru orice permutare ciclică (α, β, γ) a lui $(1,2,3)$ avem:

$$\phi_\alpha(\xi_\beta) = J_\alpha(\xi_\beta) - F_\alpha(\xi_\beta) = -J_\alpha(J_\beta\xi) = -J_\gamma\xi = \xi_\gamma$$

şi respectiv:

$$\phi_\beta(\xi_\alpha) = J_\beta(\xi_\alpha) - F_\beta(\xi_\alpha) = -J_\beta(J_\alpha\xi) = J_\gamma\xi = -\xi_\gamma$$

de unde deducem:

$$\phi_\alpha(\xi_\beta) = -\phi_\beta(\xi_\alpha) = \xi_\gamma. \tag{4.49}$$

Pe de altă parte, avem:

$$(\eta_\alpha \circ \phi_\beta)(X) = \eta_\alpha(\phi_\beta X) = g(\phi_\beta X, \xi_\alpha) = g(J_\beta X, \xi_\alpha) =$$

$$= -g(X, J_\beta\xi_\alpha) = g(X, J_\beta J_\alpha\xi) = -g(X, J_\gamma\xi) = g(X, \xi_\gamma) = \eta_\gamma(X)$$

şi respectiv:

$$(\eta_\beta \circ \phi_\alpha)(X) = \eta_\beta(\phi_\alpha X) = g(\phi_\alpha X, \xi_\beta) = g(J_\alpha X, \xi_\beta) =$$

$$= -g(X, J_\alpha\xi_\beta) = g(X, J_\alpha J_\beta\xi) = g(X, J_\gamma\xi) = -g(X, \xi_\gamma) = -\eta_\gamma(X)$$

de unde deducem:

$$\eta_\alpha \circ \phi_\beta = -\eta_\beta \circ \phi_\alpha = \eta_\gamma. \tag{4.50}$$

Observăm de asemenea că avem:

$$\phi_\alpha(\phi_\beta X) - \eta_\beta(X)\xi_\alpha = J_\alpha(\phi_\beta X) - F_\alpha(\phi_\beta X) - \eta_\beta(X)\xi_\alpha =$$

$$= J_\alpha (J_\beta X - F_\beta X) - \eta_\alpha (\phi_\beta X) \xi - \eta_\beta (X) \xi_\alpha =$$
$$= J_\gamma X - J_\alpha (\eta_\beta (X) \xi) - \eta_\gamma (X) \xi - \eta_\beta (X) \xi_\alpha =$$
$$= J_\gamma X - \eta_\gamma (X) \xi = J_\gamma X - F_\gamma X = \phi_\gamma (X)$$

şi respectiv:

$$\phi_\beta (\phi_\alpha X) - \eta_\alpha(X)\xi_\beta = J_\beta (\phi_\alpha X) - F_\beta (\phi_\alpha X) - \eta_\alpha(X)\xi_\beta =$$
$$= J_\beta (J_\alpha X - F_\alpha X) - \eta_\beta (\phi_\alpha X) \xi - \eta_\alpha (X) \xi_\beta =$$
$$= -J_\gamma X - J_\beta (\eta_\alpha (X) \xi) + \eta_\gamma (X) \xi - \eta_\alpha (X) \xi_\beta =$$
$$= -J_\gamma X + \eta_\gamma (X) \xi = -J_\gamma X + F_\gamma X = -\phi_\gamma (X)$$

de unde deducem:

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta - \eta_\beta \otimes \xi_\alpha = -\phi_\beta \circ \phi_\alpha + \eta_\alpha \otimes \xi_\beta = \phi_\gamma. \tag{4.51}$$

Prin urmare, din (4.43)-(4.51), deducem că orice QR-hipersuprafaţă a unei varietăţi cuaternionice Kähler admite o 3-structură aproape de contact.

Pe de altă parte, avem:

$$g(\phi_\alpha X, \phi_\alpha Y) = g(J_\alpha X - F_\alpha X, J_\alpha Y - F_\alpha Y) =$$
$$= g(J_\alpha X, J_\alpha Y) - g(J_\alpha X, F_\alpha Y) - g(F_\alpha X, J_\alpha Y) + g(F_\alpha X, F_\alpha Y) =$$
$$= g(X, Y) - g(J_\alpha X, \eta_\alpha(Y)\xi) - g(\eta_\alpha(X)\xi, J_\alpha Y) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y)g(\xi, \xi) =$$
$$= g(X, Y) - \eta_\alpha(Y)g(J_\alpha X, \xi) - \eta_\alpha(X)g(\xi, J_\alpha Y) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) =$$
$$= g(X, Y) + \eta_\alpha(Y)g(X, J_\alpha \xi) + \eta_\alpha(X)g(J_\alpha \xi, Y) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) =$$
$$= g(X, Y) - \eta_\alpha(Y)g(X, \xi_\alpha) + \eta_\alpha(X)g(\xi_\alpha, Y) + \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) =$$
$$= g(X, Y) - \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(X) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y) + \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(Y) = g(X, Y) - \eta_\alpha(Y)\eta_\alpha(X).$$

Aşadar:

$$g(\phi_\alpha X, \phi_\alpha Y) = g(X, Y) - \eta_\alpha(X)\eta_\alpha(Y). \tag{4.52}$$

Prin urmare rezultă că orice QR-hipersuprafaţă a unei varietăţi cuaternionice Kähler admite o 3-structură aproape de contact metrică.

Definiţia 4.4.12 ([175])

Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi fie (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană. O submersie Riemann $\pi : M \to M'$ se numeşte QR 3-submersie dacă sunt îndeplinite următoarele condiţii:

i. $Ker\pi_* = \mathcal{V}$;

ii. Pentru orice punct $p \in M$, există o bază locală $\{J_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$ a lui σ astfel încât:

$$\pi_* \circ \phi_\alpha = J'_\alpha \circ \pi_*, \forall \alpha = \overline{1,3}.$$

Propoziţia 4.4.13 ([175])
Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi fie (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană. Dacă $\pi : M \to M'$ este o QR 3-submersie, atunci distribuţiile $\mathcal{V}$ şi $\mathcal{H}$ sunt invariante prin ϕ_α, $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

Demonstraţie: Fie $V \in \Gamma(\mathcal{V})$. Atunci avem:

$$\pi_* \phi_\alpha V = J'_\alpha \pi_* V = 0,$$

deci $\phi_\alpha (V) \in \mathcal{V}$.

Pe de altă parte, având în vedere definiţia lui ϕ_α, avem pentru $\forall X \in \Gamma(\mathcal{H})$:

$$g(\phi_\alpha X, V) = g(J_\alpha X, V) = -g(X, J_\alpha V) = 0,$$

deci $\phi_\alpha (X) \in \mathcal{H}$. ∎

Teorema 4.4.14 ([175])
Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$ şi fie (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană. Dacă $\pi : M \to M'$ este o QR 3-submersie, iar M este 3-cosimplectică, atunci M' este local hiper-Kähler.

Demonstraţie: Pentru orice câmpuri vectoriale bazice X şi Y pe M, π-corelate cu X' şi Y' pe M', ţinând cont de (4.35), avem:

$$\nabla_X \phi_\alpha Y - \phi_\alpha \nabla_X Y = 0, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.53}$$

Proiectând acum (4.53) pe M' prin π_* şi ţinând cont de Observaţia 4.1.3 şi de faptul că π_* este o izometrie, obţinem pentru $\forall \alpha = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned}
\nabla'_{X'} \pi_* \phi_\alpha Y - J'_\alpha \pi_* \nabla_X Y = 0 \\
\Leftrightarrow \nabla'_{X'} J'_\alpha \pi_* Y - J'_\alpha \nabla'_{X'} Y' = 0 \\
\Leftrightarrow \nabla'_{X'} J'_\alpha Y' - J'_\alpha \nabla'_{X'} Y' = 0 \\
\Leftrightarrow (\nabla'_{X'} J'_\alpha)\, Y' = 0,
\end{aligned}$$

deci într-adevăr M' este local hiper-Kähler. ∎

Corolarul 4.4.15 ([175])
Fie M o QR-hipersuprafaţă total geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$, (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană şi $\pi : M \to M'$ este o QR 3-submersie. Dacă ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 sunt paralele în M, atunci M' este local hiper-Kähler.

Demonstraţie: În acest caz se observă că sunt îndeplinite condiţiile (4.35), deci M este o varietate 3-cosimplectică (a se vedea ([71]). Prin urmare, aplicând Teorema 4.4.14, obţinem că M' este hiper-Kähler. ■

Teorema 4.4.16 ([175])

Fie M o QR-hipersuprafaţă mixt geodezică a unei varietăţi cuaternionice Kähler $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$, (M', σ', g') o varietate aproape cuaternionică hermitiană şi $\pi : M \to M'$ o QR 3-submersie. Atunci:

i. Dacă M este 3-cosimplectică sau 3-Sasaki rezultă că fibrele submersiei sunt total geodezice.

ii. Dacă M este 3-cosimplectică, atunci distribuţia orizontală este integrabilă.

Demonstraţie:

i. *Cazul I:* Dacă M este 3-cosimplectică, pentru orice câmpuri vectoriale verticale U şi V pe M, ţinând cont de (4.35), avem:

$$\nabla_U \phi_\alpha V = \phi_\alpha \nabla_U V, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.54}$$

Luând componentele orizontale din (4.54), obţinem:

$$T_U \phi_\alpha V = \phi_\alpha T_U V, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.55}$$

Cazul II: Dacă M este 3-Sasaki, pentru orice câmpuri vectoriale verticale U şi V pe M, ţinând cont de (4.36), avem:

$$\nabla_U \phi_\alpha V - \phi_\alpha \nabla_U V = \eta_\alpha(V) U - g(U, V)\xi_\alpha, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.56}$$

Luând componentele orizontale din (4.56), obţinem din nou relaţia (4.55).

Aşadar, indiferent dacă M este 3-cosimplectică sau 3-Sasaki, se verifică relaţia (4.55), din care se obţine imediat:

$$T_U V = -T_{\varphi_\alpha U} \varphi_\alpha V, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.57}$$

Aşadar avem:

$$0 = T_U V + T_{\varphi_1 U} \varphi_1 V = T_U V + T_{\varphi_2 U} \varphi_2 V \tag{4.58}$$

de unde deducem:

$$T_{\varphi_1 U} \varphi_1 V = T_{\varphi_2 U} \varphi_2 V. \tag{4.59}$$

Pe de altă parte, din (4.59) avem:

$$T_{\varphi_2 U} \varphi_2 V + T_{\varphi_3 \varphi_2 U} \varphi_3 \varphi_2 V = 0 \tag{4.60}$$

de unde deducem:

$$T_{\varphi_2 U} \varphi_2 V + T_{\varphi_1 U} \varphi_1 V = 0. \tag{4.61}$$

Din (4.58), (4.59) şi (4.61) rezultă că $T = 0$ şi deci fibrele submersiei sunt total geodezice.

ii. Pentru orice câmpuri vectoriale orizontale X şi Y pe M, ţinând cont de (4.35), avem:

$$\nabla_X \phi_\alpha Y = \phi_\alpha \nabla_X Y, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.62}$$

Luând componentele verticale din (4.62), obţinem:

$$A_X \phi_\alpha Y = \phi_\alpha A_X Y, \forall \alpha = \overline{1,3}. \tag{4.63}$$

Aşadar:

$$A_X\phi_1 Y = A_X\phi_2\phi_3 Y = A_{\phi_2 X}\phi_3 Y = A_{\phi_3\phi_2 X}Y = -A_{\phi_1 X}Y = -A_X\phi_1 Y. \tag{4.64}$$

de unde obţinem $A = 0$, deci distribuţia orizontală este integrabilă. ■

Teorema 4.4.17 ([175])

Fie M o QR-hipersuprafaţă extrinsecă a unei varietăţi cuaternionice Kähler plate $(\overline{M}, \sigma, \overline{g})$, (M', σ', g') o varietate cuaternionică Kähler şi $\pi : M \to M'$ o QR 3-submersie. Atunci M' este o formă spaţială cuaternionică având curbura secţională cuaternionică constantă pozitivă.

Demonstraţie: Pentru orice câmpuri vectoriale bazice X şi Y π-corelate cu X' şi Y' pe M', avem (cf. [17]):

$$A_X Y = \|H\| \sum_{\alpha=1}^{3} g(X, J_\alpha Y)\xi_\alpha. \tag{4.65}$$

Din (4.15) şi (4.65) obţinem pentru orice câmpuri vectoriale bazice X, Y, Z şi W pe M, π-corelate cu X', Y', Z' şi W' pe M':

$$\begin{aligned} R'(X', Y', Z', W') &= R(X, Y, Z, W) + \|H\|^2 \sum_{\alpha=1}^{3}[2g(X, J_\alpha Y)g(Z, J_\alpha W) \\ &\quad -g(X, J_\alpha W)g(Y, J_\alpha Z) + g(X, J_\alpha Z)g(Y, J_\alpha W)]. \end{aligned} \tag{4.66}$$

de unde obţinem, având în vedere că π este o QR 3-submersie:

$$\begin{aligned} R'(X', Y', Z', W') &= R(X, Y, Z, W) + \|H\|^2 \{\sum_{\alpha=1}^{3}[2g'(X', J'_\alpha Y')g'(Z', J'_\alpha W') \\ &\quad -g'(X', J'_\alpha W')g'(Y', J'_\alpha Z') + g'(X', J'_\alpha Z')g'(Y', J'_\alpha W')]\}. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Dar, pe de altă parte, din ecuaţia Gauss avem:

$$\overline{R}(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W) - \|H\|^2 \{g(X, Z)g(Y, W) - g(X, W)g(Y, Z)\}, \tag{4.68}$$

de unde obţinem, având în vedere că $\overline{M}$ este plată:

$$R(X,Y,Z,W) = \|H\|^2 \{g'(X',Z')g'(Y',W') - g'(X',W')g(Y',Z')\}. \tag{4.69}$$

Din (4.67) şi (4.69) obţinem:

$$\begin{aligned} R'(X',Y',Z',W') &= \|H\|^2 \{g'(X',Z')g'(Y',W') - g'(X',W')g'(Y',Z') \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{3}[g'(X',J'_\alpha Z')g'(Y',J'_\alpha W') - g'(X',J'_\alpha W')g'(Y',J'_\alpha Z') \\ &+ 2g'(X',J'_\alpha Y')g'(Z',J'_\alpha W')]\}. \end{aligned}$$

deci într-adevăr M' este o formă spaţială cuaternionică având curbura secţională cuaternionică constantă pozitivă. ■

Exemplul 4.4.18 ([175])

Fie S^{4n+3} hipersfera standard în $\mathbf{R}^{4n+4}$. Atunci S^{4n+3} este o hipersferă extrinsecă în $\mathbf{R}^{4n+4}$ şi fibrarea Hopf $\pi : S^{4n+3} \to P^n(\mathbf{H})$, echipată cu metricile canonice, ne furnizează o QR 3-submersie.

5 Aplicaţii armonice şi submersii Riemann între varietăţi cu structuri cuaternionice

În acest capitol sunt prezentate rezultatele obţinute de autor, în colaborare ([94]), în studiul aplicaţiilor armonice şi al submersiilor Riemann între varietăţi înzestrate cu structuri cuaternionice.

În prima secţiune a capitolului sunt prezentate definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale aplicaţiilor armonice, utilizându-se în general [59] şi [166].

În secţiunea a doua este definit conceptul de aplicaţie (σ, σ')-olomorfă între două varietăţi cuaternionice şi se determină condiţii pentru ca o astfel de aplicaţie să fie armonică.

În secţiunea a treia a capitolului este definit conceptul de submersie cuaternionică şi sunt studiate aceste clase de submersii. Se arată că o submersie cuaternionică între două varietăţi cuaternionice Kähler este o aplicaţie armonică.

În ultima secţiune este construit un exemplu de submersie cuaternionică.

5.1 Generalităţi asupra aplicaţiilor armonice

Fie (M, g) şi (N, h) două varietăţi (semi)Riemann şi $f \in C^\infty(M, N)$. Fie ∇^M şi ∇^N conexiunile Levi-Civita induse pe M şi N de metricile g şi respectiv h. Avem atunci pe $f^{-1}(TN)$, fibratul pull-back prin aplicaţia f al spaţiului tangent TN, conexiunea liniară $\tilde{\nabla}$ definită prin:

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = \nabla^N_{f_* X} f_* Y, \forall X, Y \in \Gamma(TM),$$

unde $f_* : TM \to TN$ este aplicaţia tangentă.

Câmpul tensorial $\beta_f = \nabla df$ se numeşte forma a doua fundamentală a aplicaţiei f. Avem:

$$(\nabla df)(X, Y) = \tilde{\nabla}_X f_* Y - f_*(\nabla^M_X Y), \tag{5.1}$$

pentru $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$. O aplicaţie pentru care forma a doua fundamentală este identic nulă se numeşte aplicaţie total geodezică.

Câmpul tensiune asociat al lui f se defineşte în orice punct $x \in M$ prin :

$$\tau(f)(x) = (trace_g \beta_f)_x = \sum_{i=1}^{m} \beta_f(e_i, e_i), \tag{5.2}$$

unde $m = \dim M$, iar $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ bază ortonormată a lui $T_x M$.

Definiţia 5.1.1 ([59], [166])

Se spune că aplicaţia f este armonică dacă verifică ecuaţia Euler-Lagrange:

$$\tau(f) = 0.$$

Densitatea de energie a unei aplicaţii $f \in C^\infty(M,N)$ este $e(f) : M \to \mathbf{R}$, definită prin:

$$(5.3)\ e(f)(x) = \frac{1}{2}\left(trace_g f^* h\right)_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(f^*h\right)(e_i,e_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} h(f_* e_i, f_* e_i),$$

pentru $\forall x \in M$. Dacă M este compactă, energia aplicaţiei f se defineşte prin:

$$E(f) = \int_M e(f) v_g \tag{5.4}$$

unde v_g este măsura canonică asociată metricii g.

Definiţia 5.1.2 ([59], [166])
Aplicaţia f se numeşte punct critic pentru funcţionala energie $E(f)$ dacă pentru orice variaţie netedă $f_t \in C^\infty(M,N)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, a lui f, avem:

$$\left.\frac{d}{dt}E(f_t)\right|_{t=0} = 0.$$

unde prin variaţie netedă $\{f_t\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$ se înţelege că $f_0 = f$ şi că f_t depinde de t ca o funcţie de clasă C^∞.

Teorema 5.1.3 ([59], [166])
Fie (M,g) şi (N,h) două varietăţi (semi)Riemann, M compactă şi $f \in C^\infty(M,N)$. Atunci f este punct critic pentru funcţionala energie $E(f)$ dacă şi numai dacă f este aplicaţie armonică

Teorema 5.1.4 ([59], [166])
Fie $\pi : (M,g) \to (N,h)$ o submersie Riemann. Aplicaţia π este armonică dacă şi numai dacă fibrele sunt minimale.

Exemplul 5.1.5 ([59], [166])
i. Aplicaţia identitate $Id : (M,g) \to (M,g)$ este aplicaţie armonică.
ii. Dacă M şi N sunt sunt două varietăţi Kähler, atunci $f : M \to N$ este aplicaţie armonică dacă şi numai dacă este o aplicaţie $\pm$-olomorfă.
iii. Dacă (M,g) este o varietate Riemann şi TM este fibratul tangent, înzestrat cu metrica Sasaki, atunci proiecţia canonică $\pi : TM \to M$ este aplicaţie armonică.

5.2 Aplicaţii armonice între varietăţi cuaternionice

Galicki şi Poon ([65]) definesc conceptul de olomorfie între două varietăţi cuaternionice Kähler (M,σ,g) şi (N,σ',g') ca fiind o aplicaţie $f : M \to N$ cu proprietatea $f^*(\sigma') = \sigma$. În continuare se propune un nou concept de olomorfie între varietăţi cu structuri cuaternionice.

Definiţia 5.2.1 ([94])

Fie (M, σ, g) şi (N, σ', g') două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene. O aplicaţie $f : M \to N$ se numeşte (σ, σ') -olomorfă în punctul $x \in M$ dacă pentru $\forall J \in \sigma_x$ $\exists J' \in \sigma'_{f(x)}$ astfel încât $f_* \circ J = J' \circ f_*$.

Definiţia 5.2.2 ([94])

O aplicaţie $f : M \to N$, unde (M, σ, g) şi (N, σ', g') sunt varietăţi aproape cuaternionice hermitiene, se numeşte (σ, σ')-olomorfă dacă este (σ, σ')-olomorfă în orice punct $x \in M$.

Teorema 5.2.3 ([94])

Fie (M, σ, g) şi (N, σ', g') două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene. Dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie (σ, σ')-olomorfă, atunci:

$$J'_\alpha(\tau(f)) = f_*(divJ_\alpha) - trace_g f^* \nabla' J'_\alpha, \forall \alpha \in \overline{1,3}. \tag{5.5}$$

Demonstraţie:

Fie $x \in M$ şi $\{e_1, ..., e_m, J_1e_1, ..., J_1e_m, J_2e_1, ..., J_2e_m, J_3e_1, ..., J_3e_m\}$ o bază ortonormată adaptată a lui T_xM. Prin urmare:

$$divJ_\alpha = \sum_{i=1}^{m} (\nabla_{e_i} J_\alpha) e_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} \left(\nabla_{J_\beta e_i} J_\alpha\right)(J_\beta e_i).$$

de unde obţinem:

$$\begin{aligned} f_*(divJ_\alpha) &= \sum_{i=1}^{m} f_* \nabla_{e_i} J_\alpha e_i - \sum_{i=1}^{m} f_* J_\alpha \nabla_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^{m} f_* \nabla_{J_\alpha e_i} e_i \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta \neq \alpha} f_* \nabla_{J_\beta e_i} J_\alpha J_\beta e_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} f_* J_\alpha \nabla_{J_\beta e_i} J_\beta e_i. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\tau(f) = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} \tilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\beta e_i - \sum_{i=1}^{m} f_* \nabla_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} f_* \nabla_{J_\beta e_i} J_\beta e_i,$$

deci:

$$\begin{aligned} J'_\alpha(\tau(f)) &= \sum_{i=1}^{m} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\beta e_i \\ &- \sum_{i=1}^{m} J'_\alpha f_* \nabla_{e_i} e_i - \sum_{i=1}^{m} \sum_{\beta=1}^{3} J'_\alpha f_* \nabla_{J_\beta e_i} J_\beta e_i. \end{aligned} \tag{5.7}$$

În acelaşi timp, avem:

$$trace_g f^*\nabla' J'_\alpha = \sum_{i=1}^{m}(\nabla'_{f_* e_i} J'_\alpha)(f_* e_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{3}(\nabla'_{f_* J_\beta e_i} J'_\alpha)(f_* J_\beta e_i),$$

şi deoarece f este o aplicaţie (σ, σ')-olomorfă, obţinem:

$$\begin{aligned} trace_g f^*\nabla' J'_\alpha \quad &= \quad \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* J_\alpha e_i - \sum_{i=1}^{m} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{J_\alpha e_i} f_* e_i \\ &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq\alpha} \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\alpha J_\beta e_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{3} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\beta e_i. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Din (5.6) şi (5.7) avem:

$$\begin{aligned} f_*(div J_\alpha) - J'_\alpha\,(\tau(f)) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{m} f_* \nabla_{e_i} J_\alpha e_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq\alpha} f_* \nabla_{J_\beta e_i} J_\alpha J_\beta e_i - \sum_{i=1}^{m} f_* \nabla_{J_\alpha e_i} e_i \\ &- \sum_{i=1}^{m} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{3} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\beta e_i. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dar, deoarece:

$$\widetilde{\nabla}_X f_* Y - \widetilde{\nabla}_Y f_* X = f_*[X, Y]$$

luând $X = e_i$ şi $Y = J_\alpha e_i$ şi sumând după i, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* J_\alpha e_i - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\nabla}_{J_\alpha e_i} f_* e_i = \sum_{i=1}^{m} f_*[e_i, J_\alpha e_i]. \tag{5.10}$$

Din (5.8) şi (5.10) obţinem:

$$\begin{aligned} trace_g f^*\nabla' J'_\alpha \quad &= \quad \sum_{i=1}^{m} f_*[e_i, J_\alpha e_i] - \sum_{i=1}^{m} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i \\ &+ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq\alpha} \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\alpha J_\beta e_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{3} J'_\alpha \widetilde{\nabla}_{J_\beta e_i} f_* J_\beta e_i. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Prin urmare, din (5.9) şi (5.11) obţinem:

$$f_*(div J_\alpha) - J'_\alpha(\tau(f)) = trace_g f^*\nabla' J'_\alpha - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq\alpha} \alpha_f(J_\beta e_i, J_\alpha J_\beta e_i). \tag{5.12}$$

Pe de altă parte însă, avem:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq\alpha}\alpha_f(J_\beta e_i, J_\alpha J_\beta e_i) = 0, \tag{5.13}$$

deoarece, de exemplu pentru $\alpha = 1$, având în vedere că β_f este simetrică, obţinem:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\beta\neq 1}\beta_f\left(J_\beta e_i, J_1 J_\beta e_i\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left[\beta_f\left(J_2 e_i, J_1 J_2 e_i\right) + \beta_f\left(J_3 e_i, J_1 J_3 e_i\right)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\beta_f\left(J_2 e_i, J_3 e_i\right) - \beta_f\left(J_3 e_i, J_2 e_i\right)\right] = 0.\end{aligned}$$

În consecinţă, din (5.12) şi (5.13), deducem (5.5) ■

Teorema 5.2.4 ([94])

Fie (M, σ, g) şi (N, σ', g') două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene. Dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie (σ, σ')-olomorfă astfel încât: $\omega'_\alpha(f_*X) = \omega_\alpha(X)$, $\forall\alpha = \overline{1,3}$, pentru orice câmp vectorial local X pe M, atunci f este aplicaţie armonică.

Demonstraţie: Din (5.5), pentru $\alpha = 1$, avem:

$$J_1'(\tau(f)) = f_*(divJ_1) - trace_g f^*\nabla' J_1'. \tag{5.14}$$

Având în vedere că (M, σ, g) este o varietate cuaternionică Kähler, obţinem:

$$\begin{aligned}divJ_1 &= \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\nabla_{e_i}J_1\right)e_i + \sum_{\alpha=1}^{3}\left(\nabla_{J_\alpha e_i}J_\alpha\right)(J_1 e_i)\right]\\ &= \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\omega_2(J_3 e_i) - \omega_3(J_2 e_i)\right)e_i + \left(\omega_2(J_2 e_i) + \omega_3(J_3 e_i)\right)(J_1 e_i)\right] +\\ &+ \sum_{i=1}^{m}\left[\left(\omega_3(e_i) - \omega_2(J_1 e_i)\right)(J_2 e_i) - \left(\omega_2(e_i) + \omega_3(J_1 e_i)\right)(J_3 e_i)\right].\end{aligned} \tag{5.15}$$

Pe de altă parte, avem:

$$\begin{aligned}trace_g f^*\nabla' J_1' = \sum_{i=1}^{m}\left(\nabla'_{f_*e_i}J_1'\right)(f_*e_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\alpha=1}^{3}\left[\left(\nabla'_{f_*J_\alpha e_i}J_1'\right)(f_*J_\alpha e_i)\right]\\ = \sum_{i=1}^{m}\left(\omega_2'(f_*J_3 e_i) - \omega_3'(f_*J_2 e_i)\right)f_*e_i + \sum_{i=1}^{m}\left(\omega_2'(f_*J_2 e_i) + \omega_3'(f_*J_3 e_i)\right)(f_*J_1 e_i)\\ + \sum_{i=1}^{m}\left(\omega_3'(f_*e_i) - \omega_2'(f_*J_1 e_i)\right)(f_*J_2 e_i) - \sum_{i=1}^{m}\left(\omega_2'(f_*e_i) + \omega_3'(f_*J_1 e_i)\right)(f_*J_3 e_i).\end{aligned}$$

(5.16)

Prin urmare, din (5.15) şi (5.16), deoarece $\omega'_\alpha(f_*X) = \omega_\alpha(X)$, $\forall\alpha = \overline{1,3}$, obţinem:

(5.17) $$f_*(divJ_1) - trace_g f^*\nabla' J'_1 = 0.$$

Din (5.14) şi (5.17) rezultă că avem $J'_1(\tau(f)) = 0$, de unde obţinem $\tau(f) = 0$. În consecinţă f este aplicaţie armonică. ■

Corolarul 5.2.5 ([94])

Fie (M, σ, g) şi (N, σ', g') două varietăţi local hiper-Kähler.

Dacă $f : M \to N$ este o aplicaţie (σ, σ')-olomorfă, atunci f este aplicaţie armonică.

Demonstraţie: Deoarece (M, σ, g) şi (N, σ', g') sunt local hiper-Kähler avem că $\omega'_\alpha = \omega_\alpha = 0$, pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$, şi conform teoremei anterioare rezultă că f este aplicaţie armonică. ■

5.3 Submersii cuaternionice

Definiţia 5.3.1 ([94])

Fie (M, σ, g) şi (N, σ', g') două varietăţi aproape cuaternionice hermitiene. O submersie Riemann $\pi : M \to N$ care este o aplicaţie (σ, σ')-olomorfă se numeşte submersie cuaternionică.

Propoziţia 5.3.2 ([94])

Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ o submersie cuaternionică. Atunci:

i. Distribuţia verticală $\mathcal{V}(M)$ şi distribuţia orizontală $\mathcal{H}(M)$ sunt invariante prin structurile $J_\alpha, \forall\alpha = \overline{1,3}$.

ii. Fibrele submersiei sunt subvarietăţi cuaternionice.

Demonstraţie:

i. Fie $V \in \mathcal{V}(M)$. Atunci, deoarece π_* este o izometrie complexă, avem:

$$\pi_* J_\alpha V = J'_\alpha \pi_* V = 0,$$

deci $J_\alpha V \in \mathcal{V}(M)$, $\forall V \in \mathcal{V}(M)$. Aşadar $J_\alpha\mathcal{V}(M) \subseteq \mathcal{V}(M)$, $\forall\alpha = \overline{1,3}$.

Pe de altă parte, dacă $X \in \mathcal{H}(M)$ şi $V \in \mathcal{V}(M)$, avem:

$$g(J_\alpha X, V) = -g(X, J_\alpha V) = 0,$$

deoarece X este orizontal, iar $J_\alpha V$ este vertical.

ii. Din i. rezultă că fibrele submersiei sunt varietăţi J_α-invariante pentru $\forall\alpha = \overline{1,3}$, deci sunt subvarietăţi cuaternionice. ■

Teorema 5.3.3 ([94])

Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ o submersie cuaternionică. Dacă M este varietate cuaternionică Kähler, atunci şi N este varietate cuaternionică Kähler.

Demonstraţie: Deoarece M este cuaternionică Kähler, avem:

$$(\nabla_X J_1) Y = \omega_3 (X) J_2 Y - \omega_2 (X) J_3 Y. \tag{5.18}$$

Fie $X_*, Y_* \in \Gamma(TN)$ astfel încât $\pi_*(X) = X_*, \pi_*(Y) = Y_*$, unde $X, Y \in \Gamma(TM)$. Avem:

$$\begin{aligned}
\left(\nabla'_{X_*} J'_1\right) Y_* &= \nabla'_{X_*} (J'_1 Y_*) - J'_1 \left(\nabla'_{X_*} Y_*\right) \\
&= \nabla'_{\pi_* X} (J'_1(\pi_* Y)) - J'_1 \left(\nabla'_{\pi_* X} \pi_* Y\right) \\
&= \nabla'_{\pi_* X} (\pi_*(J_1 Y)) - J'_1 \pi_* (h\nabla_X Y) \\
&= \pi_* (h\nabla_X (J_1 Y)) - \pi_* (J_1(h\nabla_X Y))
\end{aligned}$$

de unde deducem:

$$\left(\nabla'_{X_*} J'_1\right) Y_* = \pi_* ((\nabla_X J_1) Y). \tag{5.19}$$

Prin urmare, dacă definim 1-formele locale $\{\omega'_\alpha\}_{\alpha=\overline{1,3}}$, pe N prin:

$$\omega'_\alpha (X_*) = \omega_\alpha(X), \forall \alpha = \overline{1,3}, \tag{5.20}$$

pentru orice câmp vectorial local X_* pe TN, cu $\pi_*(X) = X_*$, X fiind un câmp vectorial local pe M, din (5.18)-(5.20) obţinem:

$$(\nabla'_{X_*} J'_1) Y_* = \omega'_3 (X_*) J'_2 Y_* - \omega'_2 (X_*) J'_3 Y_*$$

şi analog găsim:

$$(\nabla'_{X_*} J'_2) Y_* = -\omega'_3 (X_*) J'_1 Y_* + \omega'_1 (X_*) J'_3 Y_*,$$

respectiv:

$$(\nabla_{X_*} J'_3) Y_* = \omega'_2 (X_*) J'_1 Y_* - \omega'_1 (X_*) J'_2 Y_*$$

deci N este varietate cuaternionică Kähler. ■

Corolarul 5.3.4 ([94])

Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ o submersie cuaternionică. Dacă M este o varietate cuaternionică Kähler, atunci fibrele submersiei sunt subvarietăţi cuaternionice Kähler total geodezice.

Demonstraţie: Fie $S = \pi^{-1}(y_0)$, $y_0 \in N$, o fibră a submersiei. Din Propoziţia 5.3.2 rezultă că S este o subvarietate cuaternionică a varietăţii cuaternionice Kähler M şi dintr-o teoremă cunoscută din teoria subvarietăţilor (a se vedea [9]), rezultă că S este o subvarietate cuaternionică Kähler total geodezică. ■

Observaţia 5.3.5

Deoarece tensorul T al lui O'Neill pe câmpurile vectoriale verticale ale unei fibre este exact forma a doua fundamentală a lui Gauss din teoria subvarietăţilor, din corolarul anterior deducem că dacă $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ este o submersie cuaternionică, iar M este o varietate cuaternionică Kähler, atunci $\Rightarrow T = 0$.

Corolarul 5.3.6 ([94])
Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ o submersie cuaternionică. Dacă M este o varietate cuaternionică Kähler, atunci π este aplicaţie armonică.

Demonstraţie: Deoarece fibrele submersiei sunt total geodezice, deci minimale, conform teoremei lui Vilms $\Rightarrow \pi$ este aplicaţie armonică. ■

Teorema 5.3.7 ([94])
Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ o submersie cuaternionică. Dacă M este o varietate cuaternionică Kähler, atunci $A = 0$.

Demonstraţie: Se ştie că:

$$A = 0 \Leftrightarrow A_X Y = 0, \forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

Deoarece $A_X Y = v \nabla_X Y$, obţinem:

$$A_X (J_\alpha Y) = v \nabla_X J_\alpha Y = v ((\nabla_X J_\alpha) Y + J_\alpha \nabla_X Y) =$$

$$= v ((\nabla_X J_\alpha) Y) + v (J_\alpha (\nabla_X Y)) = v (J_\alpha (\nabla_X Y)),$$

pentru că, din definiţia varietăţii cuaternionice Kähler, avem:

$$g ((\nabla_X J_\alpha) Y, U) = 0, \forall U \in \mathcal{V}(M),$$

deci:

$$v ((\nabla_X J_\alpha) Y) = 0.$$

Aşadar, avem că:

$$A_X (J_\alpha Y) = v (J_\alpha (\nabla_X Y)) = J_\alpha v (\nabla_X Y) = J_\alpha A_X Y,$$

de unde rezultă că:

$$A_X Y = -J_\alpha A_X J_\alpha Y, \forall \alpha = \overline{1, 3}. \tag{5.21}$$

Pe de altă parte:

$$A_{J_\alpha X} Y = -A_Y J_\alpha X = -J_\alpha A_Y X = J_\alpha A_X Y,$$

de unde rezultă că:

$$A_X Y = -J_\alpha T_{J_\alpha X} Y. \tag{5.22}$$

Prin urmare, din (5.21) şi (5.22) obţinem:

$$A_X Y = -J_1 A_X J_1 Y = -J_1 A_X (J_2 J_3 Y) = -J_1 A_{J_2 X} J_3 Y =$$

$$= -J_1 A_{J_3 J_2 X} Y = J_1 A_{J_1 X} Y = J_1^2 A_X Y = -A_X Y,$$

deci:

$$A_X Y = 0, \forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

■

Corolarul 5.3.8 ([94])
Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ *o submersie cuaternionică. Dacă* M *este cuaternionică Kähler, atunci distribuţia orizontală este complet integrabilă.*

Demonstraţie: Se ştie că:

$$A_X Y = \frac{1}{2} v[X, Y], \forall X, Y \in \mathcal{H}(M).$$

Prin urmare, integrabilitatea distribuţiei orizontale este echivalentă cu anularea lui A pe câmpurile vectoriale orizontale. ■

Corolarul 5.3.9 ([94])
Fie $\pi : (M, \sigma, g) \to (N, \sigma', g')$ *o submersie cuaternionică. Dacă* M *este o varietate cuaternionică Kähler compactă, atunci:*

$$b_r(N) \leq b_r(M), \forall r = \overline{0, \dim N}.$$

Demonstraţie: Din Observaţia 5.3.5 şi Teorema 5.3.7 avem că $T = 0$ şi $A = 0$, de unde, via o teoremă a lui O'Neill, rezultă concluzia corolarului. ■

5.4 Exemplu de submersie cuaternionică

Fie (M, σ, g) o varietate aproape cuaternionică hermitiană şi (TM, G) varietatea tangentă înzestrată cu metrica Sasaki:

$$G(A, B) = g(KA, KB) + g(\pi_* A, \pi_* B), \quad \forall A, B \in T(TM).$$

Definim pe (TM, G) structurile aproape complexe $(J'_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$ astfel:

$$\begin{cases} J'_\alpha X^h = (J_\alpha X)^h \\ J'_\alpha X^v = (J_\alpha X)^v \end{cases}, \forall \alpha = \overline{1,3},$$

şi fie σ' fibratul vectorial pe TM care este local generat de $(J'_\alpha)_{\alpha=\overline{1,3}}$.

Teorema 5.4.1 ([94])
Fie (M, σ, g) *o varietate aproape cuaternionică hermitiană. Atunci:*
i. (TM, σ', G) *este o varietate aproape cuaternionică hermitiană.*
ii. Proiecţia canonică $\pi : TM \to M$ *este o submersie cuaternionică.*

Demonstraţie: Arătăm mai întâi că $J'^2_\alpha = -Id$, pentru $\forall \alpha = \overline{1,3}$. Într-adevăr, avem:

$$J'^2_\alpha X^h = J'_\alpha(J'_\alpha X^h) = J'_\alpha(J_\alpha X)^h = (J_\alpha(J_\alpha X))^h = -X^h,$$

respectiv:

$$J'^2_\alpha X^v = J'_\alpha(J'_\alpha X^v) = J'_\alpha(J_\alpha X)^v = (J_\alpha(J_\alpha X))^v = -X^v,$$

deci $J_\alpha^{'2} = -Id$, pentru $\forall \alpha = \overline{1,3}$.

Arătăm în continuare că $J_1^{'} J_2^{'} = J_3^{'}$. Într-adevăr, avem:

$$(J_1^{'} J_2^{'})(X^h) = J_1^{'}(J_2^{'} X^h) = J_1^{'}(J_2 X)^h = (J_1 J_2 X)^h = (J_3 X)^h = J_3^{'} X^h,$$

respectiv:

$$(J_1^{'} J_2^{'})(X^v) = J_1^{'}(J_2^{'} X^v) = J_1^{'}(J_2 X)^v = (J_1 J_2 X)^v = (J_3 X)^v = J_3^{'} X^v,$$

deci $J_1^{'} J_2^{'} = J_3^{'}$.

Analog rezultă că $J_2^{'} J_1^{'} = -J_3^{'}$, deoarece:

$$(J_2^{'} J_1^{'})(X^h) = J_2^{'}(J_1^{'} X^h) = J_2^{'}(J_1 X)^h = (J_2 J_1 X)^h = (-J_3 X)^h = -J_3^{'} X^h,$$

respectiv:

$$(J_2^{'} J_1^{'})(X^v) = J_2^{'}(J_1^{'} X^v) = J_2^{'}(J_1 X)^v = (J_2 J_1 X)^v = (-J_3 X)^v = -J_3^{'} X^v.$$

Arătăm în continuare că:

$$G(J_\alpha^{'} A, J_\alpha^{'} B) = G(A, B), \forall \alpha = \overline{1,3}, \forall A, B \in T(TM).$$

Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned}
G(J_\alpha^{'} X^h, J_\alpha^{'} Y^h) &= g(K J_\alpha^{'} X^h, K J_\alpha^{'} Y^h) + g(\pi_*(J_\alpha^{'} X^h), \pi_*(J_\alpha^{'} Y^h)) \\
&= g(K(J_\alpha X)^h, K(J_\alpha Y)^h) + g(\pi_*(J_\alpha X)^h, \pi_*(J_\alpha Y)^h) \\
&= 0 + g(J_\alpha X, J_\alpha Y) = g(X, Y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(X^h, Y^h) &= g(K X^h, K Y^h) + g(\pi_* X^h, \pi_* Y^h) \\
&= 0 + g(X, Y) = g(X, Y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(J_\alpha^{'} X^v, J_\alpha^{'} Y^v) &= g(K J_\alpha^{'} X^v, K J_\alpha^{'} Y^v) + g(\pi_*(J_\alpha^{'} X^v), \pi_*(J_\alpha^{'} Y^v)) = \\
&= g(K(J_\alpha X)^v, K(J_\alpha Y)^v) + g(\pi_*(J_\alpha X)^v, \pi_*(J_\alpha Y)^v) = \\
&= g(J_\alpha X, J_\alpha Y) + 0 = g(X, Y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(X^v, Y^v) &= g(K X^v, K Y^v) + g(\pi_* X^v, \pi_* Y^v) \\
&= g(X, Y) + 0 = g(X, Y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(J_\alpha^{'} X^h, J_\alpha^{'} Y^v) &= g(K J_\alpha^{'} X^h, K J_\alpha^{'} Y^v) + g(\pi_*(J_\alpha^{'} X^h), \pi_*(J_\alpha^{'} Y^v)) = \\
&= g(K(J_\alpha X)^h, K(J_\alpha Y)^v) + g(\pi_*(J_\alpha X)^h, \pi_*(J_\alpha Y)^v) = \\
&= g(0, J_\alpha Y) + g(J_\alpha X, 0) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(X^h, Y^v) &= g(KX^h, KY^v) + g(\pi_* X^h, \pi_* Y^v) = \\ &= g(0, Y) + g(X, 0) = 0. \end{aligned}$$

Aşadar avem că: $G(J'_\alpha A, J'_\alpha B) = G(A, B),\ \forall \alpha = \overline{1,3}, \forall A, B \in T(TM)$.

Prin urmare, rezultă că (TM, σ', G) este o varietate aproape cuaternionică hermitiană.

Arătăm în continuare că $\pi_* J'_\alpha = J_\alpha \pi_*$, $\forall \alpha = \overline{1,3}$. Într-adevăr, avem:

$$\pi_* J'_\alpha X^v = \pi_* (J_\alpha X)^v = 0 = J_\alpha \pi_* X^v,$$

$$\pi_* J'_\alpha X^h = \pi_* (J_\alpha X)^h = J_\alpha X = J_\alpha \pi_* X^h.$$

Prin urmare, rezultă că $\pi : TM \to M$ este o submersie cuaternionică. ■

Bibliografie

[1] P.B. Acheson, "*Multimedia Application Of Quaternions*", M.Sc. dissertation, University Of Southern California, 1997.

[2] K.L Albrecht - "*The Use of Quaternions in the Modeling of Non-Local Contact in Proteins*", Ph. D. Thesis, Washington State University, 1995.

[3] K. Albrecht, J. Hart, A. Shaw, A.K. Dunker - "*Quaternion Contact Ribbons: A New Tool for Visualizing Intra- and Intermolecular Interactions in Proteins*", Department of Electrical Engineering and Computer Science, Department of Biochemistry and Biophysics, Washington State University, Pullman, WA 99164-4660.

[4] D.V. Alekseevski - "*Riemannian spaces with exceptional holonomy groups*", Funnkcional. Anal. Prilozen. 2 (1968), pg. 1-10.

[5] D.V.Alekseevski - "*Compact quaternion spaces*", Funnkcional. Anal. Prilozen. 2 (1968), pg. 11-20.

[6] D. Alekseevsky, Y. Kamishima - "*Quaternionic and para-quaternionic CR structure on (4n+3)-dimensional manifolds*", Central European J. Math., Vol. 2, No. 5(2004), 732-753.

[7] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava - "*Hipercomplex structures on quaternionic manifolds*", New Developments in Differential Geometry, Kluwer, 1996.

[8] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava - "*Quaternionic structures on a manifold and subordinate structures*", Ann. Mat. Pura Appl. 17 (1996), pg. 205-273.

[9] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava - "*Almost complex submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*", Steps in Differential Geometry, Inst. Math. Inf., Debrecen 2001, pg. 23-38.

[10] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava - "*Almost hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*", Osaka J. of Math. 38 (2001), pg. 869-904.

[11] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava - "*A twistor construction of a minimal Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*", Annali di Mat. 3 (2004) 89.

[12] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava, M. Pontecorvo - "*Compatible almost complex structures on quaternionic Kähler manifolds*", Ann. Global Anal. Geom. 16, No. 5(1998), pg. 419-444.

[13] D.V. Alekseevski, S.Marchiafava, M. Pontecorvo - "*Compatible complex structures on almost quaternionic manifolds*", Trans. Am. Math. Soc. 351, No. 3(1999), pg. 997-1014.

[14] R. Alonso, M.D. Shuster - "*Twostep: A Fast Robust Algorithm for Attitude-Independent Magnetometer-Bias Determination*", The Journal of Astronautical Sciences, October - December, 2002, Vol. 50, No. 4.

[15] D. Anselmi, P. Fre - "*Twisted N=2 supergravity as topological gravity in four dimensions*", Nucl.Phys. B392 (1993) 401.

[16] P. Arena, S. Baglio, L. Fortuna, M.G. Xibilia - "*Chaotic time series prediction via quaternionic multilayer perceptrons*", Systems, Man and Cybernetics, 1995, Intelligent Systems for the 21st Century, IEEE International Conference, Volume: 2, pg. 1790 -1794.

[17] N.A. Aspragathos, J.K. Dimitros - "*A comparative study of three methods for robot kinematics*", Systems, Man and Cybernetics, Part B, IEEE Transactions, Volume: 2, pg. 135- 145.

[18] M. Atceken - "*F-invariant submanifolds of Kaehlerian product manifold*", Turk. J. Math, 28(2004), pg. 367-381.

[19] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin - "*The geometry and dynamics of magnetic monopoles*", M.B. Porter Lectures, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[20] H. Bacakoglu, M. Kamel - "*An optimized two-step camera calibration method*", Robotics and Automation, 1997 IEEE International Conference, Volume: 2 , pg 1347 -1352.

[21] S. Battilotti, S. Di Gennaro, L. Lanari - "*Output feedback stabilization of a rigid spacecraft with unknown disturbances*", Decision and Control, 1994, Proceedings of the 33rd IEEE Conference, Volume: 1, pg. 916 -920.

[22] W. Beebe, A.W. Phillips - "*The orbit of Swift's comet 1880 V determined by Gibbs's vector method*", Astronomical Journal, 9, 1890, pg. 113-117, 121-124.

[23] A. Bejancu, "*Null hypersurfaces of semi-euclidean spaces*", Saitama Math. J. Vol. 14(1996), pg. 25-40.

[24] A. Bejancu - "*Geometry of CR-submanifolds*", D. Reidel Publ. Co, Dordrecht, 1986.

[25] A. Bejancu - "*QR-Submanifolds of quaternion Kaehler manifolds*", Chinese Journal of Math., Vol.14, No. 42 (1986), pg. 81-94.

[26] A. Bejancu - "*On totally umbilical QR-Submanifold of quaternionic Kahlerian. manifolds*", Bull. Austral. Math. Soc. 62 (2000), pg. 95-103.

[27] A. Bejancu, K.L. Duggal - "*Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds*", Acta Apl. Math. 38(1995).

[28] A. Bejancu, K.L. Duggal - "*Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and its application*", Kluwer, Dortrecht 1996.

[29] M. Berger - "*Sur les groupes d'holonomie des variétés a connexion affine et des variétés riemanniennes*", Bull. Soc. Math. France 83, (1955), pg. 279-310.

[30] M. Berger - "*Sur espaces symmetrique noncompactes*", Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) 74(1957), pg. 85-177.

[31] M. Berger - "*Remarques sur le groupe d'holonomie des variétés riemanniennes*", Ann. Sci. Paris 262(1966), pg. 1316-1318.

[32] A. Besse - "*Einstein manifolds*", Springer-Verlag, 1987, Berlin.

[33] R. Bielawski, A. Dancer, "*The geometry and topology of toric hyperkähler manifolds*", Comm. Anal. Geom. 8 (2000), pg. 727-760.

[34] D.E. Blair - "*Contact manifolds in Riemannian Geometry*", Lectures Notes in Math. 509, Springer-Verlag, 1976.

[35] N. Blazic - "*Para-quaternionic projective spaces and pseudo Riemannian geometry*", Publ. Inst. Math, 60(74), pg. 101-107, 1996.

[36] A.I. Bobrysheva, S.A. Moskalenko, V.R. Misko, S.I. Negru - "*Spontaneous and light induced Bose-Einstein condensation of biexcitons*", Semiconductor Conference, CAS'95 Proceedings, 1995, pg. 263 -266.

[37] S. Bochner - "*Curvature and Betti numbers*", II, Ann. Math. 50 (1949), pg. 77-93.

[38] E. Bonan - "*Sur les G-structures de type quaternionen*", Cahiers de Topologie et Geometrie Differentialle, 9 (1967), pg. 389-461.

[39] S.P. Brumby, G.C. Joshi - "*Experimental Status of Quaternionic Quantum Mechanics*", Chaos, Solitons And Fractals, Volume 7, Issue 5, May 1996.

[40] S.P. Brumby, B.E. Hanlon, G.C. Joshi - "*Implications of quaternionic dark matter*", Physics Letters B, Volume 401, Issue 3-4, 29 May 1997.

[41] A. Burbanks - "*Quaternions in C++*", Loughborough University, 1996.

[42] E. Calabi - "*Métriques kähleriennes et fibres holomorphes*", Ann. Sci. Éc. Norm. Supr., IV. Sér. 12(1978), pg. 269-294.

[43] A. Cavallo, G. De Maria - "*Attitude control for large angle maneuvers*", Variable Structure Systems, 1996, VSS '96. Proceedings, 1996 IEEE International Workshop, pg. 232-237.

[44] G.W. Charache, J.L. Egley, L.R. Danielson, D.M. DePoy, P.F. Baldasaro, B.C. Campbell, S. Hui, L.M. Fraas, S.J. Wojtczuk - "*Current status of low-temperature radiator thermophotovoltaic devices*", Photovoltaic Specialists Conference, 1996, Conference Record of the Twenty Fifth IEEE, pg. 137 -140.

[45] S. Chaudhuri, S. Ramakrishna, S. Chatterjee - "*Recursive Solution to Quaternion-Based Navigation*", Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations III, San Diego, CA, USA, 1992, pg.198-209.

[46] B.Y. Chen - "*Geometry of submanifolds and its applications*", Sci. University, Tokio, 1981.

[47] B.Y. Chen - "*Extrinsic Spheres in Riemannian Manifolds*", Houston J. of Math., Vol. 5 (1979), pg. 319-324.

[48] B.Y. Chen - "*CR-submanifolds of Kähler manifold*", I,II, J. Diff. Geometry, 16 (1981), pg. 305-323, pg. 493-509.

[49] J.C.K.Chou - "*Quaternion kinematic and dynamic differential equations*", IEEE Transactions on Robotics and Automation v. 8 (Feb. '92), pg. 53-64.

[50] J.C.K. Chou, M. Kamel - "*Finding the Position and Orientation of a Sensor on a Robot Manipulator Using Quaternions*", International Journal of Robotics Research, Vol. 10, No 3, 1991, pg. 240-254.

[51] L. Cordero, M. Fernandez, M. De Leon - "*A family of non-Kählerian quaternionic manifolds*", Boletin Academia Galega de Ciencias, vol III, pg. 57-68 (1984).

[52] A. Cohen - "*On the differential coefficients and determinants of lines, and their application to analytical mechanics*", Lond. Phil. Trans, 152, 1862, pg. 469-510.

[53] R. Cristi, J. Burl, N. Russo - "*Adaptive Quaternion Feedback Regulation for Eigenaxis Rotations*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 17, No 6, 1994, pg. 1287-1291.

[54] A.S. Dancer, H.R. Jorgensen, A. Swann - "*Metric geometries over the split quaternions*", e-print, http/:xxx.lanl.gov, DG/ 0412215.

[55] J.R. Dooley - "*A strategy for fine motion manipulation of robots using kinematic constraints*", Robotics and Automation, 1994. Proceedings, 1994 IEEE International Conference, pg. 656 -661.

[56] S. Dragomir, L.Ornea - "*Locally Conformal Kähler Geometry*", Progress in Math. 155, Birkhäuser, 1998.

[57] O. Dragulete, L.Ornea - "*Non-zero contact and sasakian reduction*", Differ. Geom. Appl. 24, No.3 (2006), pg. 260-270.

[58] T.A. Dwyer, A.L. Batten - "*Exact spacecraft detumbling and reorientation maneuvers with gimbaled thrusters and reaction wheels*", J. Astronautical Sci., Vol. 33, no. 2, 1985, pg. 217-232.

[59] J. Eells, L. Lemaire - "*Another report on harmonic maps*", Bulletin London Math. Society 20(1988), pg. 385-524.

[60] D.D. Evans - "*Complex Variable Theory Generalized to Electromagnetics: The Theory of Functions of a Quaternion Variable*", Dover Publs., NY, 1966.

[61] M. Falcitelli, S. Ianuş, A.M. Pastore - "*Riemannian submersions and related topics*", Singapore, River Edge, NJ: World Scientific, 2004.

[62] M. Firneis, F. Firneis - "*On the Use of Quaternions in Spherical and Positional Astronomy*", Astronomical Journal, Vol. 91, January 1986.

[63] B. Friedland - "*Analysis Strapdown Navigation Using Quaternions*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 14, No. 5, September 1978, pg. 764-768.

[64] S. Funabashi - "*Totally complex submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*", Kodai Math. J. 2(1979), pg. 314-336.

[65] K. Galicki, Y.S. Poon - "*Duality and Yang-Mills fields on quaternionic Kähler manifolds*", J. Math. Phys. 32, No.5 (1991), pg. 1263-1268.

[66] E. Garcia Rio, Y. Matshushita, R. Vasquez-Lorenzo - "*Paraquaternionic Kähler manifold*", Rocky Mountain Journal of Math, Vol. 31, Nr. 1, Spring 2001.

[67] S.J.Gates, C.M.Hull, M.Roek - "*Twisted multiplets and new supersymmetric non-linearmodels*", Nucl. Phys. B248 (1984).

[68] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu - "*Varietaţi diferenţiabile finit şi infinit dimensionale*", Vol. 2, Editura Academiei Române, 1979.

[69] C. Gherghe, S. Ianuş, A.M. Pastore - "*CR-manifolds, harmonic maps and stability*", Journal of Geometry, 71(2001), pg. 42-53.

[70] A. Gray - "*A note on manifolds whose holonomy group is a subgroup of* $Sp(n) \times Sp(1)$", Mich. Math. J. 16(1969), pg. 125-128.

[71] R. Güneş, B. Şahin, S. Keleş - "*QR-submanifolds and almost contact 3-structure*", Turk. J. Math, 24(2000), pg. 239-250.

[72] A.J. Hanson, H. Ma - "*Visualizing flow with quaternion frames*", Proceedings of Visualization '94, IEEE Computer Society Press, 1994, pg. 108-115.

[73] A.J. Hanson, H. Ma - "*Quaternion frame approach to streamline visualization*", IEEE Trans. on Visualiz. and Comp. Graphics 1-2, 1995, pg. 164-174.

[74] M. Hasan Shahid, S.I. Husain - "*CR-submanifolds of a Bochner-Kaehler manifolds*", Indian J. Pure Appl. Math, 18(7), July 1987, pg. 605-610.

[75] S. Habot, D. Lu, N.J. Tagg, G.R. Gall, D.J. Siminovitch - "*Time symmetry: an application to shaped pulse excitation of spin-1 systems*", Solid State Nuclear Magnetic Resonance, Volume 10, Issue 3, January 1998.

[76] W.R. Hamilton - "*On Quaternions*", Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 11, 1844, vol. 9 (1847), pg. 1-16.

[77] T. Hausel - "*Quaternionic geometry of everything*", Colloq. At Rice University, 2004.

[78] T. Hausel, E. Hunsicker, R. Mazzeo - "*Hodge cohomology of gravitational instantons*", Duke Math. J. 122, no. 3 (2004), pg. 485-548.

[79] T. Hausel, B. Sturmfels, "*Toric hyperkähler varieties*", Doc. Math. 7 (2002), pg. 495-534.

[80] T. Hausel, F. Villegas - "*On the zeta function of certain character varieties*", Inst. Henry Poincar, preprint.

[81] A.C. Hendley - "*Quaternions for Control of Space Vehicles*", Proceedings of the ION National Space Meeting of Space Shuttle, Space Station, and Nuclear Shuttle Navigation, George C. Marshall Space Flight Center, Huntsville, Ala., Feb. 1971.

[82] D. Hestenes - "*New Foundations for Classical Mechanics*", Reidel Publ. Co., Dordrecht/Boston, 1985.

[83] N. J. Hitchin - "*A new family of Einstein metrics*", Manifolds and Geometry (Pisa, Italy, 1993), Sympos. Math. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pg.190-222.

[84] N. J. Hitchin - "*L2-cohomology of hyperkähler quotients*", Comm. Math. Phys. 211(2000), pg. 153-165.

[85] N. J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindstrm, M. Roeek - "*Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*", Comm. Math. Phys. 108 (1987), pg. 535-589.

[86] B.K.P Horn - "*Closed-Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions*", Journal of the Optical Society of America. A, Optics and Image Science, Vol. 4, No 4, April 1987, pg. 629-642.

[87] C.M. Hull - "*Actions for (2,1) sigma models and strings*", Nucl. Phys. B 509 (1998), No. 1-2, pg. 252-272.

[88] S. Ianuş - "*Geometrie diferenţială cu aplicaţii în teoria relativităţii*", Editura Academiei Române, 1983.

[89] S. Ianuş - "*Some almost product structures on manifolds with linear connections*", Kodai Math. Seminar Reports 23, 3(1971).

[90] S. Ianuş - "*Sulle strutture canoniche dello spazio fibrato tangente di una varieta riemanniana*", Rendiconti di Matematica (1), Vol. 6, Serie VI (1973), pg. 75-96.

[91] S. Ianuş, K. Matsumoto, L. Ornea - "*Immersions sphériques dans une variété de Hopf généralisée*", C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 316, No. 1, pg. 63-66, 1993.

[92] S. Ianuş, R. Mazzocco, G.E. Vîlcu - "*Real lightlike hypersurfaces of paraquaternionic Kähler manifolds*", Mediterranean J. Math., vol. 3, Nr. 3-4/2006, pg. 581-592.

[93] S. Ianuş, R. Mazzocco, G.E. Vîlcu - "*On paraquaternionic Kähler manifolds*", preprint, 2006.

[94] S. Ianuş, R. Mazzocco, G.E. Vîlcu - "*Harmonic maps and Riemannian submersions from quaternionic manifolds*", preprint, 2006.

[95] B.P. Ickes - "*Use of Quaternions to Perform Attitude and Control Computations*", R:SEA-8029, Aug. 1967, Logicon Inc., San Pedro, Calif.

[96] A. Ionescu, G.E. Vîlcu - "*A note on paraquaternionic manifolds*", Missouri Journal of Mathematical Sciences, în curs de apariţie.

[97] R. Iordănescu - "*Sulle strutture quaternionali grassmanniane*", Bollettino U.M.I. 10 (1974), 406-411.

[98] S. Ishihara - "*Quaternion Kählerian manifolds*", J. Diff. Geometry 9(1974), pg. 483-500.

[99] S. Ivanov - "*Geometry of quaternionic Kähler connections with torsion*", Journal of Geometry and Physics, Volume 41, Number 3, March 2002, pg. 235-257.

[100] S. Ivanov, I. Minchev - "*Quaternionic Kähler and hyperKähler manifolds with torsion and twistor spaces*", J. Reine Angew. Math. 567 (2004), pg. 215-233.

[101] S. Ivanov, I. Minchev, S. Zamkovoy - "*Twistor and Reflector Spaces of Almost Para-Quaternionic Manifolds*", e-print: http/: xxx.lanl.gov, math. DG/0511657.

[102] S. Ivanov, S. Zamkovoy - "*Para-hermitian and para-quaternionic manifolds*", Differential Geom.Appl., 23(2005), 205-234.

[103] J. Jost - "*Riemannian geometry and geometric analysis*", Universitex, Second Edition, Springer-Verlag, 1998.

[104] D. Joyce - "*Compact quaternionic and hypercomplex manifolds*", J. Diff. Geom 35(1992), pg. 743-761.

[105] B. Juttler - "*Visualization of Moving Objects Using Dual Quaternion Curves*", Computer and Graphics, Vol. 18, No. 3, 6 May 1994, pp. 315-326.

[106] T.H. Kang, H.C. Nam - "*Submanifolds of an almost quaternionic Kaehler product manifold*", Bull. Korean Math. Soc. 34(1997), No. 4, pg. 635-665.

[107] S. Kobayashi - "*Submersion of CR-submanifolds*", Tôhoku Math. J. 39(1987), pg. 95-100.

[108] S. Kobayashi, K. Nomizu - "*Foundations of differential geometry*" (vol. I, II), Interscience, New York, 1963.

[109] P. B. Kronheimer, H. Nakajima - "*Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*", Math. Ann. 288 (1990), pg. 263-307.

[110] N. Kupelli - "*Singular semi-Riemann geometry*", Kluwer, Dortrecht 1996.

[111] Y.Y. Kuo - "*On almost contact 3-structure*", Tôhoku Math. J. 22, pg. 325-332, 1970.

[112] C. Le Brun - "*Quaternionic-Kähler manifolds and conformal geometry*", Math. Ann. 284(1989), pg. 353-376.

[113] J. Liang - "*Smoothing and prediction of isotrak data for virtual reality systems*", Proceedings of the 1991 Western Computer Graphics Symposium, 1991, pg. 58-60.

[114] W. Liang-Boon, M.W. Walker, N.H. McClamroch - "*An articulated-body model for a free-flying robot and its use for adaptive motion control*", Robotics and Automation, IEEE Transactions, Volume: 13(2), pg. 264 -277.

[115] P. Libermann - "*Sur les structures presque quaternioniennes de deuxieme espece*", C.R. Acad. Sc. Paris 234(1952), pg.1030-1032.

[116] F. Lizarralde, J.T. Wen, L. Hsu - "*Quaternion-based coordinated control of a subsea mobile manipulator with only position measurements*", Decision and Control, 1995, Proceedings of the 34th IEEE Conference, Vol. 4, pg. 3996-4001.

[117] S. De Leo, P. Rotelli - "*Translations between Quaternion and Complex Quatum Mechanics*", Los Alamos Physics Information Services. High Energy Theory, 1993.

[118] V. Mangione - "*Some submersions of CR-hypersurfaces of Kähler-Einstein manifold*", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 3, no. 18, (2003), pg. 1137-1144.

[119] V. Mangione - "*QR-hypersurfaces of Quaternionic Kähler Manifolds*", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. 8, no. 1, (2003), pg. 63-70.

[120] S. Marchiafava - "*Sulla geometria locale delle varieta Kähleriene quaternionali*", Bolletino UMI (7) 5-B (1991), pg. 417-447.

[121] E. Martinelli - "*Varieta a struttura quaternionale generalizzata*", Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser, Rend, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 26(1959), pg. 353-362.

[122] E. Martinelli - "*Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*", Ann. Mat. Pura Appl, IV. Ser. 49(1960), pg. 73-89.

[123] E. Martinelli - "*Metriche hermitiane sulle varieta a struttura quasi quaternionale generalizzata*", Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 39(1965), pg. 400-407.

[124] K. Matsumoto - "*On Lorentzian paracontact manifolds*", Bull. Of Yamagata Univ. Nat. Sci., Vol. 12, No. 2, 1989, pg. 151-156.

[125] W. S. Massey - "*Non existence of almost complex structures on quaternionic projective spaces*", Pacific J. Math. 12(1962), pg. 1379-1384.

[126] C. Morimoto, R. Chellappa - "*Fast 3D stabilization and mosaic construction*", Computer Vision and Pattern Recognition, 1997 IEEE Computer Society Conference, pg. 660-665.

[127] R. Mukundan, K.R. Ramakrishnan - "*A quaternion solution to the pose determination problem for rendezvous and docking simulations*", Mathematics And Computers In Simulation, Volume 39, Issue 1-2 , 8 November 1995.

[128] A. Murray, F. Pierrot, P. Dauchez, J. McCarthy - "*On the Design of Parallel Manipulators for a Prescribed Workspace: A Planar Quaternion Approach*", 5th International Symposium on Advances in Robot Kinematics, June, 1996.

[129] D.K. Mynbaev - "*Errors of an inertial navigation unit caused by ring laser gyros errors*", Position Location and Navigation Symposium, 1994, IEEE, pg. 833 -838.

[130] B. O'Neill - "*Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*", Academic Press, New York, 1983.

[131] B. O'Neill - "*Fundamental equations of submersions*", Michigan Math. J. 39(1966), Kluwer, Dortrecht 1996, pg. 459-464.

[132] V. Oproiu - "*Almost Qaternal structures*", An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi 23 (1977), pg. 287-298.

[133] V. Oproiu - "*Integrability of almost quaternal structures*", An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi 30 (1984), pg. 75-84.

[134] V. Oproiu - "*Pontrjagin forms of quaternion manifolds*", Atti Accad. Naz. Lincei, VIII. Ser., Rend., Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 76(1984), pg. 19-27.

[135] V. Oproiu - "*Some remarkable structures and connexions defined on the tangent bundle*", Rend. Mat., VI. Ser. 6(1973), pg. 503-540.

[136] V. Oproiu, "*Harmonic maps between tangent bundles*", Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. Torino 47 (1989), pg. 47-55.

[137] L. Ornea, P. Piccini - "*Weyl structures on quaternionic manifolds*", Proceedings of the Meeting on Quaternionic Structures in Mathematics and Physics, Trieste 1994. SISSA, Trieste, pg. 261-267.

[138] L. Ornea, P. Piccini - "*Locally conformally Kähler structures in quaternionic geometry*", Trans. Amer. Math. Soc. 349, (1997), pg. 641-655.

[139] L. Ornea - "*Weyl structures on quaternionic manifolds. A state of the art*", Barletta, Elisabetta (ed.), Selected topics in geometry and mathematical physics. Vol. I. Potenza: Univ. degli Studi della Basilicata, Dipartimento di Matematica, Seminario Interdisciplinare di Matematica (2001), pg. 43-80.

[140] L. Ornea, L. Vanhecke - "*Harmonicity and minimality of vector fields and distributions on locally conformal Kähler and hyperKähler manifold*", Bull. of the Belgian Math. Soc. "Simon Stevin" 12 (2005), pg. 543-555.

[141] H. Pedersen, Y.S. Poon, A.F. Swann - "*Hypercomplex structures associated to quaternionic manifolds*", Differential Geometry and Its Applications, 9(1998), pg. 273-292.

[142] J.D. Perez, F.G. Santos - "*Indefinite quaternion space forms*", Ann. Mat. Pura Appl, 132(1982), pg. 383-398.

[143] Gh. Pitiş - "*Cohomology of antiquaternion submanifolds of a quaternion Kaehlerian manifold*", Tensor (N.S.), 42 (1985), pg. 145-150.

[144] Gh. Pitiş - "*Sur certaines sous-variétés d'une variété quaternionique*", Proceedings of the National Conference on Geometry and Topology, Târgoviote, 1986, pg. 227-230.

[145] Gh. Pitiş - "*On the totally geodesic anti-quaternion submanifolds of a quaternion Kaehlerian manifold*", Tensor (N.S.), 46 (1987), pg. 132-136.

[146] M.E. Pittelkau - "*An Analysis of the Quaternion Attitude Determination Filter*", The Journal of Astronautical Sciences, January - March, 2003, Vol. 51, No. 1.

[147] M. Pontecorvo - "*Complex structures on quaternionic manifolds*", Diff. Geom. Appl. 4(1992), pg. 163-177.

[148] B. Sahin, R. Güneş - "*Non-existence of real lightlike hypersurfaces of an indefinite complex space-form*", Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol. 5, No. 2, 2000, pg. 139-148.

[149] B. Sahin, R. Güneş - "*Lightlike real hypersurfaces of indefinite quaternion Kähler manifolds*", Journal of Geometry, 75(2002), pg. 151-163.

[150] S. Salamon - "*Quaternionic Kähler manifold*", Invent. Math. 67(1982), pg. 143-171.

[151] S. Salamon - "*Harmonic and holomorphic maps*", in Geometry Seminar "Luigi Bianchi" LNM 1164, Springer-Verlag, 1985, pg. 161-224.

[152] S. Salamon - "*Differential geometry of quaternionic manifold*", Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 90(1986), pg. 31-55.

[153] S. Salamon - "*Riemannian geometry and holonomy groups*", Pitman Research Notes in Mathematics, vol. 201, Longman Scientific, 1989.

[154] X. Senlin, N. Yilong - "*Submanifolds of product Riemannian manifolds*", Acta Mathematica Scientia (2000), 20(B), pg. 213-218.

[155] J. Shen - "*A Simple Quaternion Analysis of Selective Decoupling Pulses*", Journal of Magnetic Resonance-Series A, vol. 117, no. 1, Nov. 1995, pg. 98-102.

[156] B. Siciliano, L. Villani - "*Six-degree-of-freedom impedance robot control*", Advanced Robotics, 1997, pg. 387-392.

[157] P.B. Slater - "*Bayesian inference for complex and quaternionic two-level quantum systems*", Physica A, Vol. A223, Issue 1-2, 1996.

[158] T.E. Surber - "*On the Use of Quaternions to Describe the Angular Orientation of Space Vehicles*", Journal of the Aerospace Sciences, Vol. 28, No 1, 1961, pg. 1-2.

[159] A. Swann - "*HyperKähler and quaternionic Kähler manifolds*", Math. Ann. 289(1991), pg. 421-450.

[160] A. Swann - "*Some remarks on quaternion-hermitian manifolds*", Archivum Matematicum (Brno), Tomus 33(1997), pg. 319-351.

[161] S. Tachibana - "*Notes on Kaehlerian metrics with vanishing Bochner curvature tensor*", Kodai Math. Sem. Rep. 22 (1970), pg. 313-321.

[162] M. Tahara, Y. Watanabe - "*Natural almost Hermitian, Hermitian and Kähler metrics on the tangent bundles*", Math. J. Toyama Univ., 20 (1997), pg. 149-160.

[163] M. Tahara, L. Vanhecke, Y. Watanabe - "*New structures on tangent bundles*", Note Mat. 18, No.1(1998), pg. 131-141.

[164] M. Tahara, S. Marchiafava, Y. Watanabe - "*Quaternionic Kähler structures on the tangent bundle of a complex space form*", Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 31, No.1-2 (1999), pg.163-175.

[165] M. Takeuchi - "*Totally complex submanifolds of a quaternionic Kähler symmetric space*", Japan J. Math. 12(1986), pg. 161-189.

[166] G. Toth - "*Harmonic and minimal maps with applications in geometry and physics*", E. Horwood, 1984.

[167] C. Udrişte - "*Structures presque coquaternionnes*", Bull. Soc. Sc. Math. Roumanie, 12(1969), pg. 487-507.

[168] C. Udrişte - "*Coquaternion structures and almost coquaternion structures*" Math. Balk. 4(1974), pg. 635-642.

[169] C. Udrişte - "*Almost coquaternion metric structures on 3-dimensional manifolds*", Kodai Math. Semin. Rep. 26, 318-326 (1975).

[170] M. Verbitsky - "*Singularities in hyperkähler geometry*", Proceedings of the 2nd meeting on quaternionic structures in mathematics and physics, Roma, Italy, September 6-10, 1999, pg. 439-469.

[171] G.E. Vîlcu - "*A Schur-type theorem on an indefinite quaternionic Kähler manifold*", International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 2(2007), No. 11, pg. 529-536.

[172] G.E. Vîlcu - "*Product of paraquaternionic Kähler manifolds*", Bull. Math. Soc. Sc. Math. Roumanie, Tome 48(96), No. 3(2005), pg. 345-355.

[173] G.E. Vîlcu - "*Submanifolds of a paraquaternionic Kähler product manifold*", International Mathematical Forum, 2(2007), No. 15, pg. 735-746.

[174] G.E. Vîlcu - "*Some submersions of extrinsic hyperspheres of a Bochner-Kähler manifold*", Rendinconti del Circolo Matematico di Palermo, Vol 54 (2005), pg. 343-351.

[175] G.E. Vîlcu - "*QR 3-submersions*", preprint, 2006.

[176] S. Vukmirovic - "*Para-quaternionic reduction*", http/:xxx.lanl.gov, math.DG/03044424.

[177] B. Watson - "*δ-Commuting map and Betti numbers*", Tôhoku Math. J. 11(1975), pg. 132-152.

[178] B. Watson - "*Almost Contact Metric 3-Submersions*", Int. J. Math. Math. Sci., 7(1984), pg. 667 - 688.

[179] H. Weiss - "*Quaternion-Based Rate/Attitude Tracking System with Application to Gimbal Attitude Control*", Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No 4, 1993, pg. 609-616.

[180] J.C. Wilcox - "*A New Algorithm for Strapped-Down Inertial Navigation*", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 3, No 5, 1967, pg. 796-802.

[181] J.A. Wolf - "*Spaces of constant curvature*", Univ. California Press, Berkeley, 1972.

[182] H. Wu - "O*n the Rham decomposition theorem*", Illinois J. Math 8(1964), pg. 291-311.

[183] K. Yano, M. Kon - "*Submanifolds of Kaehlerian product manifolds*", Memorie Accademia Nazionale dei Lincei CCCLXXVI(1979), pg. 267-292.

[184] K. Yano, M. Ako - "*Almost quaternion structures of the second kind and almost tangent structures*", Kodai Math. Semin. Rep. 25 (1973), 63-94.

[185] K. Yano, M. Ako - "*Integrability conditions for almost quaternion structures*", Hokkaido Math. J. 1(1972), pg. 63-86.

[186] L. Ying-Cherng, J.C.K. Chou - "*Eight-space quaternion approach for robotic hand-eye calibration*", Systems, Man and Cybernetics, 4 (1995), pg. 3316 -332.