Notion de liaison sur une variété

Atallah Affane

Abstract

We introduce the concept of joining on a manifold which is neighbouring of that of connection. Then, we study the correlation between them to give some results about parallelism, geodesics and diffemophisms group of invariance.

M.S.C. 2000: 53B05, 53C05, 53C22, 58A05
Key words: Connection, geodesics, Lie transformations groups

§1. Introduction

Dans la littérature (voir par exemple [3]), la notion de connection a été introduite avec des approches différentes mais équivalentes par plusieurs mathématiciens (Cartan, Ehresman, Koszul,...). Ici, nous proposons une notion voisine, celle de liaison qui consiste intuitivement à connecter les fibres au dessus de tout couple de points voisins. Nous examinons aussi certaines corrélations entre les liaisons et les connections. Dans le paragraphe qui suit, on considère le cas général d'une liaison dans un fibré principal; une liaison induit de manière canonique une connection au sens d'Ehresman et le transport parallèle selon cette dernière se formule à l'aide de la liaison considérée. Le cas particulier des liaisons affines est l'objet du paragraphe 3; à partir d'une liaison affine on construit canoniquement une connection affine et réciproquement, cependant on constate que l'ensemble des liaisons est strictement plus grand que celui des connections. De plus, la condition pour une courbe d'être un géodésique d'une connection s'exprime à l'aide de n'importe quelle liaison qui induit cette connection. Enfin, on établit sous une hypothèse d'analyticité l'analogue d'un théorème de Nomizu; à savoir que les difféomorphismes qui conservent une liaison affine constituent un groupe de Lie de transformations.

§2. Liaisons dans un fibré principal

On se donne une variété M de dimension m et de classe C^∞ et soit G un groupe de Lie dont on note $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie et exp l'application exponentielle. Rappelons la définition [3] d'un fibré principal au dessus de M et de groupe structural G. C'est la donnée d'une variété P de classe C^∞ sur laquelle le groupe G opère à droite (on posera alors $p.a = R_a(p)\ \forall p \in P,\ \forall a \in G$) et d'une submersion $\pi : P \to M$ telle que

Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.3, No.1, 2001, pp. 1-11.

$\pi \circ R_a = \pi$, $\forall a \in G$. De plus, on exige une propriété de trivialité locale c'est à dire que pour tout point x de M, il existe un voisinage U et un C^∞ difféomorphisme Φ de $\pi^{-1}(U)$ dans $U \times G$ de la forme $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ et où φ vérifie $\varphi \circ R_a = R_a \circ \varphi$ pour tout a dans G (dans le membre de droite, R_a désigne la multiplication à droite par a dans G). Pour tout point x de M, on appelle fibre au dessus de x le sous ensemble $\pi^{-1}(x)$.

Une liaison dans un fibré principal sera intuitivement un moyen de relier de manière régulière les fibres au dessus de points voisins. Plus précisément, on introduit la

Définition 2.1 *Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de la variété M tel que le fibré principal P soit trivialisable au dessus de chaque U_i. On appelle liaison sur P subordonnée à $\mathcal{U}$ et on note $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ la donnée pour tout indice $i \in I$ et tout couple $(x, y) \in U_i \times U_i$ d'une bijection*

$$L_i(x, y) : \pi^{-1}(y) \to \pi^{-1}(x) \tag{1}$$

satisfaisant aux identités:

$$L_i(x, y) \circ R_a = R_a \circ L_i(x, y) \;\; \forall a \in G,\; x \in U_i,\; y \in U_i, \tag{2}$$

$$L_i(x, x) = Id_{\pi^{-1}(x)} \;\; \forall x \in U_i, \tag{3}$$

à la condition de recollement:

$$\text{tout point } z \in U_i \cap U_j \text{ possède un voisinage } W_z \subseteq U_i \cap U_j \text{ tel que} \tag{4}$$

$$L_i(x, y) = L_j(x, y) \;\; \forall (x, y) \in W_z \times W_z, \tag{5}$$

et à la condition de régularité suivante:

si $\Phi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ est une trivialisation de P de la forme $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$, alors l'application Φ_G définie de $U_i \times U_i \times G$ dans G par:

$$\Phi_G(x, y, a) = \varphi \circ L_i(x, y) \circ \Phi^{-1}(y, a) \tag{6}$$

est de classe C^∞.

Soit à présent $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ un second recouvrement et $\rho : \Lambda \to I$ une application de raffinement (ce qui signifie que $V_\lambda \subseteq U_{\rho(\lambda)}$ pour tout indice λ); on pose alors:

$$L_\lambda(x, y) = L_{\rho(\lambda)}(x, y) \;\; \forall \lambda \in \Lambda,\; x \in V_\lambda,\; y \in V_\lambda. \tag{7}$$

On obtient ainsi une liaison subordonnée au recouvrement $\mathcal{V}$ que l'on dira induite par la première.

Définition 2.2 *On identifie deux liaisons L et L' subordonnées respectivement aux recouvrements $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$' si et seulement si elles induisent la même liaison sur un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}$'. Une classe d'équivalence sera appelée liaison dans le fibré principal P.*

Cette notion est en étroite corrélation avec celle de connection au sens d'Ehresman [3] dont nous allons rappeler la définition. Tout d'abord pour $X \in \mathcal{G}$, on note $\sigma(X)$ le champ de vecteur de classe C^∞ défini sur P par $\sigma(X)(p) = \frac{d}{dt} p. \exp tX \mid_{t=0}$.

Définition 2.3 *Une connection dans le fibré principal P de groupe structural G est la donnée d'une 1-forme ω de classe C^∞ sur P, à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et vérifiant:*

$$\omega(\sigma(X)) = X, \ \ \forall X \in \mathcal{G} \tag{8}$$

$$\omega \circ R_{a*} = Ad(a^{-1}) \circ \omega, \ \ \forall a \in G. \tag{9}$$

Proposition 2.1 *Une liaison L induit de manière canonique une connection d'Ehresman EL.*

Preuve:

Soit $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ un représentant de L, u un point de P et un vecteur tangent $\xi \in P_u$. Choisissons un indice $i \in I$, une courbe $c :]-\varepsilon, \ +\varepsilon[\to U_i$ telle que $c(0) = u$ et $c'(0) = \xi$ et soit la courbe $\lambda :]-\varepsilon, \ +\varepsilon[\to G$ définie par $u.\lambda(t) = L_i(\pi(u), \pi(c(t))c(t)$. Si $\Phi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times G$ est une trivialisation de P de la forme $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$, on aura alors $\lambda(t) = \varphi(u)^{-1}\varphi[L_i(\pi(u), \pi(c(t))c(t)]$. Ainsi λ est une courbe dans G telle que $\lambda(0) = 1$ (élément neutre de G) et sa dérivée $\lambda'(0) \in \mathcal{G}$ apparait comme l'image de ξ par la différentielle de l'application qui à $v \in \pi^{-1}(U_i)$ associe $\varphi(u)^{-1}\varphi[L_i(\pi(u), \pi(v))v]$. Donc, en posant $\omega_u(\xi) = \lambda'(0)$, on définit une 1-forme différentielle sur P à valeurs dans $\mathcal{G}$ de classe C^∞et qui par construction ne dépend que de la liaison L.

Par ailleurs, pour $a \in G$, calculer $\omega_{u.a}(R_{a*}\xi)$ revient, d'après la formule (2) à dériver en $t = 0$ la fonction $Int(a^{-1})\lambda(t)$ et on obtient $Ad(a^{-1})\omega_u(\xi)$.

Enfin, pour $X \in \mathcal{G}$, la courbe $c(t) = u.\exp tX$ définit le vecteur tangent $\sigma(X)(u)$ et on obtient dans ce cas $\lambda(t) = \exp tX$, ce qui entraine $\omega_u(\sigma(X)) = X$. □

Le transport parallèle relativement à la connection induite par une liaison L s'exprime en fonction des bijections $L_i(x, y)$; en fait on a le

Théorème 2.1 *Soit $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ un représentant d'une liaison L et EL la connection induite. Considérons $\alpha : [0,1] \to M$ une courbe à valeurs dans un ouvert donné U_j, p_0 un point de $\pi^{-1}(\alpha(0))$ et $p_1 \in \pi^{-1}(\alpha(1))$ le point obtenu par transport parallèle de p_0 le long de la courbe α et relativement à la connection EL. Pour tout entier $r \geq 1$, considèrons la sudivision $u_k = \alpha(\frac{k}{r})$ $(k = 0, ..., r)$; on a alors:*

$$p_1 = \lim_{r\to\infty} L_j(u_r, u_{r-1}) \circ ... \circ L_j(u_1, u_0)p_0 \tag{10}$$

Preuve:

Pour éviter certaines lourdeurs, on supposera :

- quitte à réduire U_j et moyennant un système de coordonnées, que U_j est un ouvert U de $\mathbf{R}^m$ et on omettra l'indice j.
- par le théorème d'Ado [2], que le groupe structural G est un sous groupe d'un groupe de matrices $GL(N, R)$.

Rappelons d'après [3], qu'il existe une seule courbe $c : [0,1] \to \pi^{-1}(U)$ telle que $\pi \circ c = \alpha,\ c(0) = p_0$ et satisfaisant la condition dite d'horizontalité:

$$\omega_{c(t)} c'(t) = 0 \ \ \forall t \in [0,1]. \tag{11}$$

Par définition du transport parallèle, on a $p_1 = c(1)$.

Soit $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ une trivialisation de P de la forme $\Phi(p) = (\pi(p), \varphi(p))$ et $A : U \times U \to G$ l'application définie par $A(x,y) = \Phi_G(x,y,1)$; l' identité (3) se traduit par la formule:

$$A(x,x) = 1 \ \ \forall x \in U, \tag{12}$$

qui donne après derivation:

$$\frac{\partial A_j^k(u,y)}{\partial y^l} \mid_{y=u} = -\frac{\partial A_j^k(x,u)}{\partial x^l} \mid_{x=u} \ \ \forall k,j = 1,...,N,\ \forall l = 1,...,m \tag{13}$$

Posons $\beta = \varphi \circ c$, la condition d'horizontalité (11) devient:

$$\frac{d}{ds} A(\alpha(t), \alpha(t+s))\beta(t+s) \mid_{s=0} = 0 \ \ \forall t \in [0,1] \tag{14}$$

et ainsi β n'est alors autre que la solution du problème de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{d\beta_h^k}{dt} + \Gamma_{l,j}^k \frac{d\alpha^l}{dt} \beta_h^j &= 0 \qquad k,h = 1,...,N \\ \beta(0) &= \varphi(p_0) \end{aligned} \tag{15}$$

avec la convention $\Gamma_{l,j}^k(u) = \dfrac{\partial A_j^k(u,y)}{\partial y^l} \mid_{y=u}$ pour tout u dans U.

Posons enfin

$$\beta_r = \varphi \circ L(u_r, u_{r-1}) \circ ... \circ L(u_1, u_0)p_0 \text{ et } B(r) = A(u_r, u_{r-1})...A(u_1, u_0); \tag{16}$$

par construction on obtient:

$$\beta_r = B(r)\varphi(p_0) \tag{17}$$

et tout revient à prouver que:

$$\lim_{r \to \infty} \beta_r = \beta(1) \tag{18}$$

Le développement de Taylor de la fonction $A(x, u_s)$ au point u_s donne

$$A(u_{s+1}, u_s) = 1 + H(s) + K(s) \ \ \forall s = 0,...,r-1 \tag{19}$$

avec d'après la formule (13)

$$H_j^k(s) = -\Gamma_{ij}^k(u_s)(u_{s+1}^i - u_s^i) \tag{20}$$

et

$$(21)\ K_j^k(s) = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^2 A_j^k(x,u_s)}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} |_{x=u_s+t(u_{s+1}-u_s)}\ (u_{s+1}^\lambda - u_s^\lambda)(u_{s+1}^\mu - u_s^\mu)dt.$$

Par la compacité de la courbe α et le théorème des accroissements finis, il existe une constante $C \succ 0$ telle que:

$$(22) \qquad \|H(s)\| \leq \frac{C}{r}\ \ et\ \ \|K(s)\| \leq \frac{C}{r^2}\ \ \forall r \geq 1\ et\ s = 0,...,r-1.$$

et

$$(23) \qquad \left| u_{s+1} - u_s - \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dt}(\frac{s}{r}) \right| \leq \frac{C}{r^2}\ \ \forall r \geq 1\ et\ s = 0,...,r-1.$$

On introduit les matrices carrée $(N \times N)$ dont les coéfficients sont:

$$(24) \qquad \begin{aligned} Q_j^k(s) &= -\tfrac{1}{r}\Gamma_{ij}^k(u_s)\tfrac{d\alpha^i}{dt}(\tfrac{s}{r}) \text{ et } T_j^k(s) = \\ &= -\Gamma_{ij}^k(u_s)(u_{s+1}^i - u_s^i - \tfrac{1}{r}\tfrac{d\alpha^i}{dt}(\tfrac{s}{r})) + K_j^k(s). \end{aligned}$$

Ces matrices vérifient les inégalités:

$$(25) \qquad \|Q(s)\| \leq \frac{C}{r}\ \text{ et }\ \|T(s)\| \leq \frac{C}{r^2}\ \ \forall r \geq 1 \text{ et } s = 0,...,r-1.$$

et les identités:

$$(26) \qquad A(u_{s+1}, u_s) = 1 + Q(s) + T(s)$$

On va montrer que:

$$(27) \qquad B(r) = (1 + Q(r-1))...(1 + Q(0)) + S(r) \text{ avec } \lim_{r\to\infty} S(r) = 0.$$

En effet, puisque les matrices constituent un anneau, on a:

$$(28) \qquad \begin{aligned} B(r) &= 1 + \sum_{s=0}^{r-1} Q(s) + \sum_{s=0}^{r-1} T(s) + \\ &+ \sum_{k=2}^{r} \sum_{0 \leq i_1 \prec ... \prec i_k \preceq r-1} (Q(i_k) + T(i_k))...(Q(i_1) + T(i_1)) \end{aligned}$$

et chaque terme de la double somme s'écrit $Q(i_k)...Q(i_1) + S(i_1,...,i_k)$ où $S(i_1,...,i_k)$ est une somme de $(2^k - 1)$ matrices chacune étant majorée en norme, d'après les inégalités (25), par $\frac{1}{r}(\frac{C}{r})^k$ pour $r \geq \frac{1}{C}$. Ainsi on obtient $\|S(i_1,...,i_k)\| \leq \frac{1}{r}(\frac{2C}{r})^k$. En regroupant convenablement les termes dans la formule (28), on obtient la formule (27) avec:

$$(29) \qquad S(r) = \sum_{s=0}^{r-1} T(s) + \sum_{k=2}^{r} \sum_{0 \leq i_1 \prec ... \prec i_k \preceq r-1} S(i_1,...,i_k).$$

Toujours, d'après (25), la norme de la première somme est majorée par C/r tandis que celle de la seconde l'est par $\frac{1}{r}(1+\frac{2C}{r})^r$, ce qui assure que $\lim_{r\to\infty} S(r) = 0$.

Revenons maintenant au problème de Cauchy (15). Par la théorie générale des systèmes différentiels linéaires, la suite des lignes polygonales ψ_r définies par:

$$(30)\quad \begin{array}{lll} \psi^k_{rh}(t) = & \varphi^k_h(p_0) - t\Gamma^k_{ij}(u_0)\frac{d\alpha^i}{dt}(0)\varphi^j_h(p_0) & \text{sur } [0,\frac{1}{r}] \\ \psi^k_{rh}(t) = & \psi^k_{rh}(\frac{1}{r}) - (t-\frac{1}{r})\Gamma^k_{ij}(u_1)\frac{d\alpha^i}{dt}(\frac{1}{r})\psi^j_{rh}(\frac{1}{r}) & \text{sur } [\frac{1}{r},\frac{2}{r}] \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \psi^k_{rh}(t) = & \psi^k_{rh}(\frac{r-1}{r}) - (t-\frac{r-1}{r})\Gamma^k_{ij}(u_{r-1})\frac{d\alpha^i}{dt}(\frac{r-1}{r})\psi^j_{rh}(\frac{r-1}{r}) & \text{sur } [\frac{r-1}{r},1] \end{array}$$

$$(31)\qquad k,h = 1,\ldots,N.$$

converge vers l'unique solution. Comme on a par construction des matrices $Q(s)$

$$(32)\qquad \psi_r(1) = (1+Q(r-1))\ldots(1+Q(0))\varphi(p_0)$$

la proposition résulte de la formule (27). □

Proposition 2.2 *A une connection d'Ehresman E dans le fibré principal P et une connection affine ∇, on associe de manière canonique une liaison dans P.*

Preuve:

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de la variété M par des ouverts ∇-convexes; pour $x \in U_i$ et $y \in U_i$ on définit $L_i(x,y)$ par le transport parallèle relativement à E et le long de l'unique ∇-géodésique contenu dans U_i et reliant x à y. Les résultats classiques d'existence, d'unicité et de dépendance des valeurs initiales pour les équations différentielles ordinaires assurent que l'on obtient ainsi une liaison $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$. De plus, le fait que tout point de M possède une base de voisinages ∇-convexes implique que la classe de $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ ne dépend pas du recouvrement $\mathcal{U}$. □

§3. Liaisons affines

On parle de liaison affine lorsque le fibré principal en question est celui des repères. Cependant, on va introduire une définition équivalente qui se rapproche davantage de la notion de connection affine au sens de Koszul telle que développée dans [3].

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement de la variété M par des domaines de cartes. Une liaison $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ subordonnée à ce recouvrement est la donnée pour tout indice $i \in I$ et tout couple $(x,y) \in U_i \times U_i$ d'un isomorphisme d'espaces vectoriels $L_i(x,y)$: $M_y \to M_x$ de sorte que:

- $L_i(x,x) = 1$ pour tout x dans U_i.
- Tout point z de $U_i \frown U_j$ possède un voisinage $W \subseteq U_i \frown U_j$ tel que:

$$(33)\qquad L_i(x,y) = L_j(x,y) \;\; \forall (x,y) \in W \times W.$$

- Si $\{x^h\}_{h=1}^m$est un système de coordonnées sur un ouvert U_i, alors l'application $A : U_i \times U_i \to GL(m, R)$ définie par $L_i(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^k} = A_k^j(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ est de classe C^∞.

  (On dira que la matrice A représente la liaison dans le système de coordonnées $\{x^h\}_{h=1}^m$. Lorsqu'on impose à la variété considérée et à ces matrices d'être analytiques, on dira que la liaison $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ est analytique.

Par passage à la limite inductive sur les recouvrements de plus en plus fins, on définit une liaison affine comme classe d'équivalence de liaisons affines subordonnées à des recouvrements. La notion de liaison affine analytique s'obtient de manière analogue.

Proposition 3.3 *Une liaison affine L induit une connection affine $\nabla(L)$.*

Preuve:
En effet, si $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ est un représentant de L, X, Y deux champs de vecteurs, u un point de l'ouvert U_i, α une courbe telle que $\alpha(0) = u$ et $\alpha'(0) = X(u)$, le vecteur:

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[L_i(u,\alpha(s))Y(\alpha(s)) - Y(u)] \tag{34}$$

ne dépend que de la liaison L, de u, de $X(u)$ et de Y. En posant:

$$\nabla_X Y(u) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[L_i(u,\alpha(s))Y(\alpha(s)) - Y(u)] \tag{35}$$

on définit une connection affine. □

Proposition 3.4 *Soit A la matrice représentant la liaison affine $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ et Γ_{ij}^k les symboles de Christoffel de la connection induite ∇ dans un système de coordonnées $\{x^h\}_{h=1}^m$sur un ouvert U_j. On a alors:*

$$\Gamma_{ij}^k(u) = \frac{\partial A_j^k}{\partial y^i}(u,y)\mid_{y=u} = -\frac{\partial A_j^k}{\partial x^i}(x,u)\mid_{x=u}. \tag{36}$$

Preuve:
La première égalité résulte de la définition des symboles de Christoffel et la seconde s'obtient en dérivant l'identité $A(u,u) = 1$. □

Proposition 3.5 *A une connection affine ∇, on associe de manière canonique une liaison affine $L(\nabla)$. On a alors $\nabla(L(\nabla)) = \nabla$.*

Preuve:
La liaison $L(\nabla)$ se construit comme dans la proposition 2.2 par transport parallèle le long de géodésiques. L'identité $\nabla(L(\nabla)) = \nabla$ résulte de l'expression d'une connection affine en fonction de son transport parallèle (voir par exemple [3] page 6-11). □

Corollaire 3.1 *i) Le procédé qui à une connection affine associe une liaison affine est injectif mais non surjectif.*
ii) Deux liaisons affines différentes peuvent induire la même connection affine.
iii) Toute connection affine est induite par une liaison affine.

Preuve:
i) La première partie résulte de la proposition précédente. Pour la seconde, on considère l'exemple où $M = R^m$ et où le fibré tangent est identifié à $R^m \times R^m$. Soit sur $M \times M$ la fonction $\Psi(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{m}(x^k - y^k)^3$ et la liaison L définie par $L(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^r} = e^{\Psi(x,y)}\dfrac{\partial}{\partial x^r}$. Un calcul direct donne que:

- $\nabla(L)$ est la connection affine $\overline{\nabla}$ définie par $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\dfrac{\partial}{\partial x^l} = 0 \;\; k,l = 1,...,m.$
- $L(\overline{\nabla})$ est la liaison affine $\overline{L}$ définie par $\overline{L}(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^r} = \dfrac{\partial}{\partial x^r} \;\; r = 1,...,m$

La liaison L ne provient d'aucune connection. En effet, toujours d'après la proposition précédente, si $L = L(\nabla)$ on aurait nécéssairement $\nabla = \overline{\nabla}$ et donc $L = \overline{L}$ ce qui est manifestement inexact.
ii) Il suffit de prendre les liaisons L et $\overline{L}$.
iii) Provient de la proposition précédente. □

Ainsi, dans un certain sens, l'ensemble des liaisons affines est plus grand que celui des connections affines. Cependant, la condition pour une courbe d'être un géodésique pour une connection affine s'exprime à l'aide de toute liaison affine qui induit cette connection. En effet on a le:

Théorème 3.2 *Soit $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ une liaison affine, $j \in I$ et $\alpha :]-1,+1[\to U_j$ une courbe; alors les deux assertions suivantes sont équivalentes.*
i) α est un géodésique pour la connection affine $\nabla(L)$.
ii) Pour tout s dans $]-1,+1[$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha'(t) = L_j(\alpha(t),\alpha(s))\alpha'(s)$ pour tout t dans $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$.

Preuve:
i) $\Longrightarrow$ *ii)* Supposons que la courbe α soit un $\nabla(L)-$géodésique. Soit $s \in]-1,+1[$ et ξ le champ de vecteur défini le long de la courbe α par $\xi(\alpha(t)) = L_j(\alpha(t),\alpha(s))\alpha'(s)$. Choisissons, au voisinage de $\alpha(s)$, un système de coordonnées de Riemann $\{x^h\}_{h=1}^m$ de sorte que la courbe α corresponde à la droite $(s+t, 0, ..., 0)$; il existe $\varepsilon > 0$ tel que:

$$\Gamma_{11}^k(\alpha(t)) = 0 \;\; \forall t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[, \; \forall k = 1,...,m. \tag{37}$$

Notons A la matrice représentant la liaison, $\{\xi^j(t)\}_{j=1}^m$ les composantes de $\xi(\alpha(t))$ et $\{a^j(t)\}_{j=1}^m$ les composantes de $\alpha'(t)$ dans ce système de coordonnées. On a alors

$$\xi^j(t) = A_1^j(\alpha(t),\alpha(s)) \;\; \forall t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\tag{38}$$

et

$$\frac{da^j}{dt}(t) = 0 \;\; \forall j = 1, ..., m \text{ et } t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\tag{39}$$

Dérivons par rapport à t, au point $t = s$ la formule (38); il vient en tenant compte de la Proposition 3.2 et de l'identité (37)

$$\frac{d\xi^j}{dt} = -\Gamma^j_{11}(\alpha(t)) = 0 \;\; \forall j = 1, ..., m \text{ et } t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[\tag{40}$$

ce qui entraine que $\xi(\alpha(t)) = \alpha'(t)$ pour tout t dans $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$.
ii) $\Longrightarrow$ *i)* Dans un système de coordonnées $\{x^h\}_{h=1}^m$ sur l'ouvert U_j, soit A la matrice représentant la liaison et $\{a^j(t)\}_{j=1}^m$ les composantes de $\alpha'(t)$; on a alors les identités:

$$a^j(t) = A^j_k(\alpha(t), \alpha(s))a^k(s) \;\; \forall t \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[. \tag{41}$$

Dérivons ces identités par rapport à t au point $t = s$, on obtient en utilisant la proposition 3.2:

$$\frac{da^j}{dt}(s) = -\Gamma^j_{ik}(\alpha(s))a^i(s)a^k(s) \;\; \forall s \in]-1, +1[\tag{42}$$

ce qui signifie que la courbe α est un géodésique pour la connection $\nabla(L)$.

Etant donnée une liaison affine L et un difféomorphisme f de classe C^∞, on peut construire l'image direct f_*L de L par f. Pour ce faire, si $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ est un représentant de L, on définit une nouvelle liaison $\{f(U_i), f_*L_i\}_{i\in I}$ subordonnée au recouvrement $\{f(U_i)\}_{i\in I}$ en posant pour x, y dans $f(U_i)$ et ξ dans M_y

$$f_*L_i(x,y)\xi = f_*[L_i(f^{-1}(x), f^{-1}(y))f_*^{-1}\xi]. \tag{43}$$

On vérifie sans peine que la classe de $\{f(U_i), f_*L_i\}_{i\in I}$ ne dépend que de la liaison L et on la note f_*L. Ceci nous amène à considérer le groupe

$$\mathcal{L}(M) = \{f \in Diff^\infty(M) \;/\; f_*L = L\}. \tag{44}$$

D'après simplement les définitions, $\mathcal{L}(M)$ est un sous groupe du groupe $A(M)$ des transformations qui laisse invariante la connection affine $\nabla(L)$. Notons que $\mathcal{L}(M)$ peut être un sous-groupe propre de $A(M)$ comme le montre l'exemple suivant. Soit $||.||$ la norme euclidienne de R^2, et considérons sur $M = R^2$ la liaison affine définie par

$$L(x,y)\frac{\partial}{\partial x^i} = A^j_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

A étant l'application de $M \times M$ à valeurs dans $GL(2, R)$ donnée par:

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + ||x-y||^2 & -||x-y||^2 \\ ||x-y||^2 & 1 + ||x-y||^2 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

La Proposition 3.2 donne que la connection affine induite par cette liaison vérifie:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} = 0 \;\; k, l = 1, 2 \tag{46}$$

et alors $A(M)$ est constitué des transformations de la forme $f(x) = S.x + b$ avec $S \in GL(2, R)$ et $b \in R^2$. Mais pour qu'une telle transformation soit dans $\mathcal{L}(M)$ il faut que

$$A(x,y) \equiv SA(S^{-1}x, S^{-1}y)S^{-1}, \tag{47}$$

ce qui implique $trA(x,y) \equiv trA(S^{-1}x, S^{-1}y)$ et par la suite $S \in O(2, R)$.

Réciproquement, $SO(2, R)$ étant commutatif, toute rotation S satisfait à (47). En conclusion, $\mathcal{L}(M)$ se réduit au groupe des transformations de la forme $f(x) = S.x + b$ avec $S \in SO(2, R)$ et $b \in R^2$.

Par un théorème dû à Nomizu [1], les difféomorphismes affines constituent un groupe de Lie de transformations. Dans ce qui suit, on propose un résultat analogue pour les liaisons affines analytiques.

Théorème 3.3 *Etant donnée une liaison affine analytique L sur une variété M, $\mathcal{L}(M)$ est un groupe de Lie de transformations.*

Preuve:

Il suffit, d'après un théorème bien connu de Cartan [3], de montrer que $\mathcal{L}(M)$ est fermé dans $A(M)$. Mais pour celà, précisons auparavant la topologie de $A(M)$. On sait par la démonstration du théorème de Nomizu [1] qu'une connection affine ∇ induit une métrique riemannienne g_∇ sur le fibré des repères $F(M)$ et notons $I(g_\nabla)$ le groupe des isométries de cette métrique. D'après le théorème de Myers-Steenrod [1] $I(g_\nabla)$ est un groupe de Lie de transformations pour la topologie compact-ouvert de $F(M)$. Par ailleurs la correspondance qui à $f \in A(M)$ associe son prolongement naturel $\widetilde{f}$ sur $F(M)$ fait de $A(M)$ un sous-groupe fermé dans $I(g_\nabla)$. Ainsi, la convergence dans $A(M)$ est celle de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de leurs dérivées.

D'autre part, l'analyticité de L entraine celle de $\nabla(L)$ et donc $A(M)$ est constitué d'applications analytiques puisque toute transformation affine échange les géodésiques.

Considérons donc une suite $\{f_n\}$ contenue dans $\mathcal{L}(M)$ convergente dans $A(M)$ vers une transformation f et montrons que f appartient à $\mathcal{L}(M)$. Soit $\{U_i, L_i\}_{i\in I}$ un représentant de la liaison L, deux indices i et j et un point p de M situé dans $U_i \frown f(U_j)$. Soit un voisinage compact connexe K de p contenu dans $U_i \frown f(U_j)$; comme la suite $\{f_n^{-1}\}$ converge pour la topologie compact-ouvert de M vers f^{-1}, il existe un entier n_0 tel que $K \subseteq U_i \frown f_n(U_j)$ pour $n \geq n_0$. Par hypothèse, il existe pour tout $n \geq n_0$ un voisinage W_n de p tel que:

$$L_i(x,y)\xi = f_{n*}[L_j(f_n^{-1}(x), f_n^{-1}(y))f_{n*}^{-1}\xi],$$

$$\forall x \in W_n,\ y \in W_n \text{ et } \xi \in M_y.$$

Puisque K est connexe et f_n analytique par le lemme précédent, on aura par l'unicité du prolongement analytique:

$$L_i(x,y)\xi = f_{n*}[L_j(f_n^{-1}(x), f_n^{-1}(y))f_{n*}^{-1}\xi],$$

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in K,\ y \in K \text{ et } \xi \in M_y.$$

Or par définition de la convergence dans $A(M)$,on peut passer à la limite pour prouver que tout point $p \in U_i \frown f(U_j)$ possède un voisinage $K \subseteq U_i \frown f(U_j)$ tel que:

$$L_i(x,y)\xi = f_*[L_j(f^{-1}(x), f^{-1}(y))f_*^{-1}\xi],$$

$$\forall x \in K,\ y \in K \text{ et } \xi \in M_y,$$

ce qui signifie que $f_*L = L$. □

References

[1] H. Chu, S. Kobayashi, *The automorphism group of a geometric structure.* Trans. Amer. Math. Soc., 113 (1964), 141-150.

[2] M. Postnikov, *Leçons de Géométrie, Groupes et Algèbres de Lie*, Edition Mir, Moscou, 1985.

[3] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol II, Brandeis University, 1970.

Author's address:

Atallah Affane
Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B,
B.P. 32 El Alia. Bab Ezzouar, ALGER
Email: atallahaffane@hotmail.com