Extrémums des carrés de longueurs des champs transverses d'un feuilletage Riemannien

Mohamed A. Chaouch

Abstract. L'origine de cette recherche scientifique est les travaux de C. Udriste [26], [27] sur les points extrémums des carrés de longueurs de certains champs de vecteurs. On se propose ici d'étendre ses résultats au cas d'un feuilletage riemannien. Alors nous étudions les propriétés de certains champs transverses et les extrémums des carrés de leurs longueurs. Mais cela nous a conduit à regarder en premier lieu les propriétés des fonctions basiques et d'un certain opérateur sur le fibré normal.

M.S.C. 2000: 53C12, 57R30
Key words: Feuilletage Riemannien, feuilletage minimal, courbure de Ricci, courbure sectionnelle, fonction basique.

1 Introduction

Dans [26] l'auteur donne quelques résultats sur les points extrémums des carrés de longueurs de certains champs de vecteurs sur une variété riemannienne. Dans le présent travail nous suivons son idée générale pour donner une version feuilletée de son travail. Alors on se donne une variété riemannienne munie d'un feuilletage riemannien et nous étudions les propriétés de certains champs de vecteurs transverses et les extrémums des fonctions basiques données par les carrés de leurs longueurs. Les définitions et les résultats qu'on présente ici sont considérés comme une version feuilletée du classique au cas d'un feuilletage riemannien. Ce travail est divisé en cinq parties. La partie 2 est consacrée aux préliminaires dont nous aurons besoin tout au long de ce travail. Dans la section 3 nous donnons quelques exemples de feuilletages. Dans le par 4 on introduit un opérateur sur le fibré normal du feuilletage mesurant la déviation d'un champ transverse d'être affine transverse. Nous dégageons ses propriétés, puis nous donnons quelques formules intégrales.

Le par 5 est réservé à l'étude des propriétés des fonctions basiques. On définit d'abord le gradient, le hessien et le laplacien d'une fonction basique via la connexion basique associée au feuilletage. Nous donnons une version feuilletée de quelques formules classiques. Par la suite on détermine la nature des points critiques et des extrémums d'une fonction basique. On finit la section par l'étude des propriétés

Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol.11, 2009, pp. 54-94.

d'une fonction basique transversalement convexe. On donne une version feuilletée de quelques résultats de [4].

Le par 6 renferme les résultats essentiels de ce papier. Alors on rappelle les définitions des champs transverses, isométriques (de Killing) , harmoniques, conformes, de Jacobi, concourant, et affines. Nous étudions les propriétés de chacun de ces champs transverses ainsi que les extrémums des carrés de leurs longueurs. Au fur et à mesure, nous rappelons quelques résultats parus dans ce sujet.

Dans toute la suite du texte, les feuilletages que l'on considère sont supposés orientables et transversalement orientables. Ce qui donne évidemment une orientation à la variété. Finalement, nous travaillons dans la catégorie des objets C^∞.

2 Préliminaire

2.1 Connexion basique

Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension n munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension q. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est donné par un sous fibré intégrable E du fibré tangent TM de M. Soit $E^\perp$ le sous fibré de TM orthogonal à E via la métrique g_M et $Q = TM/E$ le fibré normal à $\mathcal{F}$. Le fibré TM (resp la métrique g_M) est une somme directe $TM = E \oplus E^\perp$ (resp $g_M = g_E \oplus g_{E^\perp}$) et nous avons donc une application $\sigma : Q \longrightarrow E^\perp \subset TM$ scindant la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow TM \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0.$$

Si l'on pose $g_Q = \sigma^* g_{E^\perp}$, alors l'application $\sigma : (Q, g_Q) \longrightarrow (E^\perp, g_{E^\perp})$ devient une isomérie de fibrés.

Soient U une partie de M et L un fibré au dessus de M. On désigne par $\Gamma(L)$ (resp $(\Gamma(U, L))$ l'ensemble des sections de L au dessus de M (resp U).

Si ∇^M désigne la connexion de Levi Civita induite de g_M, alors on note par ∇ la connexion basique sur Q définie par

$$\nabla_X \nu = \begin{cases} \pi([X, Z_\nu]) & \text{pour tout } X \in \Gamma(E) \quad \text{et} \quad \nu \in \Gamma(Q), \\ \pi(\nabla^M_X Z_\nu) & \text{pour tout } X \in \Gamma(E^\perp), \end{cases}$$

où $Z_\nu = \sigma(\nu) \in \Gamma(E^\perp)$.

Soient $X, Y \in \Gamma(TM)$ et $\nu \in \Gamma(Q)$. La *torsion* T_∇ et *la courbure* R_∇ de ∇ sont respectivement données par

$$T_\nabla(X, Y) = \nabla_X \pi(Y) - \nabla_Y \pi(X) - \pi([X, Y]) \qquad \text{et}$$

$$R_\nabla(X, Y)\nu = \nabla_X \nabla_Y \nu - \nabla_Y \nabla_X \nu - \nabla_{[X,Y]}\nu.$$

La connexion ∇ possède les propriétés suivantes (voir [24]):
- elle est sans torsion, i.e., $T_\nabla = 0$,
- $R_\nabla(X, Y) = 0$ pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$,
- $\nabla_{/E^\perp}$ est métrique, i.e., $\nabla_Z g_Q = 0$ pour tout $Z \in \Gamma(E^\perp)$.

Posons $\nabla^2_{X,Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\sigma(\nabla_X \pi(Y))}$ et $\widetilde{\nabla}^2_{X,Y} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{\nabla^M_X Y}$, alors on a

$$R_\nabla(X,Y) = \widetilde{\nabla}^2_{X,Y} - \widetilde{\nabla}^2_{Y,X} = \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X} + \nabla_Z \tag{2.1}$$

oú $Z = [X,Y] - \sigma \circ \pi[X,Y] \in \Gamma(E)$.

2.2 Notation

Dans toute la suite de ce texte, la famille $(E_i)_{1 \le i \le n}$ désigne un repère orthonormé local de TM adapté au feuilletage $\mathcal{F}$ défini sur un voisinage distingué U. C'est à dire que $E_i \in \Gamma(U,E)$ pour $1 \le i \le p$ et $E_i \in \Gamma(U, E^\perp)$ pour $p+1 \le i \le n$, où $p+q=n$. Soit $e_i = \pi(E_i)$, $p+1 \le i \le n$. La famille $(e_i)_{p+1 \le i \le n}$ est un repère orthonormé local de Q vérifiant $\sigma(e_i) = E_i$.

Pour simplifier le texte, nous adoptons les notations suivantes. Pour $X \in \Gamma(T(M))$ et $\nu \in \Gamma(Q)$ on pose

$$\|\nu\|^2_Q = g_Q(\nu,\nu) \qquad \text{et} \quad tr\nabla^2\nu = \sum_{i=p+1}^{n} \nabla^2_{E_i,E_i}\nu.$$

Soit $End(Q)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de Q. Alors $End(Q)$ s'identifie à $Q^{1,1}$ l'espace des tenseurs de type (1,1) sur Q. Pour $T \in End(Q)$, la trace trT est définie par

$$trT = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(T(e_i), e_i).$$

Nous considèrons sur $End(Q)$ le produit scalaire suivant: soient $S,T \in End(Q)$ et T^* l'adjoint de T via g_Q,

$$\langle S,T\rangle = tr(T^* \circ S) = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(S(e_i), T(e_i)). \tag{2.2}$$

En particulier on a

$$|T|^2 = \langle T,T\rangle = tr(T^* \circ T) = \sum_{i=p+1}^{n} \|T(e_i)\|^2_Q. \tag{2.3}$$

Soit B une forme bilinéaire sur Q et soit T l'endomorphisme associé via g_Q. On pose

$$trB = trT \qquad \text{et} \quad |B| = |T|.$$

On vérifie que l'on a les conditions suivantes:

a) Si $|A_X|^2 = 0$, alors $A_X = \nabla\eta = 0$ et ceci signifie que η est parallèle.

b) Si $T \in End(Q)$, alors on a

$$|trT|^2 \le q|T|^2. \tag{2.4}$$

c) Si l'endomorphisme T est antisymétrique via g_Q, alors $trT = -trT = 0$.

d) Si l'endomorphisme T est auto-adjoint (resp antisymétrique) via g_Q, alors

$$trT^2 = |T|^2, \qquad (\text{resp} \quad trT^2 = -|T|^2). \tag{2.5}$$

2.3 Feuilletage minimal et feuilletage Riemannien

Pour les notations et les détails, on se réfère à [24] et [13]. La deuxième forme fondamentale du feuilletage $\mathcal{F}$ est la forme bilinéaire symétrique α sur M à valeur dans Q définie par

$$\alpha(X,Y) = -(\nabla\pi)(X,Y) = \pi(\nabla^M_X Y) - \nabla_X \pi(Y) \qquad \text{pour tous } X,Y \in \Gamma(TM).$$

Le champ de vecteur *tension* τ du feuilletage $\mathcal{F}$ est défini par

$$\tau = tr\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i) = \pi(\sum_{i=1}^{p} \nabla^M_{E_i} E_i).$$

Soit $\nu \in \Gamma(Q)$. Comme dans le cas classique, on définit l'opérateur divergence transverse div_∇ relativement à ∇ par

$$div_\nabla \nu = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(\nabla_{E_i}\nu, e_i).$$

Soit ∇^M la connexion de Levi-Civita induite de la métrique g_M. Si div_M désigne l'opérateur divergence classique relatif à la connexion ∇^M, il est facile de voir que l'on a

$$div_M \sigma(\nu) = div_\nabla \nu - g_Q(\tau, \nu) \qquad \text{pour tout} \quad \nu \in \Gamma(Q). \tag{2.6}$$

On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est *minimal* (ou *harmonique*) (resp *totalement géodésique*) si toutes ses feuilles sont des sous variétés minimales (resp géodésiques) de M.

Proposition 2.1. *[24] Le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal (resp totalement géodésique) si et seulement si $\tau = 0$ (resp $\alpha(X,Y) = 0$, pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$).*

On dit qu'une section $X \in \Gamma(TM)$ est un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ ou encore un champ feuilleté si le crochet $[X,Y] \in \Gamma(E)$ pour tout $Y \in \Gamma(E)$. On désigne par $\mathcal{V}(\mathcal{F})$ l'espace de tous les champs feuilletés. Il est clair que l'on a $\Gamma(E) \subset \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, alors $\eta = \pi(X)$ est appelé champ transverse.

Fixons $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. L'opérateur de dérivée de Lie $\Theta(X)$ agit sur $\Gamma(Q)$ par

$$\Theta(X)\nu = \pi[X, \sigma(\nu)].$$

Il est clair que si η est un champ transverse, alors pour tout $Y \in \Gamma(E)$ on a $\Theta(Y)\eta = \nabla_Y \eta = 0$. Dans ce cas on dit que η est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{F}$.

D'autre part $\Theta(X)$ agit aussi sur le tenseur métrique g_Q par

$$(\Theta(X)g_Q)(\mu,\nu) = X.g_Q(\mu,\nu) - g_Q(\pi[X,\sigma(\mu)],\nu) - g_Q(\mu,\pi[X,\sigma(\nu)]).$$

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit g_M-*Riemannien* si la métrique g_M est *quasi-fibrée* (bundle like au sens de Reinhart) via $\mathcal{F}$, c'est à dire que

$$(\Theta(X)g_M)(Y,Z) = 0 \qquad \text{pour tous} \quad X \in \Gamma(E) \quad \text{et} \quad Y, Z \in \Gamma(E^\perp).$$

Alors dans ce cas $\Theta(X)g_Q = \nabla_X g_Q = 0$ pour tout $X \in \Gamma(E)$, et on dit que la métrique g_Q est invariant par holonomie ou parallèle le long des feuilles de $\mathcal{F}$. De plus la courbure R_∇ est semi-basique (ie $i_X R = 0$ pour tout $X \in \Gamma(E)$). Par conséquent R_∇ induit un tenseur noté encore R_∇ de type (1,3) défini par

$$R_\nabla(\mu,\nu)\eta = R_\nabla(\sigma(\mu),\sigma(\nu))\eta \qquad \text{pour tous} \quad \mu,\nu \quad \text{et} \quad \eta \in \Gamma(Q).$$

D'après (2.1) on a

$$R_\nabla(\mu,\nu) = \nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(\nu)} - \nabla^2_{\sigma(\nu),\sigma(\mu)} - \nabla_Z \qquad Z \in \Gamma(E). \tag{2.7}$$

Comme dans le cas classique on montre que R_∇ vérifie la première identité de Bianchi et que l'on a la formule suivante (voir [24] page 54):

$$\begin{aligned} 2g_Q(\nabla_Z\mu,\nu) &= Zg_Q(\mu,\nu) + \sigma(\mu)g_Q(\pi(Z),\nu) - \sigma(\nu)g_Q(\pi(Z),\mu) \\ &+ g_Q(\pi[Z,\sigma(\mu)],\nu) + g_Q(\pi[\sigma(\nu),Z],\mu) \\ &- g_Q(\pi[\sigma(\mu),\sigma(\nu)],\pi(Z)), \end{aligned} \tag{2.8}$$

pour tous $Z \in \Gamma(TM)$ et $\mu,\nu \in \Gamma(Q)$.

Supposons maintenant que le fibré $E^\perp$ est involutif. Il engendre un feuilletage $\mathcal{G}$ de dimension q orthogonal à $\mathcal{F}$.

Proposition 2.2. *[10]. Le feuilletage $\mathcal{F}$ est g_M-Riemannien si et seulement si $\mathcal{G}$ est totalement géodésique.*

Démonstration. Soient $p+1 \le i,j \le n$ et $X \in \Gamma(E)$. D'abord nous avons

$$(\nabla_X g_Q)(e_i,e_j) = g_Q(\alpha(X,E_i),e_j) + g_Q(\alpha(X,E_j),e_i). \tag{2.9}$$

D'autre part, puisque $E^\perp$ is intégrable, alors

$$\begin{aligned} -g_Q(\alpha(X,E_i),e_j) &+ g_Q(\alpha(X,E_j),e_i) = g_M(X,\nabla^M_{E_i}E_j - \nabla^M_{E_j}E_i) \\ &= g_M(X,[E_i,E_j]) = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

De (2.9) and (2.10) il vient $\quad (\nabla_X g_Q)(e_i,e_j) = 2g_Q(\alpha(X,E_i),e_j)$. □

Dans toute la suite de ce texte on suppose que $\mathcal{F}$ est g_M-Riemannien.

2.4 Courbures

Pour les définitions qui suivent on peut voir [13].
Soit $\nu \in \Gamma(Q)$. L'opérateur de courbure directionnelle de $\mathcal{F}$ (dans la direction ν) est donné par

$$R_\nu(\mu) = R_\nabla(\mu,\nu)\nu : \Gamma(Q) \longrightarrow \Gamma(Q).$$

Il est clair que cet opérateur est auto-adjoint via g_Q. La courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ d'un couple de sections locales linéairement indépendant (ν,μ) est définie par

$$Sec_\nabla(\nu,\mu) = \frac{g_Q(R_\nu(\mu),\mu)}{\|\nu\|_Q^2\|\mu\|_Q^2 - g_Q(\nu,\mu)^2} = \frac{g_Q(R_\nabla(\mu,\nu)\nu,\mu)}{\|\nu\|_Q^2\|\mu\|_Q^2 - g_Q(\nu,\mu)^2}.$$

On montre que Sec_∇ ne dépend pas du choix de (ν,μ) dans le plan qu'il engendre.
L'opérateur de Ricci de $\mathcal{F}$ est l'endomorphisme $\rho_\nabla : \Gamma(Q) \longrightarrow \Gamma(Q)$ défini par

$$\rho_\nabla(\mu) = \sum_{i=p+1}^{n} R_{e_i}(\mu) = \sum_{i=p+1}^{n} R_\nabla(\mu, e_i)e_i.$$

La courbure de Ricci de $\mathcal{F}$ est donnée par

$$Ric_\nabla(\mu,\nu) = g_Q(\rho_\nabla(\mu),\nu) = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(R_\nabla(\mu,e_i)e_i,\nu) = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(R_\nabla(e_i,\mu)\nu, e_i).$$

En particulier on a $Ric_\nabla(\nu,\nu) = trR_\nu$.
Enfin la courbure scalaire de $\mathcal{F}$ est définie par

$$Scal_\nabla = tr\rho_{\nabla}.$$

Dans [25] l'auteur montre que la courbure R_∇ est parallèle le long des feuilles, c'est à dire que $\nabla_X R_\nabla = 0$ pour tout $X \in \Gamma(E)$. Par conséquent tous les opérateurs qu'on vient de définir sont aussi parallèles le long des feuilles.

2.5 Produit scalaire

Dans cette section, on introduit un produit scalaire qui va intervenir essentiellement dans les preuves des Théorèmes 6.27 et 6.28.

Soit $\Omega^r(M,Q)$ le module des r-formes différentielles sur M à valeurs dans Q. On convient de poser $\Omega^0(M,Q) = \Gamma(Q)$. Soit $\Omega^r_c(M,Q)$ le sous module des r-formes différentielles à supports compacts. Dans [28] l'auteur définit sur $\Omega^r(M,Q)$ le produit scalaire

$$\ll \omega, \omega' \gg_{\Omega^r} = \int_M g_Q(\omega \wedge *\omega'),$$

où $*$ désigne l'opérateur star de Hodge. L'opérateur de dérivée extérieur $d_\nabla : \Omega^r(M,Q) \longrightarrow \Omega^{r+1}(M,Q)$ est donné par

$$\begin{aligned} d_\nabla\omega(X_1,...,X_{r+1}) &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}\nabla_{X_i}\omega(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_{r+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_{r+1}). \end{aligned}$$

Soit $d^*_\nabla : \Omega^r_c(M,Q) \longrightarrow \Omega^{r-1}_c(M,Q)$ l'opérateur adjoint de d_∇ via le produit scalaire $\ll . \gg_{\Omega^r}$. On vérifie bien que l'on a $d^*_\nabla = (-1)^{rn+n+1} * d_\nabla *$ et que si $\omega \in \Omega^r(M,Q)$, alors dans une base orthonormée locale $(E_i)_{1\le i\le n}$, on a

$$d^*_\nabla\omega(X_1,...,X_{r-1}) = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}\omega)(E_i;X_1,...,X_{r-1}).$$

L'opérateur de Laplace-Beltrami est défini par

$$\Delta_{LB} = d_\nabla d^*_\nabla + d^*_\nabla d_\nabla. \tag{2.11}$$

En particulier si $\nu \in \Gamma(Q)$, alors on a $d_\nabla \nu = \nabla\nu$ et $d^*_\nabla \nu = 0$. Par suite

$$\Delta_{LB}\nu = d^*_\nabla \nabla\nu = -\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}\nabla\nu)(E_i) = \sum_{i=1}^{n}(-\nabla_{E_i}\nabla_{E_i} + \nabla_{\nabla^M_{E_i}E_i})\nu. \tag{2.12}$$

Ici on s'intéresse à $\Gamma(Q)$ et à $\Omega^1(M,Q) = \Gamma(Hom(TM,Q))$, alors on introduit les produits scalaires (voir [21] page 179)

$$\ll \mu,\nu \gg = \int_M g_Q(\mu,\nu)d_M \qquad \mu,\nu \in \Gamma(Q),$$

$$\ll S_1,S_2 \gg = \sum_{i=1}^{n}\int_M g_Q(S_1(E_i),S_2(E_i)) \qquad S_1,S_2 \in \Omega^1(M,Q).$$

Soit $\Gamma_c(Q)$ l'ensemble des sections de Q à supports compacts et soit $L_2(M,Q))$ le complété de $\Gamma_c(Q)$ via le produit scalaire $\ll . \gg$. On dit que $\nu \in \Gamma(Q)$ est de *norme globale fini* si $\nu \in L_2(M,Q)) \cap \Gamma(Q)$.

Soit $\nabla^* : \Gamma(Hom(TM,Q) \longrightarrow \Gamma(Q))$ l'opérateur adjoint de ∇ via le produit scalaire $\ll,\gg$, défini par $\ll \nabla^* S,\nu \gg = \ll S,\nabla\nu,\gg$. D'après ([21], Proposition 3.7 page 179), on a

$$\nabla^*\nabla\nu = -\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\nabla}^2_{E_i,E_i}\nu = \Delta_{LB}\nu, \qquad \text{pour tout } \nu \in L_2(M,Q)) \cap \Gamma(Q).$$

3 Exemples des feuilletages

3.1 Feuilletage minimal sur un espace Euclidien

A) Considérons sur $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, muni du système de coordonnées $(x_1,...,x_p,x_{p+1},...x_n)$, le feuilletage trivial $\mathcal{F}$ dont les feuilles sont les sous variétés $\mathbb{R}^p \times \{z\}$, $z \in \mathbb{R}^q$. Soient $f_1,...,f_p$ des fonctions strictement positives sur $\mathbb{R}^q$ et soit f la fonction sur $\mathbb{R}^q$ définie par $f(x_{p+1},...,x_n) = -e^{x_{p+1}+...,+x_n}$. On définit sur $\mathbb{R}^n$ la métrique $g_M = \sum_{i=1}^{p}\frac{1}{f_i^2}dx_i\otimes dx_i + \frac{1}{f^2}\sum_{i=p+1}^{n}dx_i\otimes dx_i$. Alors ($E_i = f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ $1 \le i \le p$, $E_k = f\frac{\partial}{\partial x_k}$ $p+1 \le i \le n$) est un repère orthonormé distingué global. On a les propriétés suivantes:

a) le feuilletage $\mathcal{F}$ est g_M-Riemannien. En effet, soient $1 \le i \le p$ et $p+1 \le j,k \le n$. comme $E_i.f = 0$, alors

$$[E_i,E_j] = -f\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = -f\frac{\partial log f_i}{\partial x_j}E_i.$$

Par suite

$$(\Theta(E_i)g_M)(E_j,E_k) = -g_M([E_i,E_j],E_k) - g_M(E_j,[E_i,E_k]) = 0.$$

Donc la métrique g_M est quasi-fibrée via le feuilletage $\mathcal{F}$.

b) Le champ de tension $\tau = f \sum_{p+1\leq k\leq n} (\frac{\partial log \prod_{1=1}^{p} f_i}{\partial x_k}) e_k$. En effet, soient $1 \leq i \leq p$ et $p+1 \leq k \leq n$. En vertu de la formule (2.8) on a

$$g_M(\nabla^M_{E_i} E_i, e_k) = f \frac{\partial log f_i}{\partial x_k}.$$

Par conséquent, le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal si et seulement si le produit $\prod_{1=1}^{p} f_i$ est constant.

c) Si $q \geq 2$, alors $\mathcal{F}$ est à courbure de Ricci strictement négative. En effet, si $p+1 \leq i \leq n$, alors d'après la formule (2.8) il vient $\nabla_{E_i} e_i = f \sum_{k=p+1, k\neq i}^{n} e_k$ et $\nabla_{E_j} e_i = -f e_j$, pour tout $p+1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. Par suite on a

$$g_Q(R_\nabla(e_k, e_i)e_i, e_k) = 2f - qf^2 \quad \text{et} \quad g_Q(R_\nabla(e_k, e_j)e_i, e_k) = f.$$

Par conséquent, si $\nu = \sum_{p+1\leq l\leq n} \lambda_l e_l \in \Gamma(U, Q)$ est non nul, alors on a

$$g_Q(R_\nabla(e_k, \nu)\nu, e_k) = \sum_{l=p+1, l\neq k}^{n} \lambda_l^2 (f - qf^2) + f(\sum_{l=p+1, l\neq k}^{n} \lambda_l)^2 < 0.$$

B) Maintenant nous allons donner une caractérisation d'un feuilletage minimal sur un espace euclidien.

Soit $(\mathbb{E}^n, \langle . \rangle)$ l'espace euclidien de dimension n muni de la métrique canonique et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage $\langle . \rangle$-Riemannien sur E^n. Introduisons sur le fibré E tangent à $\mathcal{F}$ la connexion suivante

$$\nabla^{\mathcal{F}}_X Y = \pi^{\perp} \nabla^M_X Y = \nabla^M_X Y - \sigma \circ \alpha(X, Y),$$

pour tous $Y \in \Gamma(E)$ et $X \in \Gamma(TM)$, où $\pi^{\perp} = id_{_{TM}} - \sigma \circ \pi$.

Si F est une feuille de $\mathcal{F}$, alors $(F, \langle . \rangle)$ est une variété riemannienne et $\nabla^{\mathcal{F}}$ est la connexion de Levi-Civita associée. Le laplacien d'une fonction h, définie sur F, via la connexion $\nabla^{\mathcal{F}}$ est donné par $\Delta^{\mathcal{F}} h = \sum_{i=1}^{p} (E_i E_i - \nabla^F_{E_i} E_i) h$.

Proposition 3.1. *Si $\mathcal{F}$ est minimal, alors $\mathcal{F}$ est sans feuille compacte.*

Démonstration. Fixons un vecteur constant $a \in \mathbb{E}$ et considérons sur $\mathbb{E}$ la fonction linéaire $f(x) = \langle x, a \rangle$. Pour tout $X \in \Gamma(E)$, on a $Xf = \langle X, a \rangle$ et par suite

$$X(Xf) - \nabla^{\mathcal{F}}_X Xf = \langle \nabla^M_X X - \nabla^{\mathcal{F}}_X X, a \rangle = \langle \sigma(\alpha(X, X)), a \rangle.$$

On en déduit que $\Delta^{\mathcal{F}} f = \langle \sigma(\tau), a \rangle = 0$. Maintenant le résultat découle du lemme de Hopf ([17], page 500). En effet si F est une feuille compacte de $\mathcal{F}$, alors f doit être constante sur F, ce qui n'est pas vrai. $\square$

3.2 Feuilletages à courbure sectionnelle constante

On dit que le feuilletage $\mathcal{F}$ est *transversalement einsteinien* de constante d'Einstein $\lambda \in \mathbb{R}$, si l'opérateur de Ricci de $\mathcal{F}$ vérifie $\rho_\nabla = \lambda id_Q$. D'où

$$(3.1) \qquad Ric_\nabla(\mu,\mu) = \lambda \|\mu\|_Q^2 \qquad \text{pour tout} \quad \mu \in \Gamma(Q).$$

Soit $x \in M$, P_x un plan de Q_x et $\{u, v\}$ une base orthonormée de P_x. Posons $K(P_x) = Sec(u, v)$. On dit que $\mathcal{F}$ est à courbure sectionnelle constante si $K(P_x)$ est une constante k pour tout plan $P_x \subset Q_x$ et pour tout $x \in M$.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ est dit *transversalement elliptique, transversalement hyperbolique ou transversalement euclidien* si la constante $k > 0$, $k < 0$ ou $k = 0$.

La preuve donnée dans ([16] page 202) peut être reproduite pour montrer que si $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension ≥ 3 à courbure sectionnelle constante k, alors pour tous μ, ν et $\eta \in \Gamma(Q)$ on a

$$R_\nabla(\mu,\nu)\eta = k(g_Q(\eta,\nu)\mu - g_Q(\eta,\mu)\nu).$$

D'où il vient

Proposition 3.2. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est de codimension $q \geq 3$, à courbure sectionnelle constante k, alors il est transversalement d'Einstein de constante d'Einstein $(q-1)k$.*

Dans la suite $\mathcal{F}$ est un feuilletage riemannien transversalement homogène de codimension 2 sur une variété M compacte. Les résultats suivants sont dus à R.A. Blumenthal [5].

A) Propriétés d'un feuilletage transversalement euclidien de codimension 2.

A_1) Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement euclidien de codimension 2 (ie modelé sur $SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2/SO(2)$, alors on a les conditions suivantes:

1) $\pi_1(M)$ est résoluble et $H_1(M,\mathbb{R}) \neq 0$.

2) Si $\pi_1(M)$ est abélien, alors

i) ou bien $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}^2$-feuilletage de Lie, ou $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte F telle que $\pi_1(F)$ est isomorphe à $\pi_1(M)$;

ii) si de plus M est de dimension 3 (resp de dimension 4) et $\pi_1(M) \neq \mathbb{Z}$ (resp $\pi_1(M) \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), alors $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}^2$-feuilletage de Lie.

3) Supposons que M est de dimension 3. Si $\pi_1(M)$ n'est pas abélien ou si $\mathcal{F}$ n'est pas un $\mathbb{R}^2$- feuilletage de Lie, alors $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte.

4) Si F est une feuille compacte de $\mathcal{F}$ telle que $H^1(F) = 0$, alors toutes les feuilles sont compactes.

5) Si F est une feuille de $\mathcal{F}$ telle que $H_1(F,\mathbb{Z}) = 0$, alors $i_*(\pi_1(F))$ est un sous groupe normal de $\pi_1(M)$.

6) Si pour une feuille F de $\mathcal{F}$ on a $i_*(\pi_1(F)) = 0$, alors le groupe fondamental de chaque feuille est abélien.

7) Si toute les feuilles sont simplement connexe, alors $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}^2$-feuilletage de Lie et $\pi_1(M)$ est abélien.

A_2) Si le fibré normal de $\mathcal{F}$ est trivial, alors on a l'équivalence suivante:

le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement euclidien si et seulement si il est défini par deux 1-formes ω_1, ω_2 satisfaisant

$$d\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_3, \quad d\omega_2 = \frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = 0.$$

B) Propriétés d'un feuilletage transversalement elliptique de codimension 2.

B_1) Si $\mathcal{F}$ est transversalement elliptique de codimension 2 (i.e., modelé sur $SO(3)/_{SO(2)} \cong \mathbb{S}^2$), alors on a les conditions suivantes:

1) Toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes, ou elles sont toutes denses, ou elles sont toutes à croissance polynômiale et il existe une feuille compacte.

2) Si F est une feuille compacte de $\mathcal{F}$ telle que $H^1(F) = 0$, alors toutes les feuilles sont compactes.

3) Si F est une feuille de $\mathcal{F}$ telle que $H_1(F, \mathbb{Z}) = 0$, alors $i_*(\pi_1(F))$ est un sous groupe normal de $\pi_1(M)$.

B_2) Si le fibré normal de $\mathcal{F}$ est trivial, alors on a l'équivalence suivante:

le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement elliptique si et seulement si il est défini par deux 1-formes $\omega_1,\ \omega_2$ satisfaisant

$$d\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_3, \quad d\omega_2 = -\frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = \frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_2.$$

En général, si $\mathcal{F}$ est un flot transversalement elliptique modelé sur $SO(2q+1)/_{SO(2q)} \cong \mathbb{S}^{2q}$, alors $\pi_1(M)$ est à croissance polynômiale de degré $d \leq 1$ et $\mathcal{F}$ possède une feuille compacte.

C) Propriétés d'un feuilletage transversalement hyperbolique de codim 2

C_1) Si $\mathcal{F}$ est transversalement hyperbolique de codimension 2 (ie modelé sur $SL(2,\mathbb{R})/_{SO(2)}$), alors on a les conditions suivantes:

1) Si pour une feuille F de $\mathcal{F}$ on a $i_*(\pi_1(F))$ est trivial, alors le groupe fondamental de chaque feuille est abélien.

2) Si $\pi_1(M)$ est à croissance non exponentielle, alors il n'existe pas un feuilletage transversalement hyperbolique de codimension 2 sur M.

C_2) Si le fibré normal de $\mathcal{F}$ est trivial, alors on a l'équivalence suivante:

le feuilletage $\mathcal{F}$ est transversalement hyperbolique si et seulement si il est défini par deux 1-formes ω_1, ω_2 satisfaisant

$$d\omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_3, \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 - 2\omega_1 \wedge \omega_3, \quad d\omega_3 = -\omega_1 \wedge \omega_3.$$

3.3 Feuilletage Riemannien à courbure parallèle

Dans [6] l'auteur montre qu'un feuilletage riemannien à courbure parallèle (ie $\nabla R_\nabla = 0$) est modelé sur un espace symétrique et que l'on a les résultats suivants:

1) si $\mathcal{F}$ est à courbure parallèle et si $\pi_(M)$ est fini, alors $Sec_\nabla \geq 0$ et toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes à holonomie finie.

2) Si $\mathcal{F}$ est un G-feuilletage de lie, alors il est riemannien transversalement symétrique à courbure sectionnelle non négative.

3) Si M est le fibré tangent unitaire du tore T_2 de genre 2, les fibres (en cercles) de cette fibration engendrent un feuilletage riemannien transversalement symétrique à courbure sectionnelle strictement négative.

4) Soit G un groupe de lie de dimension q et M une variété compacte de dimension $> q$. Soit ω une 1-forme sur M à valeurs dans l'algèbre de Lie de G de rang q et soit $\mathcal{F}$ le feuilletage sur M d'équation $\omega = 0$. Alors une métrique bi-invariant sur G induit une structure riemannienne sur $(M, \mathcal{F})$ à courbure sectionnelle non-négative.

4 Opérateurs sur le fibré normal et formules intégrales

Soit (M, g_M) une variété riemannienne et $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien sur M. Dans cette section nous reprenons d'abord certaines résultats de [9] qui sont utiles dans la suite.

4.1 Opérateurs sur le fibré normal

On introduit un opérateur noté K_X mesurant la déviation d'un champ transverse d'être affine transverse. Nous fixons $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et on pose $\eta = \pi(X)$. Tout d'abord remarquons que l'on a

$$\nabla^M_Y Z - \sigma(\nabla_Y \pi(Z)) \in \Gamma(E) \qquad \text{pour tous} \quad Y, Z \in \Gamma(E^\perp), \tag{4.1}$$

ce qui entraine que

$$\nabla_{\nabla^M_Y Z}\eta = \nabla_{\sigma(\nabla_Y \pi(Z))}\eta \qquad \text{pour tous} \quad Y, Z \in \Gamma(E^\perp).$$

D'autre part, pour tous $Y \in \Gamma(E)$ et $Z \in \Gamma(E^\perp)$ on a $\nabla^2_{Z,Y}\eta = 0$, ce qui entraine

$$\nabla^2_{Y,Z}\eta = R_\nabla(\pi(Y), \pi(Z))\eta = 0. \tag{4.2}$$

On définit l'opérateur $A_X \in End(Q)$ par $A_X(\nu) = -\nabla_{\sigma(\nu)}\eta,\ \nu \in \Gamma(Q)$. Alors on a

$$A^2_X(\nu) = -A_X(\nabla_{\sigma(\nu)}\eta) = \nabla_{\sigma(\nabla_{\sigma(\nu)}\eta)}\eta. \tag{4.3}$$

Maintenant comme $T_\nabla = 0$, il vient

$$A_X = \Theta(X) - \nabla_X. \tag{4.4}$$

D'où par un calcul classique, on montre que l'on a pour tous $\mu, \nu \in \Gamma(Q)$

$$(\Theta(X)g_Q)(\mu, \nu) = -g_Q(A_X(\mu), \nu) - g_Q(\mu, A_X(\nu)). \tag{4.5}$$

Proposition 4.1. *L'endomorphisme A_X vérifie les conditions suivantes:*
i) pour tous $\nu \in \Gamma(Q)$ et $Y \in \Gamma(TM)$ on a

$$-\nabla_Y(A_X)\nu = [A_X, \nabla_Y]\nu = \nabla^2_{Y,\sigma(\nu)}\eta. \tag{4.6}$$

ii) A_X est parallèle le long des feuilles.

Démonstration. i) En vertu de la relation (4.4), il vient

$$\begin{aligned}[A_X, \nabla_Y]\nu &= -\nabla_Y A_X(\nu) + A_X(\nabla_Y \nu)\\ &= \nabla_Y \nabla_{\sigma(\nu)}\eta - \nabla_{\sigma(\nabla_Y \nu)}\eta\\ &= \nabla^2_{Y,\sigma(\nu)}\eta.\end{aligned}$$

La propriété ii) découle immédiatement des équations (4.6) et (4.2). □

Considérons l'opérateur $K_X \in Hom(\Gamma(TM), End(\Gamma(Q))$ défini par

$$\begin{aligned}K_X(Z)\nu &= (\Theta(X)\nabla)_Z\nu = (\Theta(X)\nabla)(Z,\nu)\\ &= \Theta(X)(\nabla(Z,\nu)) - \nabla(\Theta(X)Z,\nu) - \nabla(Z,\Theta(X)\nu)\\ &= \Theta(X)\nabla_Z\nu - \nabla_{[X,Z]}\nu - \nabla_Z\Theta(X)\nu\\ &= [\Theta(X),\nabla_Z]\nu - \nabla_{[X,Z]}\nu,\end{aligned}$$

pour tous $Z \in \Gamma(TM)$ et $\nu \in \Gamma(Q)$. L'homomorphisme K_X est semi-basique car on a

$$K_X(Y) = [\Theta(X)\Theta(Y)] - \Theta([X,Y]) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad Y \in \Gamma(E).$$

Donc il induit sur $\Gamma(Q)$ l'opérateur

$$K_X(\mu) = [\Theta(X), \nabla_{\sigma(\mu)}] - \nabla_{[X,\sigma(\mu)]}. \tag{4.7}$$

En vertu des relations (4.7), (4.4) et (4.6) on vérifie facilement que l'on a

$$\begin{aligned}K_X(\mu)\nu &= R_\nabla(\eta,\mu)\nu + [A_X, \nabla_{\sigma(\mu)}]\nu && (4.8)\\ &= R_\nabla(\eta,\mu)\nu - \nabla_{\sigma(\mu)}(A_X)\nu && (4.9)\\ &= R_\nabla(\eta,\mu)\nu + \nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(\nu)}\eta. && (4.10)\end{aligned}$$

Proposition 4.2. *L'opérateur K_X vérifie les conditions suivantes:*
i) K_X est parallèle le long des feuilles.
ii) K_X est symétrique, c'est à dire pour tous $\mu, \nu \in \Gamma(Q)$ on a

$$K_X(\mu)\nu = K_X(\nu)\mu.$$

iii) La trace de K_X est égale à

$$trK_X = \sum_{i=p+1}^{n} K_X(e_i)e_i = \rho_\nabla(\eta) + tr\nabla^2\eta. \tag{4.11}$$

iv) Si de plus $\mathcal{F}$ est minimal, alors trK_X devient

$$trK_X = \rho_\nabla(\eta) - \Delta_{LB}\eta. \tag{4.12}$$

Démonstration. i) Soient $Y \in \Gamma(E)$ et $\mu \in \Gamma(Q)$. Comme on a $\nabla_Y R_\nabla = 0$, $\nabla_Y A_X = 0$ et $\nabla_Y\eta = 0$, il s'ensuit de la relation (4.8) et de l'identité de Jacobi que l'on a

$$\begin{aligned}\nabla_Y(K_X(\mu)) &= R_\nabla(\eta, \nabla_Y\mu) + [\nabla_Y, [A_X, \nabla_{\sigma(\mu)}]]\\ &= R_\nabla(\eta, \nabla_Y\mu) - [A_X, [\nabla_{\sigma(\mu)}, \nabla_Y]] - [\nabla_{\sigma(\mu)}[\nabla_Y, A_X]]\\ &= R_\nabla(\eta, \nabla_Y\mu) - [A_X, [\nabla_{\sigma(\mu)}, \nabla_Y]].\end{aligned} \tag{4.13}$$

D'autre part, d'après la relation (4.9) on a

$$K_X(\nabla_Y \mu) = R_\nabla(\eta, \nabla_Y \mu) - \nabla_{\sigma(\nabla_Y \mu)}(A_X) = R_\nabla(\eta, \nabla_Y \mu) - \nabla_{[Y,\sigma(\mu)]}(A_X). \tag{4.14}$$

Les formules (4.13) et (4.14) impliquent que

$$(\nabla_Y K_X)(\mu) = \nabla_Y(K_X(\mu)) - K_X(\nabla_Y \mu) = [A_X, R_\nabla(\pi(Y), \mu)] = 0,$$

car $\pi(Y) = 0$.

ii) Remarquons d'abord que la courbure R_∇ vérifie la première identité de Bianchi. Par conséquent de la relation (4.10) il s'ensuit que

$$K_X(\mu)(\nu) - K_X(\nu)(\mu) = R_\nabla(\eta, \mu)\nu + R_\nabla(\nu, \eta)\mu + R_\nabla(\mu, \nu)\eta = 0.$$

iii) La formule (4.11) s'obtient en prenant la trace de la relation (4.10).

iv) Considérons le repère distingué $(E_i)_{1 \leq n}$. Comme $\mathcal{F}$ est minimal, alors $\sum_{i=1}^{p} \nabla^M_{E_i} E_i \in \Gamma(E)$. Par conséquent $\Delta_{_{LB}}\eta = -tr\nabla^2\eta$ car η est parallèle le long des feuilles. □

4.2 Quelques formules intégrales

Soit T l'endomorphisme de Q défini par $T(\mu) = K_X(\mu)\eta$.

Proposition 4.3. *On a les relations suivantes:*

$$Ric_\nabla(\eta, \eta) + trA_X^2 + \nabla_X div_\nabla \eta = trT = div_\nabla \nabla_X \eta. \tag{4.15}$$

$$Ric_\nabla(\eta, \eta) + trA_X^2 - (div_\nabla \eta)^2 = div_\nabla(\nabla_X \eta - (div_\nabla \eta)\eta). \tag{4.16}$$

Démonstration. Prouvons la relation (4.15). D'après les relations (4.10) et (4.3), on a

$$T(\mu) = -R_\eta(\mu) - A_X^2(\mu) + \nabla_{\sigma(\mu)} \nabla_X \eta. \tag{4.17}$$

Par conséquent

$$trT = -Ric(\eta, \eta) - trA_X^2 + div_\nabla \nabla_X \eta. \tag{4.18}$$

D'autre part, soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ le repère distingué introduit dans la section 2.2. Posons

$$P = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(\nabla_{E_i}\eta, \nabla_{\sigma(\eta)} e_i) = \sum_{i,j=p+1}^{n} g_Q(\nabla_{E_i}\eta, e_j) g_Q(\nabla_{\sigma(\eta)} e_i, e_j)$$

et

$$S = \sum_{j=p+1}^{n} g_Q(\nabla_{\nabla^M_{\sigma(\eta)} E_j}\eta, e_j) = \sum_{i,j=p+1}^{n} g_M(\nabla^M_{\sigma(\eta)} E_j, E_i) g_Q(\nabla_{E_i}\eta, e_j).$$

Comme K_X est symétrique, donc on a aussi $T(\mu) = K_X(\eta)\mu$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} trT &= \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(\nabla^2_{\sigma(\eta),E_i}\eta, e_i) = \sum_{i=p+1}^{n} \nabla_{\sigma(\eta)} g_Q(\nabla_{E_i}\eta, e_i) - (P+S) \\ &= \nabla_{\sigma(\eta)} div_\nabla \eta - (P+S) = \nabla_X div_\nabla \eta - (P+S), \end{aligned} \tag{4.19}$$

car $div_\nabla \eta \in A_b(M)$. Mais $P+S=0$ car

$$g_Q(\nabla_{\sigma(\eta)}e_i, e_j) + g_M(E_i, \nabla_{\sigma(\eta)}E_j) = \sigma(\eta) g_Q(e_i, e_j) = 0.$$

La relation voulue découle de (4.18) et (4.19).

L'équation (4.16) se déduit de (4.15) et de la relation (5.4) que nous verrons plus loin. □

Maintenant, posons

$$|\Theta(X)g_Q|^2 = \sum_{i,j=p+1}^{n} (\Theta(X)g_Q(e_i, e_j))^2. \tag{4.20}$$

Proposition 4.4. [9]. *Soit $\xi \in \Gamma(Q)$ tel que* $g_Q(\xi, \mu) = g_Q(\nabla_{\sigma(\mu)}\eta, \eta)$ *pour tout $\mu \in \Gamma(Q)$. Alors on a*

i) ξ est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{F}$.

ii) On a les relations suivantes

$$g_Q(tr\nabla^2\eta, \eta) = div_\nabla \xi - |A_X|^2 \tag{4.21}$$

$$|\Theta(X)g_Q|^2 = 2|A_X|^2 + 2trA_X^2. \tag{4.22}$$

Proposition 4.5. [9]. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien minimal sur une variété riemannienne (M, g_M) sans bord. Soient X un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ et $\eta = \pi(X)$. Alors on a les formules intégrales suivantes:*

$$\int_M (Ric_\nabla(\eta,\eta) + trA_X^2 - (div_\nabla \eta)^2) d_M = 0. \tag{4.23}$$

$$\int_M (Ric_\nabla(\eta,\eta) + g_Q(tr\nabla^2\eta, \eta) + \frac{1}{2}|\Theta(X)g_Q|^2 - (div_\nabla \eta)^2) d_M = 0. \tag{4.24}$$

5 Propriétés des fonctions basiques

Soient (M, g_M) une variété riemannienne et $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien sur M.

5.1 Gradient, Hessien et Laplacien via à ∇

Soit f une fonction C^∞ sur M, le gradient classique via la connexion ∇^M est défini par $g_M(\nabla^M f, X) = X.f$ pour tout $X \in \Gamma(TM)$. Il est clair que si f est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$, alors $\nabla^M f \in \Gamma(E^\perp)$.

Une fonction f sur M est dite *basique* si elle est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$. On désigne par $A_b(M, \mathcal{F})$ l'ensemble des fonctions basiques sur M. Par analogie avec le cas classique on peut définir les opérateurs: gradient, hessien et laplacien d'une fonction basique via la connexion ∇. Soit $f \in A_b(M, \mathcal{F})$.

a) On définit ∇f : le ∇-*gradient* de f par

$$g_Q(\nabla f, \nu) = \nabla_{\sigma(\nu)} f = \sigma(\nu).f = df \circ \sigma(\nu) \qquad \text{pour tout} \quad \nu \in \Gamma(Q).$$

b) On montre dans la proposition 5.2 qui suit que ∇f est parallèle le long des feuilles de $\mathcal{F}$, c'est à dire que $X = \sigma(\nabla f) = \nabla^M f \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Donc on peut définir l'endomorphisme $\nabla^2 f$ de $\Gamma(Q)$ qui est un tenseur de type (1,1) par

$$\nabla^2 f(\mu) = \nabla_{\sigma(\mu)} \nabla f = -A_X(\mu).$$

c) Si l'on pose $X = \sigma(\nabla f)$, alors le ∇-*hessien* de f est défini par: $\mu, \nu \in \Gamma(Q)$,

$$\begin{aligned} Hess_\nabla f(\mu, \nu) &= -g_Q(A_X(\mu), \nu) = g_Q(\nabla_{\sigma(\mu)} \nabla f, \nu) \\ &= \nabla_{\sigma(\mu)} g_Q(\nabla f, \nu) - g_Q(\nabla f, \nabla_{\sigma(\mu)} \nu) \\ &= (\nabla_{\sigma(\mu)} \nabla_{\sigma(\nu)} - \nabla_{\sigma(\nabla_{\sigma(\mu)} \nu)}) f \\ &= \nabla^2_{\sigma(\mu), \sigma(\nu)} f. \end{aligned} \tag{5.1}$$

d) Le ∇-*laplacien* de f est défini par

$$\Delta f = -div_\nabla \nabla f = -trHess_\nabla f = -\sum_{i=p+1}^{n} Hess_\nabla f(e_i, e_i).$$

La proposition suivante décrit le lien entre $Hess_\nabla$ et $Hess_M$.

Proposition 5.1. *Soient $f \in A_b(M, \mathcal{F})$ et $Hess_M f$ le hessien de f via la connexion ∇^M. On a les conditions suivantes.*

i)

$$Hess_M f(\sigma(\mu), \sigma(\nu)) = Hess_\nabla f(\mu, \nu), \tag{5.2}$$

pour tous $\mu, \nu \in \Gamma(Q)$.

ii) Si $\mathcal{F}$ et $E^\perp$ sont totalement géodésique, alors $Hess_M f$ est complètement déterminé par $Hess_\nabla f$.

Démonstration. i) D'après (4.1) on a

$$Hess_M f(\sigma(\mu), \sigma(\nu)) - Hess f(\mu, \nu) = (\nabla^M_{\sigma(\mu)} \sigma(\nu) - \sigma(\nabla_{\sigma(\mu)} \nu)).f = 0.$$

ii) Soient $X, Y \in \Gamma(E)$. Si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique, alors $\nabla^M_X Y \in \Gamma(E)$). Par conséquent $Hess_M f(X, Y) = 0$.

Maintenant, soient $X \in \Gamma(E)$ et $Y \in \Gamma(E^{\perp})$. Si $E^{\perp}$ est totalement géodésique, alors pour tout $Z \in \Gamma(E^{\perp})$ on a

$$g_M(\nabla^M_Y X, Z) = -g_M(X, \nabla^M_Y Z) = 0.$$

Ceci implique que $\nabla^M_Y X \in \Gamma(E)$. Par conséquent $Hess_M f(Y, X) = 0$. □

La proposition qui suit renferme quelques propriétés d'une fonction basique et d'un champ transverse.

Proposition 5.2. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne munie d'un feuilletage g_M-Riemannien $\mathcal{F}$. On a les conditions suivantes:*
i) si $f \in A_b(M, \mathcal{F})$, alors $\sigma(\nabla f) = \nabla^M f \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$.
ii) Si η est champ transverse, alors $div_{\nabla}\eta \in A_b(M, \mathcal{F})$.
iii) Si $f \in A_b(M, \mathcal{F})$, alors $\Delta f \in A_b(M, \mathcal{F})$.
iv) Si $f \in A_b(M, \mathcal{F})$, alors on a

$$\frac{1}{2}\Delta|f|^2 = -\|\nabla f\|^2_Q + f\Delta f. \tag{5.3}$$

v) Si $f \in A_b(M, \mathcal{F})$ et si η est un champ transverse, alors on a

$$div_{\nabla} f\eta = X.f + f div_{\nabla}\eta. \tag{5.4}$$

vi) S η est un champ transverse, alors la fonction $f = \frac{1}{2}||\eta||^2_Q \in A_b(M, \mathcal{F})$.

Démonstration. i) Soient $Y \in \Gamma(E)$ et $\nu \in \Gamma(Q)$, on a

$$\begin{array}{rcl} g_Q(\Theta(Y)\nabla f, \nu) & = & Y g_Q(\nabla f, \nu) - g_Q(\nabla f, \Theta(Y)\nu) \\ & = & Y.(\sigma(\nu).f) - \sigma \circ \pi[Y, \sigma(\nu)].f \\ & = & Z.f = 0 \end{array}$$

car $Z = ([Y, \sigma(\nu)] - \sigma \circ \pi[Y, \sigma(\nu)]) \in \Gamma(E)$.

Pour la preuve de ii) on peut consulter [9]. La condition iii) est une conséquence de i) et ii).

iv) Comme $f \in A_b(M, \mathcal{F})$, la relation (5.3) découle de la formule suivante:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\nabla^2_{E_i,E_i} f^2 & = & E_i.(f(E_i.f)) - f(\nabla_{E_i}E_i).f \\ & = & (E_i.f)^2 + f\nabla^2_{E_i,E_i} f \\ & = & g_Q(\nabla f, E_i)^2 + f\nabla^2_{E_i,E_i} f. \end{array}$$

v) La relation (5.4) est classique.

vi) Comme g_Q et η sont parallèles le long des feuilles, alors f est basique. □

La proposition suivante décrit les propriétés d'une fonction basique définie par le carré de la norme d'un champ transverse.

Proposition 5.3. *Soient $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et $\eta = \pi(X)$. Si $f = \frac{1}{2}||\eta||_Q^2$, alors on a les équations suivantes:*

$$(\Theta(X)g_Q)(\eta,\nu) = g_Q(\nabla f - A_X\eta,\nu) \quad \textit{pour tout} \quad \nu \in \Gamma(Q). \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} Hess_\nabla f(\mu,\nu) &= g_Q(\nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(\nu)}\eta,\eta) + g_Q(A_X(\mu),A_X(\nu)) \\ &= g_Q(K_X(\mu)\nu,\eta) - g_Q(R_\nabla(\eta,\mu)\nu,\eta) \\ &+ g_Q(A_X(\mu),A_X(\nu)). \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$Hess_\nabla f(\nu,\nu) = -g_Q(R_\eta(\nu),\eta) + \|A_X(\nu)\|_Q^2 + g_Q(K_X(\nu)\nu,\eta). \tag{5.7}$$

$$\Delta f = Ric_\nabla(\eta,\eta) - |A_X|^2 + g_Q(trK_X,\eta) \tag{5.8}$$

$$= -|A_X|^2 - g_Q(tr(\nabla^2\eta),\eta). \tag{5.9}$$

Démonstration. L'equation (5.5) découle de la définition du gradient et de la relation (4.5). Les formules de (5.6) découlent de la définition du hessien et de la relation (4.10). □

5.2 Version feuilletée de certains résultats classiques

Soit $f \in A_b(M,\mathcal{F})$. Nous rappelons que le laplacien $\Delta_M f$ de f via la connexion ∇^M est défini par

$$\Delta_M f = -div_M(\nabla^M f) = -\sum_{i=1}^n Hess_M f(E_i,E_i).$$

D'après (2.6) on a

$$\Delta_M f = \Delta f + g_Q(\tau,\nabla f) \tag{5.10}$$

Nous commençons par donner une version feuilleté du lemme de Hopf ([17] page 500).

Proposition 5.4. *(Lemme de Hopf feuilleté). Soit (M,g_M) une variété riemannienne sans bord munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannian minimal et soit f une fonction basique à support compact.*

i) Si Δf garde un signe constant, alors f est constante.

ii) Si f est une fonction propre du laplacien Δ, gardant un signe constant sur M, alors f est constante.

Démonstration. i) Supposons par exemple que $\Delta f \leq 0$, alors d'après la formule (5.10) et la formule de Green on obtient $\Delta f = 0$. Maintenant en vertu de la relation (5.3) on a $\nabla f = 0$.

La condition ii) est une conséquence immédiate de i). □

Dans [30] l'auteur donne une preuve d'une formule de Weitzenb ock et dans [11] les auteurs utilisent cette formule en se référant à [3]. Ici, comme application de la relation (4.15) nous allons donner une autre preuve de la version feuilletée de cette formule. Mais tout d'abord, on fait la remarque suivante:

si $f \in A_b(M, \mathcal{F})$ et $X = \sigma(\nabla f)$, alors de (5.1) et (2.7) il vient

$$Hess_\nabla f(\mu, \nu) - Hess_\nabla f(\nu, \mu) = R_\nabla(\mu, \nu)f + Z.f = 0.$$

C'est à dire que $Hess_\nabla f$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\Gamma(Q)$. Donc l'endomorphisme associé $-A_X$ est auto-adjoint via g_Q. Il découle alors de (2.5) que l'on a

$$|Hess_\nabla f|^2 = |A_X|^2 = trA_X^2. \tag{5.11}$$

Proposition 5.5. *Soit $f \in A_b(M, \mathcal{F})$, alors on a la formule de Weitzenb ock feuilletée:*

$$-\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|_Q^2 = |Hess_\nabla f|^2 - g_Q(\nabla f, \nabla\Delta f) + Ric_\nabla(\nabla f, \nabla f). \tag{5.12}$$

Démonstration. Prenons $X = \sigma(\nabla f)$ et $\eta = \nabla f$ dans la relation (4.15). D'après (5.11) nous obtenons $trA_X^2 = |Hess_\nabla f|^2$ et par définition du gradient on a

$$\nabla_X div_\nabla \nabla f = -\sigma(\nabla f).\Delta f = -g_Q(\nabla\Delta f, \nabla f).$$

Donc il nous reste à montrer que

$$div_\nabla \nabla_X \nabla f = -\frac{1}{2}\Delta\|\nabla f\|_Q^2. \tag{5.13}$$

Soit $\nu \in \Gamma(Q)$. Comme $Hess_\nabla f$ est symétrique via g_Q il s'ensuit que

$$\begin{aligned} g_Q(\nabla_X \nabla f, \nu) &= g_Q(\nabla_{\sigma(\nabla f)}\nabla f, \nu) = g_Q(\nabla_{\sigma(\nu)}\nabla f, \nabla f) \\ &= \tfrac{1}{2}\sigma(\nu) g_Q(\nabla f, \nabla f) = \tfrac{1}{2}\sigma(\nu).\|\nabla f\|_Q^2 \\ &= g_Q(\tfrac{1}{2}\nabla\|\nabla f\|_Q^2, \nu). \end{aligned}$$

On en déduit que $\nabla_X \nabla f = \frac{1}{2}\nabla\|\nabla f\|_Q^2$, d'où la relation (5.13). □

Dans ([3] page 131) on retrouve la formule suivante sous le nom "Bochner-Lichnerowicz"

$$-\frac{1}{2}\Delta|df|^2 = |Hess_\nabla f|^2 - |\Delta f|^2 + Ric(df^\sharp, df^\sharp). \tag{5.14}$$

Mais il parait qu'il y a une erreur. En effet les auteurs utilisent la relation $\langle df, \alpha\rangle = \langle f, \delta\alpha\rangle$ de (la page 121) pour montrer à (la page 133) que l'on a

$$(d\Delta f/df) = |\Delta f|^2.$$

Or ceci n'est pas vrai car dans leur texte l'opérateur δ est l'adjoint de d via le produit scalaire $\langle . \rangle$ et non pas $(/)$.

La proposition suivante se déduit facilement des relations (4.16), (5.10) et de la formule de Green.

Proposition 5.6. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne sans bord munie d'un feuilletage g_M-Riemannien minimal. Alors pour toute fonction basique à support compact sur M on a la formule intégrale*

$$\int_M (|Hess_\nabla f|^2 - |\Delta f|^2 + Ric_\nabla(\nabla f, \nabla f)) d_M = 0. \tag{5.15}$$

Comme application de la formule intégrale (5.15), nous donnons une version feuilletée d'un résultat de Lichnerowicz [18].

Proposition 5.7. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne complète sans bord munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien minimal de codimension $q \geq 2$ transversalement d'Einstein de constante d'Einstein $k = l(q-1) \geq 0$ et soit $f \in A_b(M, \mathcal{F})$ à support compact. Si f est une fonction propre unitaire du laplacien Δ de valeur propre λ, alors on a $\lambda \geq lq$.*

Démonstration. Rappelons que f est unitaire signifie que $\int_M f^2 d_M = 1$. Maintenant, puisque f est une fonction propre unitaire de Δ, alors on a

$$\int_M |\Delta f|^2 d_M = \lambda^2 \int_M f^2 d_M = \lambda^2.$$

D'après (2.5) il vient

$$\int_M |Hess_\nabla f|^2 d_M \geq \int_M \frac{|\Delta f|^2}{q} d_M = \frac{\lambda^2}{q}.$$

D'autre part, comme $\mathcal{F}$ est à la fois minimal et transversalement einsteinien de constante d'Einstein k, alors les relations (3.1), (5.3) et (5.10) entraînent

$$\begin{aligned} \textstyle\int_M Ric_\nabla(\nabla f, \nabla f) d_M &= k(\textstyle\int_M \|\nabla f\|_Q^2 d_M \\ &= k \textstyle\int_M f \Delta f d_M \\ &= \lambda k. \end{aligned}$$

Le résultat découle de le relation (5.15). □

5.3 Extrémums d'une fonction basique

Dans ce paragraphe nous supposons que l'on a $f \in A_b(M, \mathcal{F})$ et nous essayons de dégager les propriétés des extrémums et des points critiques de f. On note $Cr(f) = \{x \in M / \nabla^M f(x) = 0\}$ l'ensemble de ses points critiques.

1) Si le feuilletage $\mathcal{F}$ possède une feuille partout dense (resp localement dense), alors f est constante sur M (resp sur un fermé d'intérieur non vide de M, saturé par des feuilles de $\mathcal{F}$).

2) Comme $\sigma(\nabla f) = \nabla^M f$, alors pour tout $x \in M$ on a: $\nabla^M f(x) = 0$ si et seulement si $\nabla f(x) = 0$. C'est à dire que l'on a $Cr(f) = \{x \in M / \nabla f(x) = 0\}$.

3) On sait que ∇f est parallèle le long des feuilles ($\nabla f \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$). Donc si $x \in Cr(f)$, alors $F_x \subset Cr(f)$, où F_x est la feuille passant par x.

4) f est constante sur les feuilles de $\mathcal{F}$. Par conséquent, si f atteint un minimum (resp un maximum) en point $x \in M$, alors tous les points de la feuille F_x qui passe par x sont des minimums (resp des maximums) de f. On dit dans ce cas que F_x est une feuille minimum (resp maximum) de f.

5) Par exemple si f est une fonction positive qui s'annule en $x \in M$, alors f s'annule sur toute la feuille F_x passant par x et F_x est une feuille minimum.

6) On peut parler aussi d'une feuille minimum (resp maximum) local. On dit qu'une feuille F représente un minimum (resp maximum) local de f, si F admet un voisinage saturé U tel que $f_{/U}$ atteint son minimum (resp maximum) sur F.

7) Si F une feuille minimum (resp maximum) local de f, alors $Hess_\nabla f_{/F}$ est positive (resp négative).

8) On ne parle pas d'un point minimum local strict (resp maximum local strict) mais on peut parler d'une feuille minimum local strict (resp maximum local strict).

9) La proposition 5.1 montre qu'il se peut que $Hess_\nabla f$ ne dégénère pas, mais $Hess_M f$ dégénère.

10) Si en un point $x \in M$, on a $Hess_{xM} f \geq 0$ (resp≤ 0) , alors $Hess_{x\nabla} f$ l'est aussi. La réciproque n'est pas vrai. En effet, d'après la proposition 5.1, si $\mathcal{F}$ n'est pas totalement géodésique il se peut que pour deux vecteurs $u, v \in E_x$, on a $Hess_{xM} f(u, v) < 0$.

11) Si F est une feuille minimum (resp maximum) local de f, alors $\nabla f_{/F} = 0$, (ie $F \subset Cr(f)$) et on a $Hess_\nabla f_{/F} \geq 0$ (resp≤ 0).

12) Comme est f constante sur les feuilles, alors elle induit une application continue $\widetilde{f}$ sur l'espace des feuilles $M_{/\mathcal{F}}$ qui est en général un espace topologique non séparé. Dans le cas où $M_{/\mathcal{F}}$ est séparé, alors il y a correspondance entre les points extrémums locaux de la fonction continue $\widetilde{f}$ et les feuilles extrémums locaux de f.

13) Maintenant soient $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, $\eta = \pi(X)$ et $f = \frac{1}{2}\|\eta\|^2_Q$. On a les propriétés suivantes:

i) si F une feuille de $\mathcal{F}$, alors on a l'équivalence

$f_{/F} = 0$ si et seulement si $\eta_{/F} = 0$. C'est à dire que $X_{/F}$ est une section de TF. Par conséquent si pour un point $x_0 \in M$ le vecteur $X(x_0)$ n'est pas dans E_{x_0}, alors il existe voisinage U de x_0 saturé par des feuilles de $\mathcal{F}$ tel que pour tout $x \in U$, X_x n'est pas dans E_x.

ii) Si η est parallèle, alors f est constante.

iii) Si 0 n'est pas une valeur de f, alors la classe d'Euler $\mathcal{E}(Q)$ du fibré normal Q est trivial [19] .

5.4 Fonctions basiques transversalement convexes

Soit (M, g_M) une variété riemannienne et $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien sur M. On dit qu'une fonction basique f est *transversalement convexe* (resp *transversalement strictement convexe*) si en tout point de M la forme $Hess_\nabla$ est semi-définie positive (resp définie positive). Donc si f est transversalement convexe, alors $\Delta f \leq 0$ et, d'après le lemme de Hopf feuilleté, il vient

Corollaire 5.8. *Si M est sans bord et si $\mathcal{F}$ est minimal et f est transversalement convexe à support compact, alors f est constante.*

Donc l'étude des fonctions transversalement convexe ne sera intéressant que si le feuilletage $\mathcal{F}$ n'est pas minimal ou si la variété ambiante n'est pas compacte.

Dans la suite de cette partie on suppose que le fibré orthogonal $E^\perp$ est involutif. D'après la proposition (2.2) $E^\perp$ engendre un feuilletage $\mathcal{G}$ totalement géodésique. Rappelons d'abord un théorème de [12] (voir aussi [7] page 190).

Théorème 5.9. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne complète et soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux feuilletages orthogonaux via g_M. Si $\mathcal{H}_1$ est totalement géodésique, alors toute feuille de $\mathcal{H}_2$ rencontre toute feuille de $\mathcal{H}_1$.*

Soit $x \in M$ et L_x la feuille de $\mathcal{G}$ passant par x. Si $\gamma : [0,1] \longrightarrow L_x$ est une géodésique, alors on a $\nabla_{\dot\gamma}\pi \circ \dot\gamma = \pi\nabla^M_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$. Par suite si $f \in A_b(M)$ et si $h = f \circ \gamma$, alors il vient

$$Hess_\nabla f(\pi \circ \dot{\gamma(t)}, \pi \circ \dot{\gamma(t)}) = \dot{\gamma(t)}(\dot{\gamma(t)} f) = h''(t). \tag{5.16}$$

Il est clair que f est transversalement convexe si est seulement si h est convexe.

Une partie $A \subset M$ est dite totalement convexe si pour tout $x, y \in A$, la géodésique d'extrémités x, y est contenue dans A. Dans la suite on désigne par $Sat_{\mathcal{F}}A$ le saturé de A par les feuilles de $\mathcal{F}$. C'est la réunion des feuilles de $\mathcal{F}$ rencontrant A.

Proposition 5.10. *Si f est une fonction basique transversalement convexe, alors on a les conditions suivantes:*

1) Si $x_0 \in Cr(f)$, alors la feuille F_{x_0} de $\mathcal{F}$ passant par x_0 est une feuille minimum absolu de f.

2) Soit L une feuille de $\mathcal{G}$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors on a les conditions suivantes:

i) l'ensemble $L^c = \{x \in L/f(x) \leq c\}$ est totalement convexe,

ii) l'ensemble $M^c = \{x \in M/f(x) \leq c\} = Sat_{\mathcal{F}}L^c$,

iii) si Σ est une géodésique fermée de L, alors f est constante sur $Sat_{\mathcal{F}}\Sigma$.

iv) l' homomorphisme

$$\pi_1(L^c) \longrightarrow \pi_1(L), \tag{5.17}$$

est surjectif.

3) Soit $c \in \mathbb{R}$. Si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique, alors M^c est totalement convexe et l' homomorphisme

$$\pi_1(M^c) \longrightarrow \pi_1(M)$$

est surjectif.

Démonstration. 1) Soit L_{x_0} la feuille de $\mathcal{G}$ passant par x_0. Soit $x \in L_{x_0}$ et $\gamma : [0,1] \longrightarrow L$ une géodésique d'origine x_0 et d'extrémité x. Posons $h = f \circ \gamma$, alors d'une part on a $h'(0) = g_Q(\nabla f(x_0), \dot c(0)) = 0$ car x_0 est un point critique de f, et d'autre part d'après (5.16) h est convexe. On en déduit que la fonction h' est positive, d'où h est croissante. Par conséquent $f(x) = h(1) \geq h(0) = f(x_0)$. D'après le théorème 5.9, F_{x_0} rencontre toutes les feuilles du feuilletage $\mathcal{G}$, alors F est une feuille minimum absolu de f et ∇f s'annule en tout point de F_{x_0}.

2) i) Soit $x, y \in L^c$, $\gamma : [0,1] \longrightarrow L$ une géodésique d'origine x et d'extrémité y et $h = f \circ \gamma$. Alors la convexité totale de L^c est conséquence de la propriété de convexité suivante de h. Pout tout $t \in [0,1]$ on a

$$h(t) \leq (1-t)h(0) + th(1) \leq c. \tag{5.18}$$

ii) L'égalité $M^c = Sat_{\mathcal{F}}L^c$ est une conséquence du théorème 5.9.

iii) En particulier si γ est une géodésique fermée de point de base x, alors pour tout $t \in [0,1]$ on a $h(t) \leq h(0)$, d'après les inégalités (5.18). On obtient le résultat en prenant un autre point de base de la géodésique.

Le point iv) est une conséquence de deux remarques suivantes:

a) si x un point de L^c, alors tout lacet de L de base x est homotope à une géodésique fermée de L passant par x,

b) l'ensemble L^c est totalement convexe donc connexe par arc.

3) Si $\mathcal{F}$ est totalement géodésique, alors en vertu de la proposition 5.1 f est convexe via la connexion riemannienne ∇^M et le résultat en découle. $\square$

Proposition 5.11. *On a les conditions suivantes:*

i) Si f est une fonction basique transversalement convexe et s'il existe deux feuilles F_1, F_2 de $\mathcal{F}$ qui soient minimums absolus de f, alors f atteint un minimum absolu sur le saturé, par des feuilles de $\mathcal{F}$, de la géodésique d'extrémités x_1, x_2, où x_i est un point arbitraire de $L \cap F_i$;

ii) Si f est une fonction basique transversalement strictement convexe et si $x \in Cr(f)$, alors F_x est l'unique feuille minimum absolu de f et F_x rencontre chaque feuille de $\mathcal{G}$ en un et un seul point.

Démonstration. i) Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow L$ la géodésique d'extrémités x_1, x_2.
En appliquant le théorème d'accroissement fini (théorème de Rolle) à $h = f \circ \gamma$, il existe $0 < t_1 < 1$ tel que $h'(t_1) = 0$. Mais alors $y_1 = h(t_1)$ est un point critique de f, donc la feuille F_{y_1} est un minimum absolu de f. Par conséquent $h(0) = h(t_1) = h(1)$. On applique de nouveau le théorème de Rolle à h sur les intervalles $[0, t_1]$ et $[t_1, 1]$. On continue ce procédé indéfiniment. On arrive à construire un sous ensemble dense $D \subset [0,1]$ de points critiques de h. Alors f sera constante sur $\gamma(D)$ qui est un sous ensemble dense de $\Sigma = \gamma([0,1])$ $\square$

Corollaire 5.12. *Si f est une fonction basique transversalement convexe, alors l'un des trois cas suivants doit se produire,*

i) $Cr(f)$ est vide,

ii) il existe une seule feuille de $\mathcal{F}$ qui soit un minimum absolu de f,

iii) f atteint son minimum absolu sur l'adhérence de la réunion des saturés, par des feuilles de $\mathcal{F}$, de certaines géodésiques de L.

Proposition 5.13. *Si le feuilletage $\mathcal{G}$ possède une feuille compacte L, alors toute fonction f basique transversalement convexe est constante sur M.*

Démonstration. Supposons que f n'est pas constante sur L. Soit alors c une valeur régulière de $f_{/L}$. L'ensemble $L_c = \{x \in L / f(x) \geq c\}$ est un compact d'intérieur non vide de L et le champ $\nabla^M f$ est rentrant par le bord $\partial L_c = f^{-1}\{c\}$. Donc si φ_t est le flot de $X = \nabla^M f$, alors $\varphi_t(L_c) \subsetneq L_c$ pour $t \geq 0$. Par conséquent si $\chi_{\mathcal{G}}$ est la forme caractéristique du feuilletage $\mathcal{G}$ qui est une forme volume du fibré $E^\perp$, alors l'application

$$h : t \longrightarrow \int_{\varphi_t(L_c)} \chi_{\mathcal{G}/L} = \int_{L_c} \varphi_t^* \chi_{\mathcal{G}/L}$$

vérifie

$$h'(0) = \int_{L_c} L_X \chi_{\mathcal{G}/L} = \int_{L_c} div_\nabla \nabla f . \chi_{\mathcal{G}/L} = -\int_{L_c} \Delta f . \chi_{\mathcal{G}/L} < 0.$$

Donc Δf prend des valeurs strictement positives, c'est à dire que la $Hess_\nabla f$ prend des valeurs strictement négatives, mais ceci contredit l'hypothèse. $\square$

Remarque 5.14. *Les conclusions de la proposition 5.13 restent encore vrai si l'on suppose seulement que la feuille L est de volume fini, c'est à dire que l'on a $\int_L \chi_{\mathcal{G}/L} < +\infty$.*

Proposition 5.15. *Soit L une feuille de $\mathcal{G}$ et f une fonction basique transversalement strictement convexe sur M. Alors on a les conditions suivantes:*

i) la feuille L ne contient aucune géodésique fermée non constante (ie non réduite à un point),

ii) si F est une feuille de $\mathcal{F}$ minimum de f, alors F est un rétracte par déformation de M.

Démonstration. i) D'après la condition iii) de la proposition 5.10, si L contient une géodésique fermée Σ non réduite à un point, alors f est constante sur $Sat_{\mathcal{F}}\Sigma$. Par conséquent la restriction de $hess_{\nabla} f$ à $Sat_{\mathcal{F}}\Sigma$ dégénère.

ii) Si F est une feuille minimum de f, alors d'après la propriété ii) de la proposition 5.11 F rencontre chaque feuille de $\mathcal{G}$ en un et un seul point. Mais toute feuille de $\mathcal{G}$ est contractile d'après i). □

De manière analogue on peut définir les fonctions transversalement concaves (resp transversalement strictement concaves). En remplaşant dans les propositions précédentes l'hypothèse feuille minimum par feuille maximum, alors on obtient des conclusions analogues.

6 Champs transverses et extrémums

Toujours on suppose que (M, g_M) est une variété riemannienne et $\mathcal{F}$ est un feuilletage g-Riemannien sur M. Soient $X \in V(\mathcal{F})$ et $\eta = \pi(X)$. On dit que η est un champ *conforme* transverse si

$$\Theta(X)g_Q = \psi g_Q \quad \text{où} \quad \psi = \frac{2}{q} div_{\nabla}\eta. \tag{6.1}$$

Nous remarquons que ψ est une fonction basique d'après le point ii) de la proposition 5.2. Si de plus ψ est constante (resp, $\psi = 0$), alors η est dit *homothétique* transverse (resp de *Killing* transverse).

On dit que η est un champ harmonique transverse (resp concourant transverse) si l'endomorphisme A_X est auto-adjoint via g_Q et $div_{\nabla}\eta = 0$ (resp $A_X = -id_Q$).

On dit que η est un champ affine transverse (resp de Jacobi transverse) si $K_X = 0$ (resp $\Delta_{_{LB}}\eta = \rho_{\nabla}\eta$).

Comme dans le cas classique (voir, [22], [23]) on peut aussi introduire la notion d'un champ affine propre transverse. Maintenant, on va étudier les propriétés de chaque champ transverse cas par cas.

6.1 Cas d'un champ de Killing transverse

Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Supposons que $\eta = \pi(X)$ est un champ de Killing transverse. Nous commenşons d'abord par donner des propositions qui caractérisent le champ η.

6.1.1 Caractérisation d'un champ de Killing transverse

Soit I la sous algèbre de Lie de $End(Q)$ formée par les endomorphismes antisymétriques via g_Q.

Proposition 6.1. *On a les conditions suivantes:*
i) l'endomorphisme $A_X \in I$ (antisymétrique via g_Q) et $div_\nabla \eta = 0$,
ii) pour tout $Z \in \Gamma(M)$, l'endomorphisme de Q

$$\nu \longrightarrow \nabla^2_{Z,\sigma(\nu)}\eta \tag{6.2}$$

est antisymétrique via g_Q,
iii) la forme bilinéaire symétrique K_X est triviale. Par conséquent η est un champ affine transverse et pour tout $\mu \in \Gamma(Q)$ on a les formules suivantes

$$R_\nabla(\eta,\mu)\nu + \nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(\nu)}\eta. \tag{6.3}$$

$$R_\nabla(\eta,\mu) = \nabla_{\sigma(\mu)}(A_X), \tag{6.4}$$

et en particulier $\nabla_X(A_X) \cong 0$.

$$Ric_\nabla(\eta,\eta) + g_Q(tr\nabla^2\eta,\eta) = 0. \tag{6.5}$$

iv) Si en plus le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal, alors $\nabla_{LB}\eta = \rho_\nabla\eta$. Par conséquent η est un champ de Jacobi transverse.

Démonstration. Le point i) est classique.
ii) Soit $Z \in \Gamma(TM)$ et $\mu,\nu \in \Gamma(Q)$. Comme A_X est antisymétrique, alors on a

$$g_Q(\nabla_{\sigma(\mu)}\eta,\nu) = -g_Q(\mu,\nabla_{\sigma(\nu)}\eta). \tag{6.6}$$

Maintenant appliquons l'opérateur ∇_Z aux membres de (6.6), on obtient

$$g_Q(\nabla_Z\nabla_{\sigma(\mu)}\eta,\nu) + g_Q(\nabla_{\sigma(\mu)}\eta,\nabla_Z\nu) = -g_Q(\nabla_Z\mu,\nabla_{\sigma(\nu)}\eta) - g_Q(\mu,\nabla_Z\nabla_{\sigma(\nu)}\eta).$$

En utilisant encore une fois que A_X est antisymétrique, il vient

$$g_Q(\nabla_Z\nabla_{\sigma(\mu)}\eta,\nu) - g_Q(\nabla_{\sigma(\nabla_Z\nu)}\eta,\mu) = g_Q(\nu,\nabla_{\sigma(\nabla_Z\mu)}\eta) - g_Q(\mu,\nabla_Z\nabla_{\sigma(\nu)}\eta).$$

D'où $\quad g_Q(\nabla^2_{Z,\sigma(\mu)}\eta,\nu) = -g_Q(\mu,\nabla^2_{Z,\sigma(\nu)}\eta).$
iii) Montrons alors que K_X est antisymétrique.
Soient μ,ν et $s \in \Gamma(Q)$. D'après l'antisymétrie de l'endomorphisme (6.2), les propriétés symétriques de la courbure et la relation (4.10) on a

$$\begin{aligned}
g_Q(\nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(\nu)}\eta,s)) &= -g_Q(\nabla^2_{\sigma(\mu),\sigma(s)}\eta,\nu)\\
&= -g_Q(\nabla^2_{\sigma(s),\sigma(\mu)}\eta,\nu) - g_Q(R_\nabla(\mu,s)\eta,\nu)\\
&= g_Q(\nabla^2_{\sigma(s),\sigma(\nu)}\eta,\mu) - g_Q(R_\nabla(\mu,s)\eta,\nu)\\
&= g_Q(\nabla^2_{\sigma(\nu),\sigma(s)}\eta,\mu) + g_Q(R_\nabla(s,\nu)\eta,\mu) - g_Q(R_\nabla(\mu,s)\eta,\nu)\\
&= -g_Q(\nabla^2_{\sigma(\nu),\sigma(\mu)}\eta,s) + g_Q(R_\nabla(\eta,\mu)s,\nu) - g_Q(R_\nabla(\eta,\nu)\mu,s).
\end{aligned}$$

D'où $\quad g_Q(K_X(\mu)\nu,s) = -g_Q(K_X(\nu)\mu,s)$ pour tout $s \in \Gamma(Q)$.
La condition iv) découle de la relation (4.12). □

Une deuxième caractérisation d'un champ de Killing transverse est la suivante.

Proposition 6.2. *X et η vérifient Les conditions suivantes:*
i) $g_Q(\nabla_X \eta, \eta) = 0$,
ii) pour tout ouvert $V \subset M$ et toute fonction basique $f \in A_b(V)$ telle que $X.f = 0$, on a $\Theta(X)\nabla f = [X, \nabla^M f] = 0$.

Démonstration. D'après le point i) de la proposition 6.1 on a A_X est antisymétrique, donc $g_Q(\nabla_X \eta, \eta) = 0$. D'autre part, pour toute fonction basique$f$ telle que $X.f = 0$ et pour tout $\mu \in \Gamma(Q)$, on a

$$\begin{aligned} 0 = \Theta(X) g_Q(\mu, \nabla f) &= X.(\sigma(\mu).f) - [X, \sigma(\mu)].f - g_Q(\mu, [X, \nabla^M f]) \\ &= -g_Q(\mu, [X, \nabla^M f]). \end{aligned}$$

Donc $[X, \nabla^M f] = 0$. □

Maintenant, on veut montrer la réciproque. Soit $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et $\xi = \pi(Y)$.

Proposition 6.3. *Si Y et ξ vérifient les conditions i) et ii) de la proposition 6.2, alors ξ est un champ de Killing transverse.*

Démonstration. Si $x \in M$ est un zéro de ξ, alors $Y(x) \in E_x$ et par suite $\Theta(Y) g_{Q_x} = 0$. Soit x un point non singulier de ξ. On choisit un voisinage V de x, distingué pour le feuilletage $\mathcal{F}$ de façon que $\xi_{/V}$ soit non singulier. Alors le fibré H de dimension $p+1$ au dessus de V engendré par $E_{/V}$ et $Y_{/V}$ est involutif car $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. On peut trouver un ouvert $U \subset V$ voisinage de x et une submersion $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ de façon que $H_{/U}$ soit le noyau de dg. Soient $g_2, ..., g_q$ les composantes de g. Alors $dg_2, ...dg_q$ sont linéairement indépendants et, pour tout $2 \leq i \leq q$, on a $Y.g_i = 0$. Donc en vertu de l'hypothèse ii) il vient

$$0 = g_Q(\mu, [Y, \nabla^M g_i]) = -(\Theta(Y) g_Q)(\mu, \nabla g_i),$$

pour tout $\mu \in \Gamma(Q_{/U})$. Mais comme la famille $\{\xi, \nabla g_2, ..., \nabla g_q\}$ est un repère de $Q_{/U}$, alors il nous reste seulement à montrer que $(\Theta(Y) g_Q)(\xi, \xi) = 0$. Or nous avons $(\Theta(Y) g_Q)(\xi, \xi) = 2 g_Q(\nabla_Y \xi, \xi) = 0$. D'où le résultat. □

Maintenant supposons que le fibré $E^\perp$ est involutif. Soit $\mathcal{G}$ le feuilletage engendré par $E^\perp$. Alors on a une troisième caractérisation d'un champ de Killing transverse.

Proposition 6.4. *Si pour un point $x \in M$ on a $\eta(x) = 0$ et $A_X(x) = 0$, alors $X \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. Le champ X se décompose en une somme direct $X = X_1 + X_2$ où $X_1 \in \Gamma(E)$ et $X_2 = \sigma(\eta) \in \Gamma(E^\perp)$. Il s'agit de montrer que X_2 est nul au voisinage de x. Soit φ_t le groupe à paramètre local de X_2 au voisinage de x. Comme $X_2(x) = 0$, alors $\varphi_t(x) = x$ pour tout réel t. Donc $(\varphi_t)_*(x) : T_x M \longrightarrow T_x M$ pour tout réel t. La condition $A_X(x) = 0$ signifie que pour tout $Y \in \Gamma(E^\perp)$, on a $\nabla^M_{Y(x)} X_2 \in E_x$. Soit $Y \in \Gamma(E^\perp)$, comme $X_2(x) = 0$ et $E^\perp$ est stable par le crochet, alors on a

$$\begin{aligned} lim_{t \to 0} \tfrac{((\varphi_t)_* Y - Y)(x)}{t} &= [X_2, Y](x) = \nabla^M_{X_2(x)} Y - \nabla^M_{Y(x)} X_2 \\ &= -\nabla^M_{Y(x)} X_2 = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que la restriction $(\varphi_t)_*(x)_{/E_x^\perp} = id_{E_x^\perp}$.

Mais $X_2 \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et $\Theta(X_2)g_Q = 0$ car g_Q est invariant par holonomie ($\mathcal{F}$ est g_M-Riemannien). Donc les difféomorphismes φ_t préservent isométriquement les feuilles de $\mathcal{F}$. De là on déduit que φ_t coıncide avec l'identité sur un voisinage de x dans la feuille L_x de $\mathcal{G}$ passant par x. Donc X_2 est nul sur ce voisinage. Maintenant par un argument de connexité on montre que η est identiquement nul sur L_x tout entier. D'où η est identiquement nul sur $Sat_{\mathcal{F}} L_x = M$. □

Soit $\mathcal{K}(\mathcal{F}) = \{X \in \mathcal{V}(\mathcal{F}) /\ \Theta(X)g_Q = 0\}$. Alors on a la suite d'inclusion de sous algèbre de Lie [13]

$$\Gamma(E) \subset \mathcal{K}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{V}(\mathcal{F}) \subset \Gamma(TM).$$

Proposition 6.5. *Si $E^{\perp}$ est involutif, alors l'algèbre de Lie quotient $\mathcal{K}(\mathcal{F})_{/\Gamma(E)}$ est de dimension $\leq \frac{d(d+1)}{2}$.*

Démonstration. En effet, soit $x \in M$. D'après la proposition 6.4, l'application de $\mathcal{K}(\mathcal{F})$ dans $Q_x \times End(Q_x)$

$$X \longrightarrow (\pi(X)(x), (A_X)_x)$$

est linéaire injective. Comme A_x est antisymétrique, alors

$$dim\mathcal{K}(\mathcal{F}) \leq dimQ_x + dimI(x) = \frac{d(d+1)}{2}.$$

□

Soit $x \in M$ et soit $C(x)$ l'ensemble des lacets en x. Pour tout $\tau \in C(x)$, le transport parallèle le long de τ est une isométrie de Q_x. L'ensemble de toutes ces isométries de Q_x constitue le groupe d'holonomie $\Psi(x)$ de point de base x de la connexion ∇ [7]. Maintenant, comme $\Psi(x) \in O(q)$ pour tout $x \in M$, alors son algèbre de Lie $\mathfrak{g}(x)$ est contenue dans $I(x)$ et elle est invariant par la connexion ∇. Soit $\mathfrak{g}^{\perp}(x)$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}(x)$ dans $I(x)$ via le produit scalaire $\langle . \rangle$ défini en (2.2).

Proposition 6.6. *Pour tout $Y \in \Gamma(E^{\perp})$, $\mathfrak{g}^{\perp}(x)$ est invariant par ∇_Y.*

Démonstration. Soit $x \in M$ et $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ un repère adapté sur un voisinage distingué U de x tel que $(\nabla_{E_i(x)} e_j) = (\nabla_{E_i} e_j)_x = 0$ pour tous $i, j = p+1, ..., n$ ([14] page 263). Soit $G \in \mathfrak{g}_{/U}$ et $B \in \mathfrak{g}^{\perp}_{/U}$. Alors pour tout $\mu \in \Gamma(Q)$ on a

$$\begin{aligned} g_Q(G_x(\mu), (\nabla_{E_i} B)_x(e_j)) &= -g_Q((\nabla_{E_i} G(\mu))_x, B_x(e_i)) \\ &- g_Q(G_x(\mu), B(\nabla_{E_i(x)} e_j)) = 0. \end{aligned}$$

□

Soit $N(\mathfrak{g}(x))$ le normalisateur de $\mathfrak{g}(x)$ dans $I(x)$. Si $X \in \mathcal{K}(\mathcal{F})$, alors $(A_X)_x \in N(\mathfrak{g}(x))$. Même on a plus, une version feuilletée d'un théorème de Kostant [16]).

Proposition 6.7. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne compacte san bord et $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien minimal sur M. Si $X \in \mathcal{K}(\mathcal{F})$, alors $(A_X)_x \in \mathfrak{g}(x)$.*

Démonstration. l'endomorphisme A_X se décompose d'une manière unique $A_X = G_X + B_X$, où $G_X \in \mathfrak{g} = \cup_{x \in M} \mathfrak{g}(x)$ et $B_X \in \mathfrak{g}^{\perp} = \cup_{x \in M} \mathfrak{g}^{\perp}(x)$. D'après la formule (6.4), il vient

$$R_{\nabla}(\eta, \pi(Y)) = \nabla_Y(A_X) = \nabla_Y(G_X) + \nabla_Y(B_X) \quad \text{pour tout} \ \ Y \in \Gamma(Q).$$

Mais alors $R_\nabla(\eta, \pi(Y))$ et $\nabla_Y(G_X)$ sont dans $\mathfrak{g}$. Donc $\nabla_Y(B_X) \in \mathfrak{g}$. D'où $(\nabla_Y(B_X))_x \cong 0$ d'après la proposition 6.6.

Soit $\nu = B_X(\eta)$. Comme B_X est parallèle le long de $E^\perp$, alors

$$\begin{aligned} div_\nabla \nu &= \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(\nabla_{E_i}\nu, e_i) = \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(B_X(\nabla_{E_i}\eta), e_i) \\ &= -\sum_{i=p+1}^{n} g_Q(B_X \circ A_X(e_i), e_i) = -trB_X \circ A_X \\ &= -trB_X^2 - trB_X \circ G_X = |B_X|^2. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{F}$ est minimal, alors le résultat découle de la formule de Green. $\square$

Nous signalons que ce résultat est généralisé au cas d'un champ de Killing transverse de norme globale fini sur une variété complète.

Proposition 6.8. *[29]. Soit (M, g_M) une variété riemannienne complète connexe orientable munie d'un feuilletage g_M-Riemannien minimal. Soit η un champ de Killing transverse de norme globale fini. Alors pour tout $x \in M$, $(A_X)_x \in \mathfrak{g}(x)$.*

6.1.2 Carré de longueur d'un champ de Killing transverse

Soient $X \in \mathcal{K}(\mathcal{F})$, $\eta = \pi(X)$ et $f = \frac{1}{2}\|\eta\|_Q^2$. On a les propriétés suivantes:

a) $\Theta(X)g_Q = 0$,

b) l'endomorphisme A_X est antisymétrique,

c) l'opérateur $K_X = 0$.

Le corollaire suivant, qui découle immédiatement de la proposition 5.3, caractérise la fonction f.

Corollaire 6.9. *On a les relations suivantes:*

$$\nabla f = A_X(\eta). \tag{6.7}$$

$$\nabla^2 f = -(R_\eta + A_X^2). \tag{6.8}$$

$$\Delta f = Ric_\nabla(\eta, \eta) - |A_X|^2. \tag{6.9}$$

Les corollaires qui suivent découlent du corollaire 6.9.

Corollaire 6.10. *On a les conditions suivantes:*

i) si $x \in Cr(f)$ et si $rg_x A_X = n$ (le rang de A_X en x est égal à n), alors $X_{/F_x} \in \Gamma(TF_x)$, où F_x est la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x.

ii) Si en un point $x \in M$ il existe $u \in T_xM$ unitaire contenu dans $Ker_x A_X$ tel que $\eta(x)$ et u soient orthogonaux, alors on a

$$Hess_\nabla f(u, u) = -2f(x)Sec_\nabla(\eta(x), u). \tag{6.10}$$

iii) La fonction f est transversalement convexe si et seulement si

$$g_Q(R_\eta(\mu), \mu) \leq \|A_X(\mu)\|_Q^2,$$

pour tout $\mu \in \Gamma(Q)$.

iv) Si la fonction f *est transversalement convexe, alors on a*

$$Ric_{\nabla}(\eta, \eta) \leq |A_X|^2.$$

v) Si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ *est non-positive* ($Sec_{\nabla} \leq 0$)*, alors* f *est transversalement convexe.*

Corollaire 6.11. *Si le fibré* $E^{\perp}$ *est involutif, alors on a les propriétés suivantes:*

i) $Cr(f)$ *contient les saturés des orbites géodésiques de* $\sigma(\eta)$ (*ici, un point singulier de* $\sigma(\eta)$ *est considéré une géodésique constante*).

ii) Si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ *est non-positive* ($Sec_{\nabla} \leq 0$)*, alors* f *est transversalement convexe et on a les propriétés de la proposition* 5.10.

6.1.3 Version feuilletée de certains résultats classiques

Le corollaire suivant, qui est conséquence du corollaire 6.11, est une version feuilleté du corollaire 4 de [26]

Corollaire 6.12. *Si le fibré* $E^{\perp}$ *est involutif et si* $Sec_{\nabla} \leq 0$*, alors l'un des trois cas suivants doit se produire:*

i) 0 *est une valeur de* f*. Donc* f *atteint son minimum absolu sur* $f^{-1}\{0\} = \eta^{-1}\{0_Q\} = \nabla f^{-1}\{0_Q\}$ *qui est un fermé saturé par des feuilles de* $\mathcal{F}$*. Si en plus* $\mathcal{F}$ *est totalement géodésique, alors* $f^{-1}\{0\}$ *est totalement convexe.*

ii) 0 *n'est pas une valeur de* f *(ie* f *est strictement positive) et* f *atteint son minimum absolu sur l'adhérence de la réunion des saturés des orbites géodésiques non constantes de* $\sigma(\eta)$.

iii) f *est strictement positive sans feuille minimum, donc* $\sigma(\eta)$ *est sans orbite géodésique.*

1) Dans les situations ii) et iii) du corollaire 6.12, on a la classe d'Euler $\mathcal{E}(Q)$ du fibré Q est nulle.

2) Si la fonction f est transversalement strictement convexe, alors f est strictement positive sans feuille minimum.

En 1946 Bochner [21] démontre que

Sur une variété riemannienne compacte sans bord à courbure de Ricci non positive (semi défini négative), tout champ de Killing est parallèle. Si en plus la courbure de Ricci est strictement positive en un point, alors tout champ de Killing est trivial.

En 1982, dans [13] les auteurs donne une version feuilletée du théorème de Bochner. Alors ici nous utilisons la relation (6.9) pour donner une autre preuve du résultat de [13].

Proposition 6.13. *Soit* (M, g_M) *une variété riemannienne orientable compacte sans bord munie d'un feuilletage* $\mathcal{F}$ g_M*-Riemannien minimal à courbure de Ricci non positive* ($Ric_{\nabla} \leq 0$)*, et soit* $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$*. Si* $\eta = \pi(X)$ *est un champ de Killing transverse, alors* η *est parallèle. Si de plus, en un point* $x \in M$ *on a* $Ric_{\nabla x} < 0$*, alors* $\eta = 0$*, c'est dire que* $X \in \Gamma(E)$.

Démonstration. Prenons $f = \frac{1}{2}\|\eta\|_Q^2$. Comme $\mathcal{F}$ est minimal et $Ric_\nabla \leq 0$, alors en vertu des relations (5.10) et (6.9) il vient

$$\Delta_M f = \Delta f = Ric_\nabla(\eta, \eta) - |A_X|^2 \leq 0.$$

La proposition 5.4 montre seulement que f est constante, mais ici on a plus que şa, en effet

$$0 = Ric_\nabla(\eta, \eta) = |A_X|,$$

par suite η est parallèle.

Si en un point $x \in M$, on a $Ric_{\nabla x} < 0$, alors nécessairement $\eta(x) = 0$, sinon on aura $Ric_\nabla(\eta, \eta) < 0$ sur un voisinage ouvert de x, mais cela contredit $Ric_\nabla(\eta, \eta) = 0$. Maintenant η est identiquement nul car f est constante. □

Corollaire 6.14. *Si M est compacte sans bord et si $\mathcal{F}$ est minimal transversalement einsteinien de constante d'Einstein $k < 0$, (en particulier si $\mathcal{F}$ est transversalement hyperbolique de codimension $q \geq 3$), alors $X \in \Gamma(E)$.*

Remarquons que les conclusions de la proposition 6.13 restent encore vraies sur une variété riemannienne sans bord (non nécessairement compact) munie d'un champ de Killing transverse à support compact. Cependant en 1984, dans [28] l'auteur généralise la proposition 6.13 au cas d'une variété riemannienne complète munie d'un champ de Killing transverse de norme globale finie. Il énonce

Proposition 6.15. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne orientable complète munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien minimal à courbure de Ricci non positive ($Ric_\nabla \leq 0$), et soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $\eta = \pi(X)$ est un champ de Killing transverse de norme globale finie, alors η est parallèle. Si de plus $Ric_{\nabla x} < 0$ en un point $x \in M$, alors $X \in \Gamma(E)$. En d'autres termes f est nulle sur M.*

Maintenant remarquons que si la courbure sectionnelle de la variété M est non positive, on a encore le théorème de Bochner. Mais si elle est strictement positive, on ne peut rien conclure. Or en 1965, Berger [2] (voir aussi [21]), sous une hypothèse supplémentaire, donne le résultat suivant:

Sur une variété riemannienne compacte de dimension paire et à courbure sectionnelle strictement positive, tout champ de Killing s'annule au moins en un point.

Dans [26] théorème 1, l'auteur montre qu'on peut étendre le théorème de [2] au cas d'une variété non compacte. Alors ici nous donnons une version feuilletée de ce théorème.

Proposition 6.16. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne orientable et $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien de codimension paire et à courbure sectionnelle strictement positive ($Sec_\nabla > 0$). Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$ et $\eta = \pi(X)$ un champ de Killing transverse. Posons $f = \frac{1}{2}\|\eta\|_Q^2$. Si F est une feuille minimum local de f, alors $X_{/F} \in \Gamma(TF)$.*

Démonstration. i) Comme f atteint un minimum local sur F, pour tout point $x \in F$ et tout $v \in Q_x$ on a

$$Hess_{x\nabla} f(v, v) = Hess_{xM} f(\sigma(v), \sigma(v)) \geq 0. \qquad (6.11)$$

Fixons x dans F et faisons d'abord les deux remarques suivantes:

1) l'endomorphisme $T = A_{X/Q_x} : Q_x \longrightarrow Q_x$ est antisymétrique via g_Q, donc si le polynôme minimal de T admet une racine réelle, alors elle est nulle. En d'autre terme si T possède un vecteur propre, alors il est dans $KerT$.

2) Le polynôme caractéristique de T est de degré pair car $dimQ_x$ est pair. Donc l'ordre de multiplicité de 0 est pair. En d'autre terme $dimKerT$ est pair.

Montrons maintenant que l'on a $\eta(x) = 0$. Supposons le contraire, alors $\eta(x) \in KerT$ car $x \in Cr(f)$ et d'après (6.7) on a

$$0 = \nabla f(x) = A_X(\eta(x)) = T(\eta(x)).$$

Soit alors $u \in KerT$ un vecteur unitaire orthogonal à $\eta(x)$. Il résulte de (6.10) que l'on a $Hess_{x\nabla} f(u,u) < 0$. Ce qui contredit (6.11). Donc η s'annule sur toute la feuille F. $\square$

La proposition suivante est une version feuilletée d'un résultat de Kobayashi ([15], page 57).

Proposition 6.17. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien à courbure de Ricci strictement négative ($Ric_\nabla < 0$), et $\mathcal{G}$ un feuilletage orthogonal à $\mathcal{F}$ via g_M. Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $\eta = \pi(X)$ est un champ de Killing transverse et si la fonction $f = \frac{1}{2}\|\eta\|^2$ atteint un maximum local sur une feuille F de $\mathcal{F}$, alors $X \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. Comme F est une feuille maximum, alors

$$\Delta f_{/F} = -trHess_{\nabla/F} f \geq 0.$$

D'un autre coté, $\eta_{/F}$ est nécessairement nul, sinon d'après la relation (6.9) on aura

$$\Delta f_{/F} = Ric_\nabla(\eta, \eta)_{/F} - |A_X|^2_{/F} < 0.$$

Mais comme F est une feuille maximum local, alors f et par suite η s'annule sur un voisinage ouvert saturé U de F. Maintenant on applique la proposition 6.4. $\square$

On peut introduire la notion d'un 2-champ de Killing transverse et donner une version feuilletée du travail de [20].

6.2 Cas d'un champ harmonique transverse

Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. On suppose que $\eta = \pi(X)$ est un champ harmonique transverse. Posons $f = \frac{1}{2}\|\eta\|^2_Q$. Comme l'endomorphisme A_X est symétrique, on a immédiatement

Corollaire 6.18. *Un champ transverse est à la fois de Killing et harmonique si et seulement si il est parallèle.*

D'autre part, comme dans la proposition 6.1 on montre facilement que l'on a

Proposition 6.19. *Pour tout $Z \in \Gamma(M)$ l'endomorphisme de Q*

$$\nu \longrightarrow \nabla^2_{Z,\sigma(\nu)}\eta \tag{6.12}$$

est auto-adjoint via g_Q. En particulier l'endomorphisme

$$K_X(\eta) = [A_X, \nabla_X] = -\nabla_X(A_X)$$

est auto-adjoint via g_Q.

Résumons les propriétés de η:
a) l'endomorphisme A_X est auto-adjoint via g_Q,
b) $\Theta(X)g_Q(\eta,\nu) = -2g_Q(A_X(\eta),\nu)$, pour tout $\nu \in \Gamma(Q)$,
c) l'endomorphisme $\nabla_X(A_X)$ est auto-adjoint via g_Q.

Proposition 6.20. *On a les relations suivantes:*

$$\nabla f = -A_X(\eta), \tag{6.13}$$

$$\nabla^2 f = -\nabla_X(A_X) + A_X^2 + R_\eta, \tag{6.14}$$

$$\Delta f = -Ric_\nabla(\eta,\eta) - |A_X|^2, \tag{6.15}$$

$$g_Q(\rho_\nabla \eta, \eta) = Ric_\nabla(\eta,\eta) = g_Q(tr\nabla^2\eta,\eta) = \frac{1}{2}g_Q(trK_X,\eta). \tag{6.16}$$

Si de plus le feuilletage $\mathcal{F}$ est minimal, alors on a la relation

$$g_Q(\Delta_{LB}\eta,\eta) = -g_Q(\rho_\nabla\eta,\eta). \tag{6.17}$$

Démonstration. Les deux premières relations sont les analogues des formules (6.7) et (6.8), elles découlent de la proposition 5.3. Tandis que la relation (6.15) est l'analogue de la formule (6.9), elle découle des équations (4.15) et (6.13). La formule (6.16) découle directement de (6.15) et (5.9). Finalement si $\mathcal{F}$ est minimal, alors on $\Delta_{LB}\eta = -tr\nabla^2\eta$. □

1) Pour tout $U \subset M$ relativement compact, on a

$$\ll \Delta_{LB}\eta, \eta \gg_U = - \ll \rho_\nabla\eta, \eta \gg_U . \tag{6.18}$$

2) Un champ transverse ξ est dit fermé si l'endomorphisme associé $A_{\sigma(\xi)}$ est symétrique ($div_\nabla\xi$ n'est pas nécessairement nul). Les relations (6.13) et (6.14) restent encore vraies pour un champ transverse fermé.

Proposition 6.21. *On a les conditions suivantes:*

i) si $x \in Cr(f)$ et si $rg_x A_X = n$ (le rang de A_X en x est égal à n), alors $X_{/F_x} \in \Gamma(TF_x)$, où F_x est la feuille de $\mathcal{F}$ passant par x.

ii) Soit $x \in Cr(f)$ tel que $f(x) > 0$. Si le rang de A_X est constant $\leq q-2$ dans un voisinage U de x, alors il existe un vecteur unitaire $u \in Q_x$ tel que

$$Hess_{x\nabla}f(u,u) = 2f(x).Sec_\nabla(\eta(x),u). \tag{6.19}$$

Démonstration. i) D'après (6.13), on a $\eta(x) \in Ker_x A_X = \{0\}$. Donc f s'annule sur la feuille passant par x.

ii) Soit ν une section unitaire du fibré local $KerA_{X/U}$, orthogonal à $\eta(x)$ en x. Alors on a

$$\nabla_X(A_X)(\nu) = \nabla_X(A_X(\nu)) - A_X(\nabla_X(\nu)) = -A_X(\nabla_X(\nu)).$$

Mais comme l'endomorphisme A_X est symétrique, il s'ensuit que

$$g_Q(\nabla_X(A_X)(\nu), \nu) = -g_Q(A_X(\nabla_X(\nu)), \nu) = -g_Q(A_X(\nu), \nabla_X(\nu)) = 0$$

Posons $u = \nu(x)$, en vertu de la formule (6.14) il vient

$$Hess_{x\nabla} f(u, u) = g_Q(R_\eta(u), u) = 2f(x).Sec_\nabla(\eta(x), u).$$

□

Le corollaire suivante est une version feuilletée du théorème 15 de [26], il découle du point ii) de la proposition 6.21.

Corollaire 6.22. *Si A_X est de rang constant $\leq q-2$ sur voisinage d'un point $x \in M$, alors on a les conditions suivantes:*

i) Si F_x est une feuille minimum local de f et si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ est strictement négative, alors $X_{/F_x} \in \Gamma(TF_x)$.

ii) Si F_x est une feuille maximum local de f et si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ est strictement positive, il existe un voisinage fermé saturé U de F_x tel que $X_{/U} \in \Gamma(\mathcal{F}_{/U})$.

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 6.11.

Proposition 6.23. *Si le fibré $E^\perp$ est involutif, alors on a les propriétés suivantes:*

i) l'ensemble des points critiques de f contient les orbites géodésiques de $\sigma(\eta)$.

ii) Si $\nabla_X(A_X) \equiv 0$ (ie A_X est parallèle le long des orbites de X) et si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ est non-négative ($Sec_\nabla \geq 0$), alors f est transversalement convexe et on a les propriétés de la proposition 5.10.

Le corollaire 6.12 reste encore vrai pour un champ harmonique transverse. Le résultat suivant est l'analogue de la proposition 6.13.

Proposition 6.24. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne orientable compacte sans bord munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien minimal à courbure de Ricci non négative ($Ric_\nabla \geq 0$), et soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $\eta = \pi(X)$ est un champ harmonique transverse, alors η est parallèle. Si de plus, en un point $x \in M$ on a $Ric_{\nabla x} > 0$, alors $X \in \Gamma(E)$.*

Corollaire 6.25. *Si M est compacte sans bord et si $\mathcal{F}$ est minimal transversalement einsteinien de constante d'Einstein $k > 0$, (en particulier s'il est transversalement elliptique de codimension $q \geq 3$), alors $X \in \Gamma(E)$.*

Il est clair que les conclusions de la proposition 6.24 et le corollaire 6.25 restent vraies si à la fois M est non compacte sans bord et η est à support compact.

La proposition suivante généralise le point ii) de la proposition 6.22.

Proposition 6.26. *Si la courbure de Ricci de $\mathcal{F}$ est définie positive ($Ric_\nabla > 0$) et si F est une feuille maximum local de f, alors $X_{/U} \in \Gamma(E_{/U})$, où U est un voisinage fermé de F saturé par des feuilles de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. D'une part, on doit avoir $\Delta f_{/F} = -trHess_\nabla f_{/F} \geq 0$ car F est maximum local. D'autre part, d'après (6.15), on a

$$\Delta f = -Ric_\nabla(\eta, \eta) - |A_X|^2 \leq 0$$

sur M. Donc nécessairement $\eta_{/F} = 0$, mais comme F est un maximum local, alors η s'annule sur un voisinage saturé de F. □

Maintenant on donne un théorème pour les champs harmoniques transverses généralisant la proposition 6.24 au cas d'une variété complète non compacte, dont la preuve est inspirée de [28].

Théorème 6.27. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne complète munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien minimal et soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $\eta = \pi(X)$ est harmonique transverse de norme globale finie et si la courbure de Ricci de $\mathcal{F}$ est non négative ($Ric_\nabla \geq 0$), alors η est parallèle. Si de plus Ric_∇ est strictement positive en un point de M ou si M est de volume infini (c'est le cas si la courbure de Ricci de M est non négative (voir [8])), alors $X \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. Soit O un point fixe de M. Pour chaque point $x \in M$, on désigne par $\rho(x)$ la distance géodésique de O à x, et on désigne par B_k la boule de centre O et de rayon $k > 0$. On choisit une fonction w $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, vérifiant:

i) $0 \leq w \leq 1$ sur $\mathbf{R}$,

ii) $w(t) = 1$ pour $t \leq 1$,

iii) $w(t) = 0$ pour $t \geq 2$,

et on pose $\varphi_k(x) = w(\frac{\rho(x)}{k})$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, φ_k est presque partout différentiable sur M et vérifie

$$0 \leq \varphi_k(x) \leq 1 \qquad \forall x \in M,$$

$$\text{supp } \varphi_k \subset B_{2k} \text{ et } \varphi_k = 1 \text{ sur } B_k,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi_k = 1 \text{ et } |d\varphi_k| \leq \frac{c}{k} \quad \text{sur } M,$$

où c est une constante positive donnée. Rappelons le lemme suivant [1].

Il existe un réel $\lambda > 0$ dépendant uniquement de w tel que

$$\|d\varphi_k \otimes \nu\|^2_{B_{2k}} \leq \frac{\lambda}{k^2} \|\nu\|^2_{B_{2k}} \quad \textit{pour tout } \nu \in \Gamma(Q). \tag{6.20}$$

On notera que si $\nu \in L^0_2(M) \cap \Gamma(Q)$, alors $\varphi_k \nu \in \Gamma_c(Q)$ et $\|\varphi_k \nu - \nu\| \longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow +\infty)$.

Il est clair que l'on a $\nabla(\varphi_k^2\eta) = 2\varphi_k d\varphi_k \otimes \eta + \varphi_k^2 \nabla\eta$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En vertu de l'inégalité de schawrtz et de la formule 6.20 il vient

$$\begin{aligned}
\ll \nabla^*\nabla\eta, \varphi_k^2\eta \gg_{B_{2k}} &= \ll \nabla\eta, 2\varphi_k d\varphi_k \otimes \eta + \varphi_k^2\nabla\eta \gg_{B_{2k}} \\
&\geq \|\varphi_k\nabla\eta\|_{B_{2k}}^2 - 2\|\varphi_k\nabla\eta\|_{B_{2k}}\|d\varphi_k \otimes \eta\|_{B_{2k}} \\
&\geq \frac{3}{4}\|\varphi_k\nabla\eta\|_{B_{2k}}^2 - 4\|d\varphi_k \otimes \eta\|_{B_{2k}}^2. \\
&\geq \frac{3}{4}\|\varphi_k\nabla\eta\|_{B_{2k}}^2 - \frac{4\lambda}{k^2}\|\eta\|_{B_{2k}}^2.
\end{aligned} \tag{6.21}$$

(Ici on utilise l'inégalité $(\frac{1}{2}s - 2t)^2 \geq 0)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$).

Comme $Ric_\nabla \geq 0$ et $\nabla^*\nabla\eta = \Delta_{LB}\eta$, alors d'après les équations (6.18) et (6.21) il vient

$$\begin{aligned}
0 \leq \varphi_k^2 \int_{B_{2k}} Ric_\nabla(\eta, \eta) &= \ll \rho_\nabla\eta, \varphi_k^2\eta \gg_{B_{2k}} \\
&\leq -\frac{3}{4}\|\varphi_k\nabla\eta\|_{B_{2k}}^2 + \frac{4\lambda}{k^2}\|\eta\|_{B_{2k}}^2.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \|\varphi_k^2\nabla\eta\|_{B_{2k}} \leq 0.$$

Donc $\nabla\eta = 0$, et par suite la norme local de η est constant. D'où le résultat.

□

Théorème 6.28. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne complète munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien minimal et soit $Y \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$. Si $\xi = \pi(Y)$ est fermé transverse de norme globale finie et si A_Y est parallèle, alors ξ est parallèle. Si de plus la variété M est de volume infini, alors $Y \in \Gamma(E)$.*

Démonstration. Considérons de nouveau la famille des fonctions $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ donnée dans la preuve du théorème 6.27, et considérons aussi un repère distingué local $(E_i)_{1\leq i\leq n}$. Comme ξ est parallèle le long des feuilles et A_X est symétrique via g_Q, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned}
\sigma(A_Y(\xi)).\varphi_k^2 &= \sum_{i=p+1}^{n} g_Q(A_Y(\xi), e_i)E_i.\varphi_k^2 \\
&= 2\sum_{i=p+1}^{n} g_Q\big(d\varphi_k(E_i).\xi, \varphi_k A_Y(e_i)\big) \\
&= -2\sum_{i=1}^{n} g_Q\big(d\varphi_k(E_i).\xi, \varphi_k\nabla_{E_i}\xi\big).
\end{aligned} \tag{6.22}$$

D'autre part comme A_Y est parallèle et symétrique via g_Q, alors d'après (2.5) il vient

$$\varphi_k^2 div_\nabla A_Y(\xi) = \varphi_k^2 tr(A_Y^2) = |\varphi_k A_Y|^2. \tag{6.23}$$

Maintenant, comme le feuilletage est minimal et le support de φ_k est contenu dans B_{2k}, en vertu des relations (6.22), (6.23) et la définition du produit scalaire il vient

$$
\begin{aligned}
0=\int_M div_\nabla\big(\varphi_k^2 A_Y(\xi)\big)d_M &= \int_{B_{2k}}\sigma\big(A_Y(\xi)\big).\varphi_k^2+\int_{B_{2k}}\varphi_k^2 div_\nabla A_Y(\xi)\\
&= -2\ll d\varphi_k\otimes\xi,\varphi_k\nabla\xi\gg_{B_{2k}}+\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}}. \qquad (6.24)
\end{aligned}
$$

Mais de l'inégalité de schawrtz et de la formule 6.20 il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}} &= 2\ll d\varphi_k\otimes\xi,\varphi_k\nabla\xi\gg_{B_{2k}}\\
&\le 2\|\varphi_k\nabla\xi\|_{B_{2k}}\|d\varphi_k\otimes\xi\|_{B_{2k}}\\
&\le \frac{1}{2}\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}}+2\|d\varphi_k\otimes\xi\|^2_{B_{2k}}\\
&\le \frac{1}{2}\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}}+\frac{2\lambda}{k^2}\|\xi\|^2_{B_{2k}}
\end{aligned}
$$

ou encore

$$\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}}\le\frac{4\lambda}{k^2}\|\xi\|^2_{B_{2k}}.$$

Mais comme ξ est de norme globale finie, alors en faisant tendre $k\longrightarrow+\infty$, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\|\varphi_k\nabla\xi\|^2_{B_{2k}}\le 0.$$

On en déduit que $\nabla\xi=0$. D'où le résultat. $\square$

Nous remarquons que l'hypothèse $div_\nabla\xi=0$ n'intervient pas dans les preuves de ces théorèmes.

6.3 Cas d'un champ conforme transverse

Soit $X\in\mathcal{V}(\mathcal{F})$. On suppose que $\eta=\pi(X)$ est un champ conforme transverse. Soit $f=\frac{1}{2}\|\eta\|^2_Q$.

Proposition 6.29. *On a les relations suivantes:*

$$\nabla f=A_X(\eta)+\psi\eta, \qquad (6.25)$$

$$X.f=\psi f, \qquad (6.26)$$

$$
\begin{aligned}
Hess_\nabla f(\nu,\nu) &= -g_Q(R_\eta(\nu),\eta)+\|A_X(\nu)\|^2_Q\\
&+ (\sigma(\nu).\psi)g_Q(\nu,\eta)-\frac{1}{2}(X.\psi)g_Q(\nu,\nu), \qquad (6.27)
\end{aligned}
$$

$$\Delta f=Ric_\nabla(\eta,\eta)-|A_X|^2+\frac{q-2}{2}X.\psi. \qquad (6.28)$$

Démonstration. i) Il est clair que (6.25) découle immédiatement de la relation (5.5). Montrons la relation (6.26).

$$\begin{aligned} X.f &= -g_Q(A_X(\eta),\eta) = g_Q(\psi\eta,\eta) - g_Q(\nabla f,\eta) \\ &= 2\psi f - X.f. \end{aligned}$$

ii) Avant de montrer la relation (6.27), faisons d'abord les remarques suivantes.
a) $K_X(\nu)$ et $[A_X,\nabla_X]$ sont des tenseurs de type (1,1),
b) d'après (4.4) on a $A_X g_Q = \Theta(X)g_Q = \psi g_Q$, par conséquent on a

$$\begin{aligned} g_Q(K_X(\nu)\nu,\eta) &= -(K_X(\nu).g_Q)(\nu,\eta) - g_Q(\nu,K_X(\nu)\eta) \\ &= (\nabla_{\sigma(\nu)}\Theta(X)g_Q)(\nu,\eta) - g_Q(\nu,K_X(\eta)\nu) \\ &= (\sigma(\nu).\psi)g_Q(\nu,\eta) - g_Q(\nu,[A_X,\nabla_X]\nu) \\ &= (\sigma(\nu).\psi)g_Q(\nu,\eta) - \tfrac{1}{2}([A_X,\nabla_X]g_Q)(\nu,\nu) \\ &= (\sigma(\nu).\psi)g_Q(\nu,\eta) - \tfrac{1}{2}(X.\psi)g_Q(\nu,\nu). \end{aligned}$$

Maintenant la formule (6.27) découle de l'équation (5.7).

iii) Pour la relation (6.28), il suffit de remarquer que ψ est une fonction basique et que l'on a $\displaystyle\sum_{i=p+1}^{n}(E_i.\psi)g_Q(\eta,e_i) = \sum_{i=1}^{n}(E_i.\psi)g_M(X,E_i) = X.\psi$. □

Une conséquence immédiate de la relation (6.27) est le

Corollaire 6.30. *f est transversalement convexe si et seulement si*

$$g_Q(R_\eta(\nu),\eta) \le \|A_X(\nu)\|_Q^2 + (\sigma(\nu).\psi)g_Q(\nu,\eta) - \frac{1}{2}(X.\psi)g_Q(\nu,\nu), \tag{6.29}$$

pour tout $\nu \in \Gamma(Q)$.

Corollaire 6.31. *i) La relation* (6.25) *montre que l'on a toujours $f^{-1}\{0\} \subset Cr(f)$.*
ii) La relation (6.26) *montre que l'on a $Cr(f) \subset f^{-1}\{0\} \cup \psi^{-1}\{0\}$.*
On en déduit que
a) si 0 n'est pas une valeur de f, alors $Cr(f) \subset \psi^{-1}\{0\}$,
b) si 0 n'est pas une valeur de ψ, alors $Cr(f) = f^{-1}\{0\}$. C'est le cas si η est homothétique transverse non de Killing transverse.

Supposons que $E^\perp$ est involutif, soit φ_u le flot de $\sigma(\eta)$ et $x_0 \in M$. Supposons que l'orbite $\alpha(u) = \varphi_u(x_0)$ est contenue dans $Cr(f)$. Dans une carte distinguée (adaptée au feuilletage $\mathcal{F}$), on peut écrire $\alpha(u) = (0, x^{p+1}(u), ...; x^n(u))$. Soit $u = \phi(t)$ un changement de paramétrisation de façon que $\gamma(t) = \alpha(\phi(t))$ soit une géodésique. Posons $y^i(t) = x^i(\phi(t))$. Si Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel de ∇^M, alors on doit avoir

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{y}^k(t) + \dot{y}^i(t)\dot{y}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \\ &= \ddot{\phi}(t)\dot{x}^k(u) + \dot{\phi}^2(t)(\ddot{x}^k(u) + \dot{x}^i(u)\dot{x}^j(u)\Gamma_{ij}^k(\alpha(u))) \\ &= (\ddot{\phi}(t) - \psi(\alpha(u))\dot{\phi}^2(t))\dot{x}^k(u) \end{aligned}$$

d'où

$$\phi(t) = a + b\int_{t_0}^{t} e^{\int_{t_0}^{r}\psi\circ\alpha(u)du}dr, \quad a,b = const. \tag{6.30}$$

Donc si $E^\perp$ est involutif, alors $Cr(f)$ contient le saturé des orbites de $\sigma(\eta)$ qui sont des géodésiques modulo la reparamétrisation (6.30).

La proposition suivante est une version feuilleté du théorème 9 de [26]. Elle s'appuie sur la relation (6.27).

Proposition 6.32. *Si le feuilletage $\mathcal{F}$ est de codimension pair, alors on a les conditions suivantes:*

i) Si la fonction f atteint un minimum local sur une feuille F de $\mathcal{F}$ et si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ est strictement positive en un point $x \in F$ ($Sec_{\nabla x} > 0$), alors le champ X est tangent à F ($X_{/F} \in \Gamma(TF)$).

ii) Si la fonction f atteint un maximum local sur une feuille F de $\mathcal{F}$ et si la courbure sectionnelle de $\mathcal{F}$ est strictement négative en point $x \in F$ ($Sec_{\nabla x} < 0$), alors il existe un voisinage U saturé de F tel que le champ restreint $X_{/U}$ est tangent à $\mathcal{F}_{/U}$, ($X_{/U} \in \Gamma(E_{/U})$).

Démonstration. i) Supposons que X n'est pas tangent à F, c'est à dire que η est sans zéro sur F. Puisque $F \subset Cr(f)$, alors d'après le point ii) du corollaire 6.31, on a $\psi_{/F} = 0$ et par conséquent

$$0 = \nabla f(y) = A_X(\eta(y)), \quad \text{pour tout} \quad y \in F.$$

Posons $T = A_{X/Q_x}$. Alors on a $\eta(x) \in KerT$ et T est antisymétrique via g_Q car $\eta_{/F}$ est un champ de Killing transverse. Par suite comme dans la preuve de la proposition 6.16 on peut construire un vecteur unitaire u dans $KerT$ orthogonal à η. Mais x est un minimum de f, en prenant d'abord dans la relation (6.27) $\nu = u$ on obtient

$$\begin{aligned} 0 \le Hess_\nabla f(u,u) &= -R_{\eta(x)}(u) - \tfrac{1}{2} X_x.\psi \\ &= -2f(x) sec_\nabla(\eta(x), u(x)) - \tfrac{1}{2} X_x.\psi, \end{aligned}$$

puis en prenant $\nu = \eta(x)$ on obtient

$$0 \le Hess_\nabla f(\eta(x), \eta(x)) = f(x) X_x.\psi.$$

Mais comme on a supposé que $f(x) > 0$, on en déduit que

$$f(x)^2 sec_\nabla(\eta(x), u(x)) \le -\frac{1}{4} f(x) X_x.\psi \le 0, \tag{6.31}$$

or ceci contredit que $Sec_{\nabla x} > 0$.

ii) Si l'on suppose encore que $\eta_{/F}$ est sans zéro, alors $f(x) > 0$ et le raisonnement de i) conduit à l'inégalité

$$f(x)^2 sec_\nabla(\eta(x), u(x)) \ge -\frac{1}{4} f(x) X_x.\psi \ge 0,$$

ce qui contredit $Sec_{\nabla x} < 0$. Mais comme f atteint un maximum local sur F, alors elle doit s'annuler sur un voisinage saturé de F. □

Maintenant soit $\kappa : \Gamma(Q) \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique affine définie par

$$\kappa(\nu) = \frac{2-q}{2}\sigma(\nu).\psi - Ric_\nabla(\nu, \nu).$$

Alors en vertu de la relation (6.28), il vient

$$\Delta f = -|A_X|^2 - \kappa(\eta). \tag{6.32}$$

Proposition 6.33. *Si $\mathcal{F}$ est de codimension $q \geq 2$ à courbure de Ricci strictement négative en point x ($Ric_{\nabla x} < 0$)et si la fonction f atteint un maximum local sur la feuille F_x passant par x, alors il existe un voisinage U saturé de F_x tel que le champ restreint $X_{/U}$ est tangent à $\mathcal{F}_{/U}$, ($X_{/U} \in \Gamma(E_{/U})$).*

Démonstration. Comme F_x est une feuille maximum de f, alors on a
$Hess_\nabla f_{/F_x} \leq 0$ et par suite $\Delta f_{/F_x} \geq 0$. D'autre part, on a l'inégalité

$$0 \geq Hess_\nabla f(\eta(x), \eta(x)) = f(x) X_x.\psi.$$

Par conséquent si $f_{/F_x} > 0$, alors on a $X_x.\psi \leq 0$. Mais comme $Ric_{\nabla x} < 0$ et $q \geq 2$, il s'ensuit que $\kappa(\eta(x)) > 0$, et en vertu de la relation (6.32) on obtient $\Delta f_{/F_x} < 0$. D'où la contradiction. □

En faisant jouer à κ le rôle que joue Ric_∇ dans la proposition 6.24, alors en vertu de la relation (6.32) on obtient

Proposition 6.34. *Si M est compacte sans bord et si $\mathcal{F}$ est minimal et η est positif via κ (ie $\kappa(\eta) \geq 0$), alors on les conditions suivantes:*
i) la fonction f est constante, et par suite $C_r(f) = M$.
ii) η est parallèle ($A_X \cong 0$),
iii) η est isotrope via κ ($\kappa(\eta) = 0$).
Si de plus, en un point $x \in M$ on a $\kappa_x > 0$, alors $X \in \Gamma(E)$.

Corollaire 6.35. *Sous les hypothèses de la proposition 6.34 on a les conditions suivantes:*
i) si 0 n'est pas une valeur de f, alors ψ est identiquement nulle et par suite η est un champ de Killing transverse.
ii) Si en un point $x \in M$ on a $Ric_{\nabla x} < 0$, alors $X \in \Gamma(E)$.

Démonstration. i) Si 0 n'est pas une valeur de f, alors $\psi^{-1}\{0\} \supset C_r(f) = M$ en vertu du corollaire 6.31.
ii) Si 0 n'est pas une valeur de f, alors η est un champ de Killing transverse non singulier d'après i). Mais cela contredit la proposition 6.13. □

Maintenant si η est un champ homothétique transverse ($div_\nabla \eta$ est constante), alors les relations (6.27) et (6.28) montrent que l'étude des extrémums se ramène à celle d'un champ de Killing transverse. On finit cette partie par rappeler le résultat suivant.

Proposition 6.36. *[9] Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien sur une variété riemannienne (M, g_M). Tout champ homothétique transverse de $\mathcal{F}$ est affine transverse.*

6.4 Cas d'un champ affine et de Jacobi transverses

Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, $\eta = \pi(X)$ et $f = \frac{1}{2}\|\eta\|_Q^2$. Considérons l'endomorphisme $T \in End(Q)$ défini par $T(\nu) = K_X(\nu)\eta$. On dit que η est semi-affine transverse, si $trT = trK_X = 0$. Il est clair que tout champ affine transverse est semi-affine transverse. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 6.37. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage g_M-Riemannien minimal sur une variété riemannienne (M, g_M) sans bord, et soit X un automorphisme infinitésimal de $\mathcal{F}$ tel que $\eta = \pi(X)$ soit à support compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*
i) η est un de Killing transverse.
ii) η est semi-affine transverse.
iii) η est affine transverse.
iv) η est de Jacobi transverse et $div_\nabla \eta = 0$.
v) η est homothétique transverse.

Démonstration. Montrons que ii) implique i). Comme $trT = trK_X = 0$, alors en vertu des relations (4.11) et (4.18) il s'ensuit que l'on a les formules suivantes

$$Ric_\nabla(\eta, \eta) + trA_X^2 = div_\nabla \nabla_X \eta \tag{6.33}$$

et

$$Ric_\nabla(\eta, \eta) + g_Q(tr\nabla^2\eta, \eta) = 0. \tag{6.34}$$

Maintenant les relations (4.23) et (6.33) entraînent que $\int_M (div_\nabla \eta)^2 = 0$. Par suite $div_\nabla \eta = 0$. Donc, en vertu des équations (4.24) et (6.34) on obtient $\int_M |\Theta(X)g_Q|^2 d_M = 0$, d'où $\Theta(X)g_Q = 0$.

Maintenant l'implication iv)$\Longrightarrow$ii) découle immédiatement des relations (4.12) et (4.15). Finalement iv) implique iii) d'après [9]. □

Donc l'étude des extrémums via à un champ semi affine transverse est intéressante si le feuilletage n'est pas minimal, ou si le champ n'est pas à support compact. Mais d'après la relation (5.8), si η est semi affine, alors on a $\Delta f = Ric_\nabla(\eta, \eta) - |A_X|^2$ qui est justement la formule (6.9), par conséquent on a

Proposition 6.38. *Soit (M, g_M) une variété riemannienne munie d'un feuilletage $\mathcal{F}$ g_M-Riemannien à courbure de Ricci strictement négative ($Ric_\nabla < 0$). Si η est un champ semi affine transverse (non nécessairement de Killing transverse)et si la fonction $f = \frac{1}{2}\|\eta\|^2$ atteint un maximum local sur une feuille F de $\mathcal{F}$, alors il existe un voisinage U de F saturé tel que $X_U \in \Gamma(E_{/U})$.*

Maintenant si η est affine transverse (non nécessairement de Killing transverse), alors la relation (5.7) devient

$$Hess_\nabla f(\nu, \nu) = -g_Q(R_\eta(\nu), \eta) + \|A_X(\nu)\|_Q^2.$$

qui est justement la relation (6.8). Malgré que l'on a cette formule, la proposition 6.16 ne reste pas vrai car sa preuve s'appuie sur une hypothèse qui caractérise un champ de Killing transverse à savoir A_X est antisymétrique via g_Q. Par contre le corollaire 6.10, privé de la condition i), reste encore vrai.

Finalement nous remarquons que le théorème 6.15 reste encore vrai si η est seulement un champ de Jacobi transverse. C'est à dire que l'hypothèse $div_\nabla \eta = 0$ n'intervient pas dans la preuve.

6.5 Cas d'un champ concourant transverse

Soit $X \in \mathcal{V}(\mathcal{F})$, $\eta = \pi(X)$ et $f = \frac{1}{2}\|\eta\|_Q^2$. Nous supposons que η est un champ concourant transverse.

Proposition 6.39. *On a les conditions suivantes:*

$$\nabla f = \eta, \qquad \nabla^2 f = id_Q, \qquad Hess_\nabla f = g_Q, \quad et \qquad \Delta f = q. \tag{6.35}$$

où q est la codimension de $\mathcal{F}$.

Démonstration. Soit $\nu \in \Gamma(Q)$, on a

$$g_Q(\nabla f, \nu) = \sigma(\nu).f = -g_Q(A_X(\nu), \eta) = g_Q(\eta, \nu).$$

D'où la première égalité. Passant à la deuxième formule,

$$\nabla^2 f(\nu) = \nabla_{\sigma(\nu)} \nabla f = -A_X(\nu) = \nu.$$

Maintenant les deux dernières relations sont immédiates. □

Le corollaire suivant décrit les propriétés qui découlent d'un champ concourant transverse.

Corollaire 6.40. *On a les conditions suivantes:*

i) $C_r(f) = f^{-1}\{0\} = \eta^{-1}\{0_Q\}$, (car $\nabla f = \eta$),

ii) f est transversalement strictement convexe, (car $Hess_\nabla f = g_Q$). Par conséquent on a les conditions suivantes:

a) $sup_{x\in M}\ f(x) = +\infty$, et par suite la variété M n'est pas compacte.

b)) Si $x \in C_r(f)$, alors $C_r(f) = F_x$, par suite F_x est une feuille minimum absolu global et $f_{/F_x} = 0$, (d'après la proposition 5.10).

iii) Si le fibré orthogonal $E^\perp$ est involutif, alors le feuilletage qu'il engendre ne possède pas une feuille de volume fini, (d'après la remarque 5.14).

iv) Si la variété M est complète et si le fibré orthogonal $E^\perp$ est involutif, alors on a les conditions de la proposition 5.15.

References

[1] A. Andreotti and E. Vesentini, *Carlman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 25 (1965), 313-362.

[2] M. Berger, *Trois remarques sur les variétés riemannienne à courbure positive,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér.A-B, 263 (966), 76-78.

[3] M. Berger, P, Gauduchon et E. Mazet, *le spectre d'une variété Riemanniènne,* lectures notes in Mathematics. Vol. 194, Springer, Berlin, 1971.

[4] R.Bishop and B,O.'Neill, *Manifolds of negative curvature,* Trans. Amer. Math. Soc. 145 (1969), 1-49.

[5] R.A. Blumenthal, *Transversaly homogeneous foliations,* Ann. Institut Fourier 29 (1979), 143-158.

[6] R.A. Blumenthal, *Riemannian foliation with parallel curvature,* Nagoya Math J. 90 (1983), 145-153.

[7] R.A. Blumenthal and J.J. Hebda, *De Rham decomposition theorems for foliated manifolds,* Ann. Institut Fourier 33, 2 (1983), 183-198.

[8] E. Calabi, *On manifolds with non negative Ricci curvature II,* Notices Amer. Math. Soc. 22 (1975) A205.

[9] M.A. Chaouch and N. Hamza, *On some infintesimal automorphism of Riemannian foliation,* Proyecciones 26, 1 (2007) 1-25.

[10] C. Godbillon, *Feuilletages, etudes géométrique*, Birkaüser Verlag 1991.

[11] L. Jiancheng and Z. Qiuyan,*The bounds for the squared norm of the second fundamental form the minimal submanifolds of* $\mathbb{S}^{n+p}$, Balkan J. Geom. Appl, 12, 2 (2007), 64-72.

[12] D. Johnson and L. Whitt, *Totally geodesic foliations,* Journal of Diff. Geom, 15 (1980), 225-235.

[13] F. Kamber, Ph. Tondeur, *Harmonic Foliations,* lectures notes in Mathematics 949. Springer-Verlag (1982), 87-121.

[14] F. Kamber, Ph. Tondeur and G. Toth, *Transversal jacobi fields for Riemannian foliation*, Mich. Math. J. 34 (1987), 261-266.

[15] S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry,* Springer, 1972.

[16] S. Kobayashi-K. Nomizu, *Fondations of differential geometry,* Vol I Interscience tracts in pure and applied mathematics. 15 Interscience publishers New-York 1963.

[17] S Lang, *Fundamentals of differentials geometry*, Graduate texts in Mathematics 191 Springer, 1999.

[18] A. Lichnerowicz, *Géométrie des Groupes des Transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, **III**, Dunod, Paris, 1958.

[19] J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes,* Ann. of Math. studies N^{o}76, Princeton U.P (Princeton) 1974.

[20] T. Oprea, *2-Killing vector fields on Riemannian manifolds*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 13, 1 (2008), 87-92.

[21] P. Peterson, *Riemannian Geometry,* Graduate texts in Mathematics 171, Springer, 1998.

[22] G. Shabbir, *Proper affine vector fields in Bianchi type I space-times*, Differential Geometry - Dynamical Systems, 9 (2007), 138-148.

[23] G. Shabbir, *Proper affine vector fields in Bianchi type V space-times*, Differential Geometry - Dynamical Systems, 10 (2008), 288-294.

[24] Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds,* Universitex, Springer-Verlag, 1988.

[25] Ph. Tondeur, *Geometry of foliations,* Birka user-Verlag, 1997.

[26] C. Udriste , *Extremum points of square lengths of some vector fields,* Bull Math de la Soc. Sci. Math de la RS. de Roumanie. Tome 30 (78), nr. 4. (1986), 361-370.

[27] C. Udriste , *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1994.

[28] S. Yorozu, *The non-existence of Killing vector fields,* Tohoku Math J. 36 (1984), 99-105.

[29] S. Yorozu, A_ν*-operator on complete foliated Riemannian manifolds,* Israel J. Math., 56, (1986), 349-354.

[30] S. Zhu, *The comparaison geometry of Ricci curvature*, Comparaison Geometry MSRI Publications. 30 (1997), 221-262.

Author's address:

Mohamed A. Chaouch
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Bizerte,
Zarzouna 7021 Bizerte Tunisie.
email: MohamedAli.Chaouch@fst.rnu.tn