

# INTÉGRALES HELLINGER POUR LES FONCTIONS DE L'ENSEMBLE

George Vraciu

## Abstract

The aim of this paper is to extend a result of Salehi from [3] concerning the Hellinger integrals with matrice measures.

## Résumé

Dans cet ouvrage on généralise un résultat de Salehi, contenu en [3], visant les intégrales Hellinger par rapport aux mesures matricielles.

**AMS subject classification:** 28A25, 28B05

**Key words:** l'intégrale Hellinger, mesures matricielles

I.I. Alexandrov [1] considère les intégrales de type Hellinger pour les fonctions vectorielles finit aditives de l'ensemble. L'intégrale introduite par Alexandrov se trouve, par rapport à l'intégrale Hellinger classique, dans la même relation dans laquelle l'intégrale de type Lebesgue introduite en [2] se trouve par rapport à l'intégrale de Riemann. Alexandrov utilise l'intégrale qu'il a introduit pour la représentation de certaines fonctionelles linéaires ou de certains opérateurs linéaires définits sur des espaces des fonctions aditives de l'ensemble.

H. Salehi [3] définit une intégrale Hellinger pour des mesures ayant comme valeurs des matrices et généralise quelques résultats appartenant à V. Grenander et G. Szegö [4] et aussi à E.W. Hobson [5]. L'intégrale introduite par Salehi joue un rôle important

---

Editor Gr.Tsagas *Proceedings of the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras, 1995*, 147-150

©Balkan Society of Geometers, Geometry Balkan Press

dans la théorie des processus stochastiques, permettant la généralisation de quelques résultats de P. Masani [6] et en particulier de A.N. Kolmogorov [7].

Dans la première partie de cet ouvrage on généralise un résultat de Salehi, contenu en [3], visant les intégrales Hellinger par rapport aux mesures matricielles. On a comme point de vue les mesures ayant des valeurs dans l'espace des opérateurs nucléaires, qui se caractérisent par la propriété d'avoir une trace finie. Cette propriété, est évidente dans le cas des matrices d'ordre fini. Ici on étudie l'intégrabilité carrée Hellinger des mesures nucléaires par rapport à une mesure nucléaire positive.

En [3] on étudie l'intégrabilité carrée Hellinger des mesures matricielles par rapport à une mesure hermitienne positivement définie. Une des généralisations naturelles de la mesure matricielle est la mesure qui a comme valeurs des opérateurs nucléaires dans un espace de Hilbert. En partant de cette idée on a proposé de généraliser les résultats de l'article cité, étudiant l'intégrabilité carrée Hellinger des mesures nucléaires par rapport à une mesure nucléaire positive.

Soit:

1.  $M, N, F$  des mesures ayant des valeurs opérationnelles sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{B})$ ,  $\mathcal{B}$  étant une  $\sigma$ -algèbre de parties de  $\Omega$ , plus précisément  $M, N, F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{N}(X)$ , où  $\mathcal{N}(X)$  est l'espace des opérateurs nucléaires qui actionnent dans l'espace séparable Hilbert  $X$  ;
2.  $\nu$  et  $\mu$  deux mesures  $\sigma$ -finies réelles sur  $\mathcal{B}$  par rapport aux quelles  $M, N, F$  sont absolument continues.

On va noter par  $\frac{dM}{d\mu}$  et  $\frac{dM}{d\nu}$  la dérivée de Radon-Nikodym de la  $M$  par rapport à  $\mu$  et respectivement à  $\nu$ . (La fonction  $\frac{dM}{d\mu}$  satisfait l'égalité  $M(E) = \int \frac{dM}{d\mu} d\mu, \forall E \in \mathcal{B}$ ).

Supposant que  $F$  est une mesure fixée, positivement définie, on va noter par  $\left(\frac{dF}{d\mu}\right)^{-1}(\omega)$  l'invers généralisé de l'opérateur  $\frac{dF}{d\mu}(\omega)$ .

On a :

1. a)  $\int_{\Omega} \left(\frac{dM}{d\mu}\right) \left(\frac{dF}{d\mu}\right)^{-1} \left(\frac{dN^*}{d\mu}\right) d\mu$  existe si et seulement si  $\int_{\Omega} \left(\frac{dM}{d\nu}\right) \left(\frac{dF}{d\nu}\right)^{-1} \left(\frac{dN}{d\nu}\right) d\nu$  existe.

2. b) S'il existe ces deux intégrales alors elles sont égaux.

**Définition 1** i) On dit que  $(M, N)$  est *intégrable au sens de Hellinger* par rapport à  $F$  si existe

$$\int_{\Omega} \left(\frac{dM}{d\mu}\right) \left(\frac{dF}{d\mu}\right)^{-1} \left(\frac{dN^*}{d\mu}\right) d\mu$$

Nous écrivons

$$\int_{\Omega} \frac{dM dN^*}{dF} = \int_{\Omega} \left( \frac{dM}{d\mu} \right) \left( \frac{dF}{d\mu} \right)^{-1} \left( \frac{dN^*}{d\mu} \right) d\mu$$

ii) On va noter par  $H_{2,F}$  l'espace de toutes les mesures opérationnelles définies sur  $\mathcal{B}$  avec des valeurs dans  $\mathcal{N}(X)$  pour lesquelles l'intégrale

$$\int_{\Omega} \frac{dM dM^*}{dF}$$

existe et est un opérateur nucléaire.

### Lemme

1. Si  $M, N \in H_{2,F}$  alors  $(M, N)$  est intégrable au sens de Hellinger par rapport à  $F$ ;
2. Si  $M \in H_{2,F}$  et  $A$  est un opérateur linéaire et borné, alors  $AM \in H_{2,F}$  ;
3. Si  $M, N \in H_{2,F}$  alors  $\alpha M + \beta N \in H_{2,F}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ;
4.  $((M, N))_F = \tau(M, N)_F$  est un produit intérieur sur  $H_{2,F}$  où  $\tau$  est la trace de l'opérateur  $(M, N)_F$ .

On va noter par  $L_{2,F}$  l'espace des fonctions  $\phi : \Omega \rightarrow \mathcal{N}(X)$  pour lesquelles l'intégrale  $\int_{\Omega} \phi dF \phi^*$  existe. Si  $\phi, \psi \in L_{2,F}$  alors l'intégrale

$$(\phi, \psi)_F = \int_{\Omega} \phi \frac{dF}{d\mu} \psi^* d\mu$$

existe. Cet espace est un espace de Hilbert vis-à-vis du produit intérieur

$$((\phi, \psi))_F = \tau \int_{\Omega} \phi dF \psi^*$$

### Théorème

1.  $\phi, \psi \in L_{2,F}$ ;
2. Pour  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $M(B) = \int_{\Omega} \phi dF$  et  $N(B) = \int_{\Omega} \psi dF$ , alors  $(M, N)$  est intégrable au sens de Hellinger par rapport à  $F$  et en plus  $(M, N)_F = (\phi, \psi)_F$  ;
3. Les espaces  $H_{2,F}$  et  $L_{2,F}$  sont isomorphes par la transformation

$$T : L_{2,F} \rightarrow H_{2,F}, T\psi = M_{\psi}, \forall \psi \in L_{2,F} \text{ et } M_{\psi}(B) = \int_B \psi dF, B \in \mathcal{B}.$$

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] **Alexandrov, I.I.**, Abstractnii integral Hellingera. Izvestia vîssih ucebnâh zavedenii, no. 4 (59), 1967.
- [2] **Dunford, N. & Schwartz, J.**, Linear operators. Part. 1, New York, 1958.
- [3] **Salehi, H.**, The Hellinger square-integrability of matrix-valued measures with respect to a non-negative hermetian measure. Arkiv för Math. Band. T. no.21, 1967.
- [4] **Grenander, V. & Szegö, G.**, Toeplitz forms and their applications. California, 1958.
- [5] **Hobson, E.W.**, On Hellinger's integrals. Proc. London Math. Soc. 2. no.18, 1919.
- [6] **Masani, P.**, The prediction theory of multivariate stochastic processes III. Actia Math. 104, 1960.
- [7] **Kolmogorov, A.N.**, Stationary sequences in Hilbert space. Bull. Math. Univ. Moscow, 2, no.6, 1969.
- [8] **Vraciu, G.**, La représentation intégrale des opérateurs continus définis sur l'espace  $ba(S, \Sigma, X, \tau)$ . Actas del V Congreso de la Agrupacion de Matematicos de Expresion Latina, Madrid, 1978, pg. 377-380.
- [9] **Vraciu, G.**, Integrabilitatea pătratică Hellinger a măsurilor nucleare în raport cu o măsură nucleară pozitivă. Studii și cercetări matematice. Tom. 23 nr.8, 1971.
- [10] **Vraciu, G.**, Hellinger integrals for vector functions. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, Arizona State University, 1995. (19 pg).

Author's address

George Vraciu

*Dept. de Math., Université de Craiova, Roumanie*

*e-mail address: vraciu@udjmath1.sfos.ro*