Les invariants des mouvements

Maïdo Rahula

Abstract. On étudie les propriétés communes pour les invariants des jets des applications, polynômes et matrices par rapport aux transformations des flots et aux mouvements d'ordres supérieurs.

M.S.C. 2000: 78M05, 58A20, 22E45.
Key words: moments in probalities and mechanics, adjoint representations of groups.

1 Les moments des probabilités

Dans la théorie des probabilités pour la variable aléatoire X sont connus les moments initiaux ν_k et centraux μ_k , par E est notée la valeur moyenne de X:

$$\begin{aligned} \nu_k &= \mathrm{E}X^k, \\ \mu_k &= \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^k, \end{aligned}$$

les seconds sont exprimés en fonction des premiers[1] :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2, \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3, \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4, \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

Si les moments initiaux sont compris comme coefficients d'un polynôme u_t, alors les moments centraux coïncident avec ses invariants. Montrons le pour les polynômes des degrés $k = 2, 3, 4$.

$\boxed{\text{k=2}}$

En posant

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.12, No.1, 2007, pp. 145-153.

[1]V. [1], p. 85; [2], p. 99.

$$u_t = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}(X+t)^2, \qquad u = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}X^2 = \frac{1}{2}\,\nu_2,$$
$$u_t' = \mathrm{E}(X+t), \qquad u' = \mathrm{E}X \quad = \nu_1,$$

nous obtenons la fonction quadratique u_t avec sa dérivée u_t' :

$$u_t = u + u't + \frac{t^2}{2},$$
$$u_t' = u' + t.$$

Après la substitution $t \rightsquigarrow -u'$ ça nous donne un invariant de fibre identique à un facteur numérique près au discriminant de u_t et au moment central μ_2 :

$$\Delta = u - \frac{1}{2}(u')^2, \qquad \Delta = \frac{1}{2}\,\mu_2.$$

$\boxed{\text{k=3}}$

En posant

$$u_t = \frac{1}{3!}\,\mathrm{E}(X+t)^3, \qquad u = \frac{1}{3!}\,\mathrm{E}X^3 = \frac{1}{3!}\,\nu_3,$$
$$u_t' = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}(X+t)^2, \qquad u' = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}X^2 = \frac{1}{2}\,\nu_2,$$
$$u_t'' = \mathrm{E}(X+t), \qquad u'' = \mathrm{E}X \quad = \nu_1,$$

on obtient la fonction cubique u_t et les dérivées u_t', u_t'' :

$$u_t = u + u't + u''\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!},$$
$$u_t' = u' + u''t + \frac{t^2}{2},$$
$$u_t'' = u'' + t.$$

La substitution $t \rightsquigarrow -u''$ donne deux invariants de fibre identiques aux facteurs numériques près aux moments centraux μ_2 et μ_3 :

$$i_0 = u - u'u'' + \frac{1}{3}\,(u'')^3, \qquad i_0 = \frac{1}{3!}\,\mu_3,$$
$$i_1 = u' - \frac{1}{2}\,(u'')^2, \qquad i_1 = \frac{1}{2}\,\mu_2.$$

Le discriminant de la fonction u_t s'exprime par les invariants i_0, i_1 et les moments μ_2, μ_3:

$$I = (3i_0)^2 + (2i_1)^3 = \frac{1}{4}\,\mu_3^2 + \mu_2^3.$$

$\boxed{\text{k=4}}$

En posant

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{4!}\,\mathrm{E}(X+t)^4, & u &= \frac{1}{4!}\,\mathrm{E}X^4 = \frac{1}{4!}\,\nu_4\\
u'_t &= \frac{1}{3!}\,\mathrm{E}(X+t)^3, & u' &= \frac{1}{3!}\,\mathrm{E}X^3 = \frac{1}{3!}\,\nu_3,\\
u''_t &= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}(X+t)^2, & u'' &= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}X^2 = \frac{1}{2}\,\nu_2,\\
u'''_t &= \mathrm{E}(X+t), & u''' &= \mathrm{E}X \quad = \nu_1,
\end{aligned}$$

on obtient u_t, u'_t, u''_t et u'''_t:

$$\begin{aligned}
u_t &= u + u't + u''\frac{t^2}{2} + u'''\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!},\\
u'_t &= u' + u''t + u'''\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!},\\
u''_t &= u'' + u'''t + \frac{t^2}{2},\\
u'''_t &= u''' + t.
\end{aligned}$$

La substitution $t \rightsquigarrow -u'''$ donne les invariants de fibre I_0, I_1, I_2 pour le polynôme du 4-ème degré u_t identiques aux facteurs numériques près aux moments centraux μ_4, μ_3, μ_2:

$$\begin{aligned}
I_0 &= u - u'u''' + \frac{1}{2}\,u''(u''')^2 - \frac{1}{8}\,(u''')^4, & I_0 &= \frac{1}{4!}\,\mu_4,\\
I_1 &= u' - u''u''' + \frac{1}{3}\,(u''')^3, & I_1 &= \frac{1}{3!}\,\mu_3,\\
I_2 &= u'' - \frac{1}{2}\,(u''')^2, & I_2 &= \frac{1}{2}\,\mu_2.
\end{aligned}$$

Ainsi les moments centraux correspondent aux invariants[2] des polynômes :

$$\begin{aligned}
\mu_1 &\rightsquigarrow 0,\\
\mu_2 &\rightsquigarrow \Delta, i_1, I_2,\\
\mu_3 &\rightsquigarrow i_0, I_1,\\
\mu_4 &\rightsquigarrow I_0.
\end{aligned}$$

Nous verrons dans la suite que cette correspondance est encore plus profonde.

D'abord, soit marqué qu'il y a une analogie entre les moments des probabilités et ceux de la mécanique. À l'espérance mathématique $\nu_1 = \mathrm{E}X$ correspond le moment statistique dans la mécanique, au moment central (dispersion) $\mu_2 = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$ le moment d'inertie etc. Pour le trinôme $u_t = u + u't + u''\frac{t^2}{2}$, les coefficients u, u' et u'' interprétés comme le chemin, la vitesse et l'accélération initiaux, les termes uu'' et $\frac{1}{2}(u')^2$ du discriminant $\Delta = uu'' - \frac{1}{2}(u')^2$ expriment respectivement l'énergie potentielle et l'énergie cinétique, et l'invariance de Δ, i. e. $\Delta' = 0$, n'est rien que la loi de conservation de l'énergie.

[2]Tous les invariants sont calculés suivant la loi exponentielle dans l'espace des jets infinis des applications, v. [4] , [5].

2 Les mouvements

L'application $f : M_1 \to M_2$ se transforme sous les transformations a et b dans les espaces M_1 et M_2 :

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \\ a \big\downarrow & & \big\downarrow b \\ M_1 & \xrightarrow{\tilde{f}} & M_2 \end{array} \qquad\qquad \boxed{f \rightsquigarrow \tilde{f} = bfa_{-1}}$$

On peut dire ainsi de la transformation d'une application $f : M \to M$ sous la transformation $a : M \to M$,

$$f \rightsquigarrow \tilde{f} = af\,a_{-1}\,,$$

ou bien de la transformation d'une transformation $b : M \to M$,

$$b \rightsquigarrow \tilde{b} = aba_{-1}.$$

On peut parler de la transformation d'un champ vectoriel Y et de son flot b_τ sous la transformation $a : M \to M$,

$$Y \rightsquigarrow \widetilde{Y} = TaY\,, \qquad b_\tau = \exp\,\tau Y \rightsquigarrow \tilde{b}_\tau = ab_\tau a_{-1} = \exp\,\tau\, TaY.$$

Ainsi le flot $b_\tau = \exp\,\tau Y$ se transforme dans le flot $a_t = \exp\,tX$ et généralement il est possible d'introduire les *mouvements d'ordres supérieurs.*

Le vecteur tangent à la variété M, l'élément de l'espace tangent T_uM, est une fixation du point mobile u, un stop-cadre du point u en mouvement. De même le champ vectoriel sur la variété M est comme un stop-cadre du flot dans M. L'élément du fibré tangent T^kM, un k-secteur d'après White [6] , est compris comme un stop-cadre du mouvement d'ordre k dans M.

Le flot $a_t = \exp\,tX$ peut être levé par le foncteur itéré T^k à l'étage T^kM,

$$T^k : \quad a_t = \exp\,tX \quad \rightsquigarrow \quad T^ka_t = \exp\,tX^{(k)}\,,$$

et le champ vectoriel X se leve dans le champ vectoriel $X^{(k)}$ sur T^kM , en faisant mouvoir les $(k-1)$-secteurs dans le flot $T^ka_t,\ k = 1, 2, \ldots$.

Soit G le groupe de transformations de l'espace M. On fait correspondre à chaque élément $a \in G$ l'automorphisme intéreur

$$A_a : G \to G : b \mapsto aba_{-1},$$

élément du groupe adoint G_1, et on parle de la représentation adjointe de G,

$$\tau_1 : G \to G_1 \,:\, a \to A_a\,.$$

Considérons la suite de groupes et d'homomorphismes

$$G \xrightarrow{\tau_1} G_1 \xrightarrow{\tau_2} G_2 \xrightarrow{\tau_3} \ldots \to G_{k-1} \xrightarrow{\tau_k} G_k\,,$$

$$G_i = (G_{i-1})_1, \quad \tau_i = (\tau_{i-1})_1, \;\; i = 1, 2, \ldots, k\,,$$

avec les noyaux $Z_i = \mathrm{Ker}(\tau_i \circ \ldots \circ \tau_2 \circ \tau_1)$ dans le groupe G :

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_{k-1} \subset Z_k.$$

Les éléments de Z_k sont considérés comme symétries des mouvements d'ordre k dans l'espace M.

Exemple. Le groupe linéaire $GL(2, \mathbb{R})$, avec les matrices régulières pour éléments

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

actionne sur lui-même par les translations à cauche (à droite) et par les automorphismes intérieurs. Les bases invariantes à cauche (à droite), champs de repères et corepères,

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 \\ \omega^3 & \omega^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} da_1 & da_2 \\ da_3 & da_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{X}_1 & \widetilde{X}_2 \\ \widetilde{X}_3 & \widetilde{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\omega}^1 & \widetilde{\omega}^2 \\ \widetilde{\omega}^3 & \widetilde{\omega}^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 & da_2 \\ da_3 & da_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{-1},$$

où $\partial_i = \frac{\partial}{\partial a_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, aussi les opérateurs adjoints :

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_3 & Y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ \partial_3 & \partial_4 \end{pmatrix},$$

sont déterminés sur $GL(2, \mathbb{R})$. Les opérateurs Y_i sont dépendants linéairement :

$$Y_1 + Y_4 = 0, \quad a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 = 0,$$

ils admettent deux invariants communs, le déterminant et la trace de la matrice A :

$$\det A = a_1 a_4 - a_2 a_3\,, \quad \mathrm{tr} A = a_1 + a_4.$$

La table de commutateurs

↱	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Y_1	0	$-Y_2$	Y_3	0
Y_2	Y_2	0	$Y_4 - Y_1$	$-Y_2$
Y_3	$-Y_3$	$Y_1 - Y_4$	0	Y_3
Y_4	0	Y_2	$-Y_3$	0

preuve que les opérateurs Y_1 et Y_4 sont les symétries infinitesimales pour Y_2 et Y_3. L'opérateur adjoint général, champ vectoriel linéaire :

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 + c_3Y_3 + c_4Y_4,$$

induit le flot dans $GL(2,\mathbb{R})$:

$$A' = CA - AC \quad \Rightarrow \quad A_t = e^{Ct}Ae^{-Ct}.$$

La matrice

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

est considérée comme un élément de l'algèbre de Lie $gl(2,\mathbb{R})$. Suivant le schéma

$$Y \rightsquigarrow Ct \rightsquigarrow e^{Ct} \rightsquigarrow A_t = e^{Ct}Ae^{-Ct},$$

nous réussissons à établir, à partir des matrices correpondantes

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

les flots de tous les opérateurs Y_i :

$$\begin{aligned}
&Y_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2e^s \\ a_3e^{-s} & a_4 \end{pmatrix},\\
&Y_4 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2e^{-t} \\ a_3e^t & a_4 \end{pmatrix},\\
&(Y_1,Y_4) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2e^{s-t} \\ a_3e^{t-s} & a_4 \end{pmatrix},\\
&Y_2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 + a_3t & a_2 + (a_4 - a_1)t - a_3t^2 \\ a_3 & a_4 - a_3t \end{pmatrix},\\
&Y_3 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_1 - a_2t & a_2 \\ a_3 + (a_1 - a_4)t - a_2t^2 & a_4 + a_2t \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Chaque opérateur séparément induit le flot à 1 paramètre. Les opérateurs (Y_1, Y_4) se commutent et déterminent un flot à 2 paramètres. Deux égalités suivantes approuvent que l'opérateur Y_1 est une symétrie infinitésimale des opérateurs Y_2 et Y_3 :

$$e^{C_1s}e^{C_2t}e^{-C_1s} = e^{C_2te^s}, \quad e^{C_1s}e^{C_3t}e^{-C_1s} = e^{C_3te^{-s}},$$

il n'y a que le paramètre t se transforme dans le flot Y_1 :

$$t \quad \rightsquigarrow \quad te^{\pm s}.$$

C'est ainsi que le flot (Y_1, Y_4) correspond au noyau Z_2. Quant au noyau Z_1, il est décrit par l'opérateur P, son flot et ses invariants :

$$P = \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{\partial}{\partial a_4}\,, \qquad A_t = \begin{pmatrix} a_1 + t & a_2 \\ a_3 & a_4 + t \end{pmatrix},$$

$$P(\det A) = \mathrm{tr} A, \quad P^2(\det A) = P(\mathrm{trA}) = 2\,,$$

$$(\det A)_t = \det A + \mathrm{tr} A \cdot t + t^2 = \det A_t\,,$$

$$(\mathrm{tr} A)_t = \mathrm{tr} A + 2t = \mathrm{tr} A_t\,,$$

$$t \rightsquigarrow -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr} A \quad \Rightarrow \quad A_t \;\rightsquigarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1 - a_4) & a_2 \\ a_3 & \frac{1}{2}(a_4 - a_1) \end{pmatrix},$$

$$\det A_t \;\rightsquigarrow\; \Delta = \det A - \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}^2 A\,.$$

La grandeur Δ est un invariant commun[3] pour P et pour les opérateurs Y_i.

La projection de GL dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des invariants xyz de P,

$$\pi\,:\,GL \to \mathbb{R}^3\,:\, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (x, y, z) \qquad \begin{cases} x \circ \pi = \frac{1}{2}(a_1 - a_4)\,, \\ y \circ \pi = a_3\,, \\ z \circ \pi = a_2\,, \end{cases}$$

transforme les opérateurs Y_i dans les opérateurs du groupe pseudo-Euclidien,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 & \widetilde{Y}_2 & \widetilde{Y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y & -z \\ -y & 0 & 2x \\ z & -2x & 0 \end{pmatrix},$$

à l'invariant commun $(x^2 + yz) \circ \pi = -\Delta$; en effet :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Y}_1 & \widetilde{Y}_2 & \widetilde{Y}_3 \end{pmatrix} (x^2 + yz) = \begin{pmatrix} 2x & z & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & y & -z \\ -y & 0 & 2x \\ z & -2x & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Le flot hyperbolique $\widetilde{Y}_1$ conserve les flots paraboliques $\widetilde{Y}_2$ et $\widetilde{Y}_3$. Il fait seulement changer leurs paramètres.

La famille des quadriques $\det A_t = k-$ const dans le flot de P a le cylindre $\Delta = k$ pour enveloppe et se projette dans $\mathbb{R}^3$ sur l'hyperboloïde $x^2 + yz = -k$.

D'autre part, l'application

$$\zeta :\, GL \to R^2 :\, A \rightsquigarrow (u, u'), \qquad \begin{cases} u \circ \zeta = \frac{1}{2}\,\det A, \\ u' \circ \zeta = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr} A, \end{cases}$$

transforme l'opérateur P dans le champ de vecteurs $\widetilde{P}$ sur le plan uu',

$$P \quad \rightsquigarrow \quad \widetilde{P} = u' \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u'}, \qquad \begin{cases} u_t = u + u't + \frac{t^2}{2}, \\ u'_t = u' + t, \end{cases}$$

le flot $A_t = A + tE$ de P recouvre le flot du champ $\widetilde{P}$ (v. à droite), et le discriminant du trinôme u_t coïncide avec Δ au signe près,

[3]Rappelons nous la coïncidence de Δ avec le moment central μ_2.

$$\big((u')^2 - 2u\big) \circ \zeta = -\Delta.$$

Le cylindre $\Delta = 0$, i. e. toutes ses génératrices rectilignes tombent sur *la parabole discriminante* $(u')^2 - 2u = 0$.

Deux *applications de Viète* [4] φ_1 et φ_2 couvrent le plan uu' d'un côté et de l'autre de la parabole discriminante, du plan $\alpha\beta$ en le pliant suivant l'axe $\alpha = 0$,

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \rightsquigarrow (u, u'), \qquad \begin{cases} u \circ \varphi_1 = \frac{1}{2}\,(\alpha^2 - \beta^2), \\ u' \circ \varphi_1 = -\alpha, \end{cases}$$

$$\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta) \rightsquigarrow (u, u'), \qquad \begin{cases} u \circ \varphi_2 = \frac{1}{2}\,(\alpha^2 + \beta^2), \\ u' \circ \varphi_2 = -\alpha, \end{cases}$$

la couverture est double puisque deux points $(\alpha, \pm\beta)$ ont l'image commune. L'application φ_1 couvre le domaine extérieur de la parabole discriminante et l'application φ_2 le domaine intérieur :

$$\big((u')^2 - 2u\big) \circ \varphi_1 = \beta^2 \geq 0, \qquad \big((u')^2 - 2u\big) \circ \varphi_2 = -\beta^2 \leq 0.$$

Les droites $\beta =$ const, trajectoires de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, recouvrent les trajectoires du champ $\widetilde{P}$, de deux côtés de la parabole.

Conclusion. Soit A la matrice de Jacobi d'une transformation du plan. La matrice A est un élément linéaire, un stop-cadre du mouvement, comme le vecteur tangent à une courbe. Quand le mouvement se transforme, la matrice A subit un automorphisme intérieur, tandis que le déterminant et la trace, $\det A$ et $\mathrm{tr}A$, restent invariants. Au mouvement suivant (à l'action de P) $\det A$ et $\mathrm{tr}A$ se transforment et le discriminant Δ s'engage. Les autres invariants i_0, i_1 et I_0, I_1, I_3 apparaissent semblablement dans les groupes $GL(3,\mathbb{R})$ et $GL(4,\mathbb{R})$.

Les matrices, leurs invariants, fonctions symétriques Hamilton-Cayley, les moments des probabilités, de la mécanique et, d'autre part, les enveloppes et les singularités des applications, toutes ces notions sont unies d'une idée dominante – mouvements d'ordre supérieurs.

References

[1] V.E. Gmurman, *Theory of Probalities and Statistics*, Moscow, Vyschaya shkola, 1977.

[2] M.G. Kendall, A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics, 1, Distribution Theory*, London; Moscow, Nauka, 1966.

[3] Rahula, M., *New Problems in Differential Geometry*, WSP, 1993.

[4] Rahula, M., *Exponential Law in the Lie-Cartan Calulus,* Rediconti del Seminario Matematico di Messina, Atti del Congresso Internazionale in onore di Pasquale Calapso, 1998, 264-291.

[4] On y reconnait le théorème de Viète pour la fonction quadratique u_t si on pose dans le premier cas $t_{1,2} = \alpha \pm \beta$ et dans le second $t_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

[5] Rahula, M., *Vector Fields and Symmetries* (in Russian), Tartu UP, 2004.

[6] White, J.E., *The Method of Iterated Tangents with Applications in Local Riemannian Geometry*, Pitman Publ., 1982.

Author's address:

Maïdo Rahula
University of Tartu, Institute of Pure Mathematics,
J. Liivi, 2, Tartu, 50409 Estonia.
e-mail: rahula@ut.ee